Tartószerkezetek mechanikája I.
ELŐADÁSOK

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

Széchenyi István Egyetem
Szerkezetépítési és Geotechnikai Tanszék

Tartószerkezetek mechanikája I.

1.

Bevezetés, a statika alapfogalmai

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

A MECHANIKA JELENTÉSE

- A mechanikai összefüggések felhasználása széleskörű, az égitestek, a földi testek és az elemi részecskék mozgásainak leírására is alkalmas.
- A vizsgálat tárgya lehet szilárd, folyadék vagy gáz halmazállapotú.
- Merev testek statikájával fogunk foglalkozni a félév során.

Műszaki mechanika

- A fizika mozgásokkal foglalkozó területe.

Kinematika

- A mozgások leírásával foglalkozik.

Dinamika

- A mozgások kiváltó okával foglalkozik.

Statika

- Nem jön létre mozgás, nyugalom van.

Kinetika

- Létrejön mozgás.

Merev testek statikája

- Nem jön létre alakváltozás.

Szilárd testek statikája

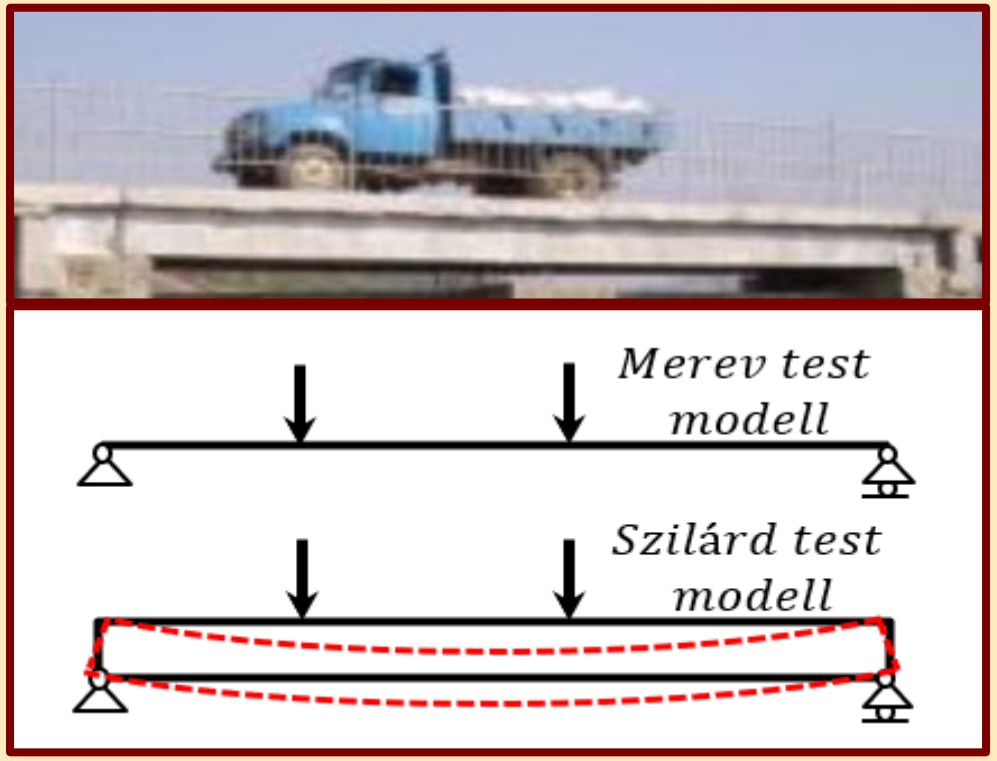
- Létrejön alakváltozás.

A MŰSZAKI MECHANIKA CÉLKITŰZÉSE

- A mechanika az építmények tartószerkezeteinek tervezéséhez, viselkedésük megértéséhez kíván nyújtani megfelelő műszaki látásmódot, és szükséges alaptudást.
- A merev testek statikája főként a vizsgált testek, szerkezetek nyugalmi helyzetének megőrzésével, az őket ért hatások következtében kialakítandó egyensúly fenntartásával foglalkozik.

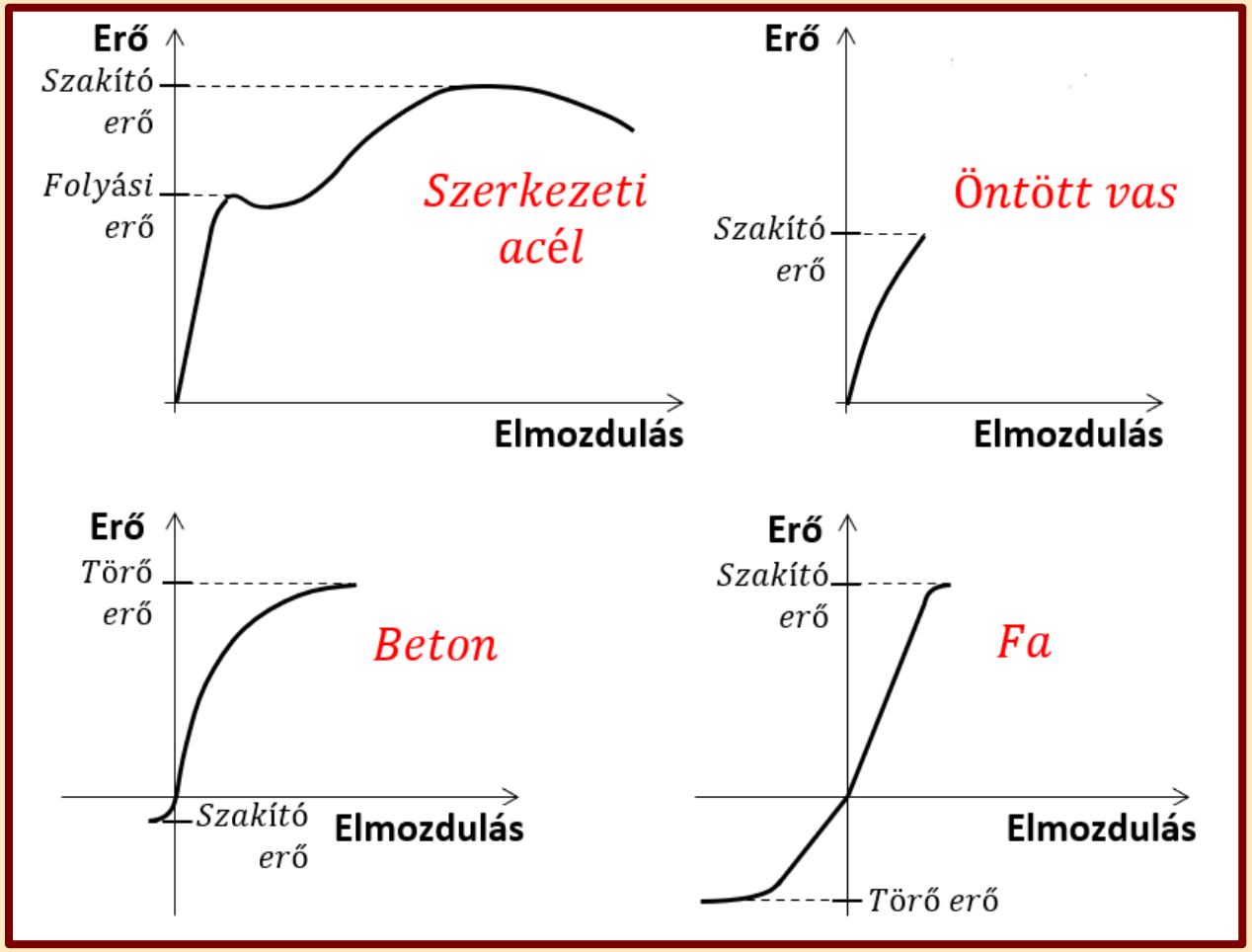
A MECHANIKA MODELLJEI

- A szerkezetek tulajdonságait, és a velük kapcsolatos jelenségeket bonyolultságuk miatt nem a valóságnak megfelelően vesszük figyelembe, a vizsgálatokhoz szükséges modellt hozunk létre.
- Csak a számunkra fontos tulajdonságokat vizsgáljuk, azokat a megfelelő egyszerűsítések mellett a kellő pontossággal figyelembe véve.
- Az egyes vizsgálatoknál a figyelembe veendő tulajdonságok és azok egyszerűsítésének mértéke változhat.
- Az összefüggéseink alapját néhány, bizonyítás nélkül megfigyelt tény alkotja, amelyeket alaptörvényeknek nevezünk. Ezek segítségével a vizsgálatainkhoz szükséges tételek vezethetőek le, amelyekből különböző eljárások, elméletek hozhatóak létre.



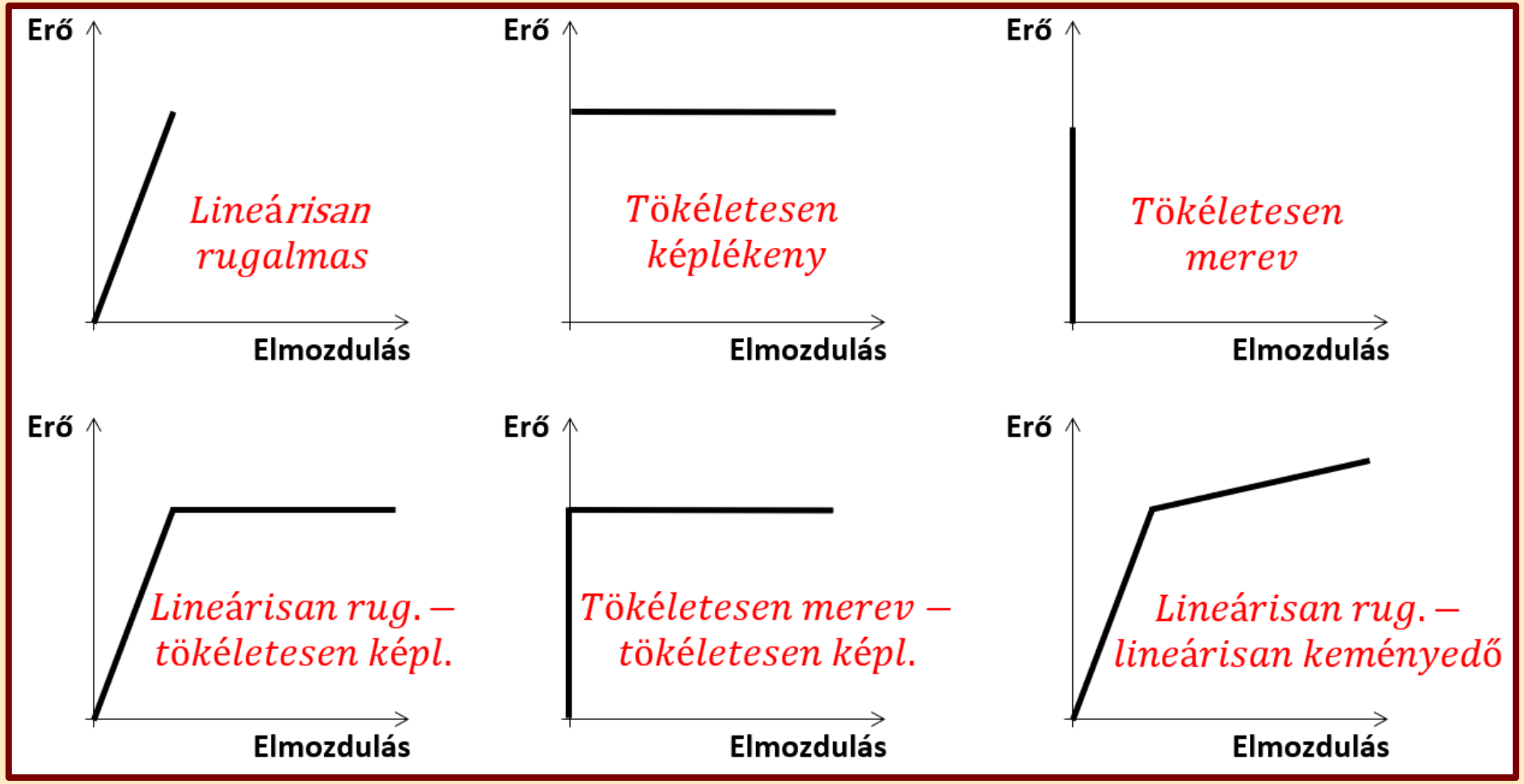
ANYAGMODELLEK

- Az egyes anyagok viselkedését sokféle tulajdonságukkal jellemezhetjük. Ezek közül a terhelésből származó belső erő (feszültség) és a hatására kialakuló, az irányába eső elmozdulás (alakváltozás) összefüggését vizsgáljuk.
- Az erő-elmozdulás diagramokat a vizsgált anyagból készült próbatesten végzett húzószilárdság (szakító) vizsgálattal, valamint nyomószilárdság (törő) vizsgálattal határozzák meg.
- A kapott diagramok egyenesekből és görbékből állnak, amelyek felhasználása ezáltal bonyolult, egyszerűsítést, modell alkotást igényel.



ANYAGMODELLEK

- A diagramok idealizálására, vagyis a görbék egyszerűbb, lineáris közelítésére van szükségünk az anyagi viselkedés könnyebb kezelhetősége érdekében.
- A merev testek statikájában a tökéletesen merev anyagmodellt használjuk, ahol a teher hatására nem keletkezik alakváltozás.

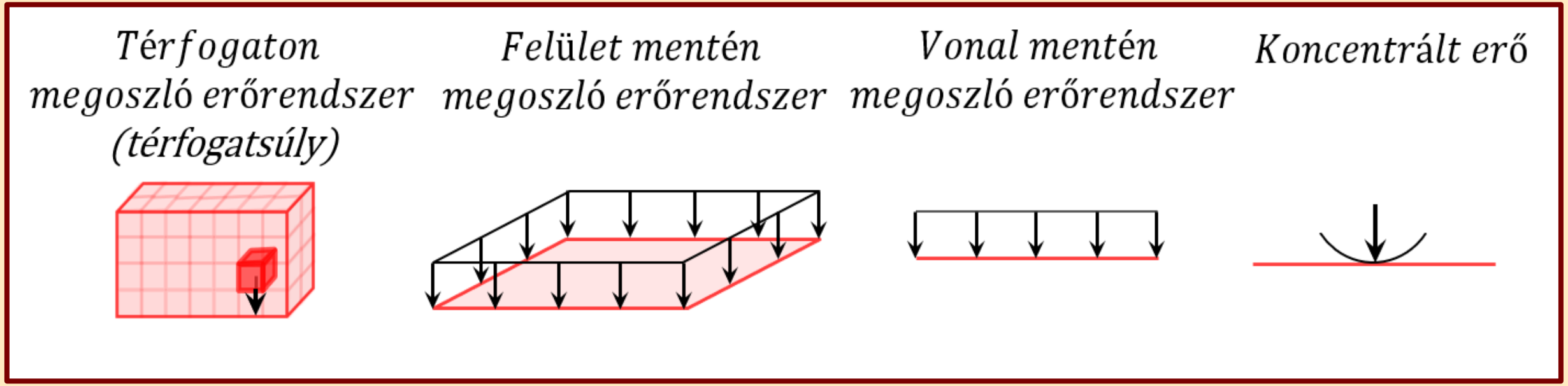


SZERKEZETI MODELLEK

- A szerkezetek három irányú geometriai kiterjedését egyes irányokban leegyszerűsíthetjük, elhanyagolhatjuk, ha a vizsgált hatások és következményeik változása is elhanyagolható abban az irányban. Ez az egyszerűsítés általában a három irányú méret egymáshoz viszonyított arányán alapul.
- Rúdszerkezetek: két mérete lényegesen kisebb a harmadiknál, ezek elhanyagolhatóak, tengelyvonalával ábrázolhatjuk, terhek egyváltozósak lesznek.
- Felületszerkezetek (lemez, tárcsa, héj): egy méret lényegesen kisebb.
- Tömbszerkezetek: azonos nagyságrendű méretek.

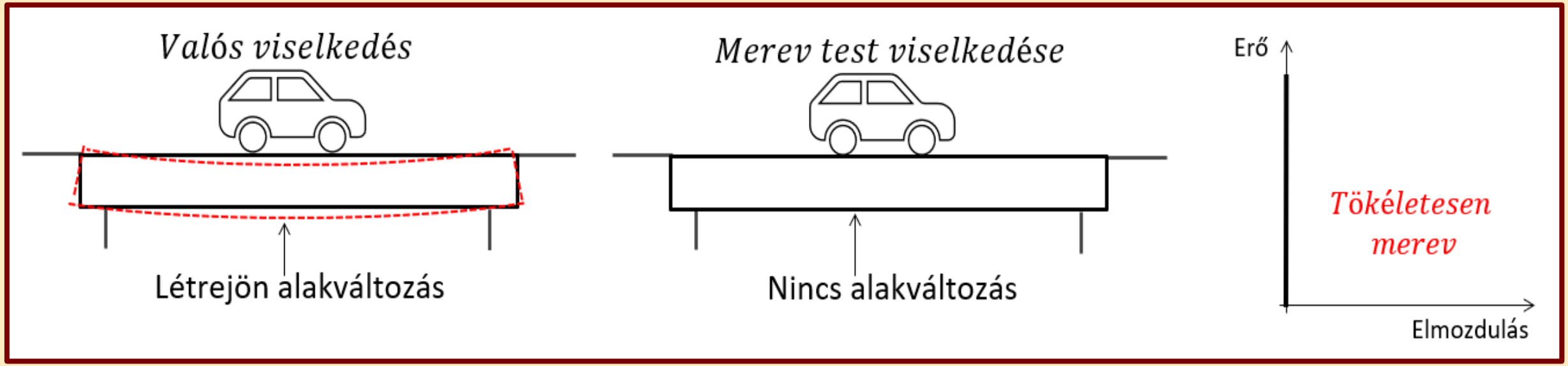
TEHERMODELLEK

- A szerkezeteket érő terhek jelentős része a gravitáció hatására létrejövő súlyerő, amelyek a test minden pontjában hatnak, ezért nagyságuk a térfogattal arányos.
- Feladatunk a valós terhek matematikailag kezelhető modelljének felvétele, amely a szerkezeti modellhez igazítva veszi fel a jellemzően térbeli kiterjedésű terheket, azokat síkbeli vagy vonalmenti kierjedésűvé alakítva.
- Ha a teher a szerkezet méretéhez képest kis felület mentén adódik át, akkor a terhet az átadódás egy pontjába koncentrálhatjuk és koncentrált erőről beszélünk.



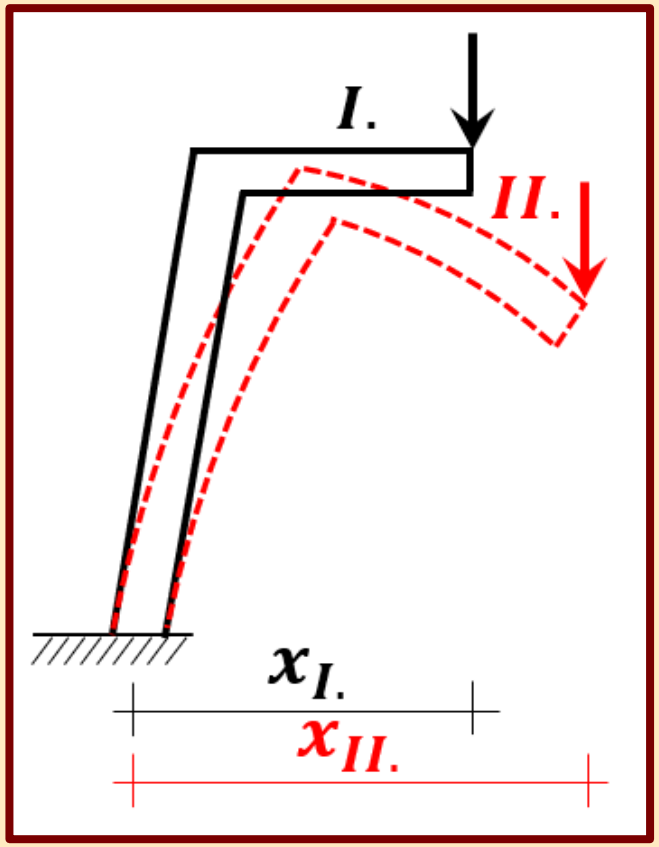
VISELKEDÉSI MODELLEK

- A szerkezeteknek a terhelésre adott válaszát, vagyis a terhelés alatti viselkedését is modelleznünk kell, melynek célja az adott vizsgálathoz hozzárendelhető, a viselkedést leíró számítás kellő pontosságú egyszerűsítésének felvétele. A leglényegesebb feladatunk az alakváltozások figyelembevételi módjának megállapítása az egyes feladatoknál.
- Merev test modell: tökéletesen merev anyagú testekként vizsgáljuk a szerkezeteket. Statikában ezt használjuk, mert itt alakváltozásokat nem akarunk számolni, és azok figyelmen kívül hagyása nem befolyásolja az eredményeinket.



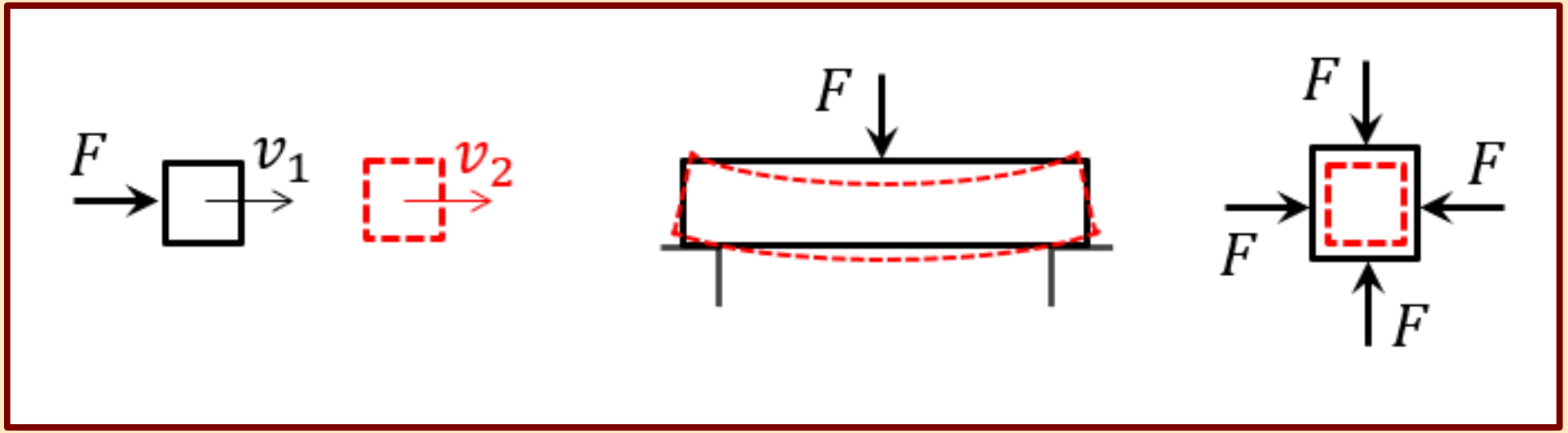
VISELKEDÉSI MODELLEK

- Szilárd test modell: szilárd anyagmodellt használunk, vagyis alakváltozásra képes anyagú testeket vizsgálunk. Szilárdságtanban alkalmazzuk, ahol alakváltozásokat is akarunk számítani.
  - I. rendű modell: deformálatlan alakon számolunk, az alakváltozások igénybevételekre visszahatását elhanyagoljuk (feladatok többsége). Az egymásra halmozás elve érvényes.
  - II. rendű modell: deformált alakon számolunk, az alakváltozások visszahatását linearizált geometriai egyszerűsítésekkel figyelembe vesszük (pl. stabilitási feladatok).
  - III. rendű modell: deformált alakon számolunk, az alakváltozások visszahatását valós, egyszerűsítés nélküli geometriai összefüggésekkel figyelembe vesszük (pl. kötélszerkezetek).



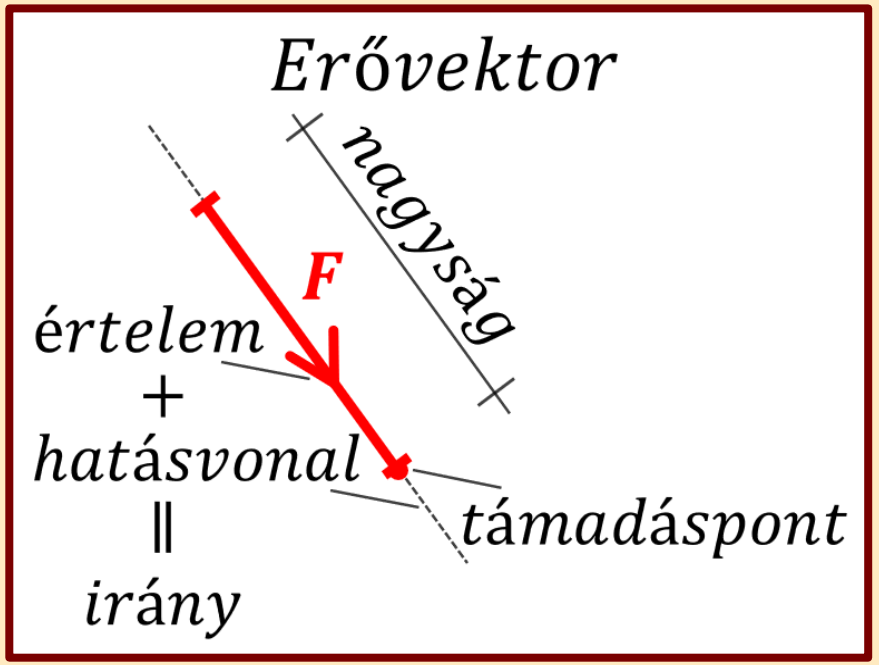
AZ ERŐ FOGALMA

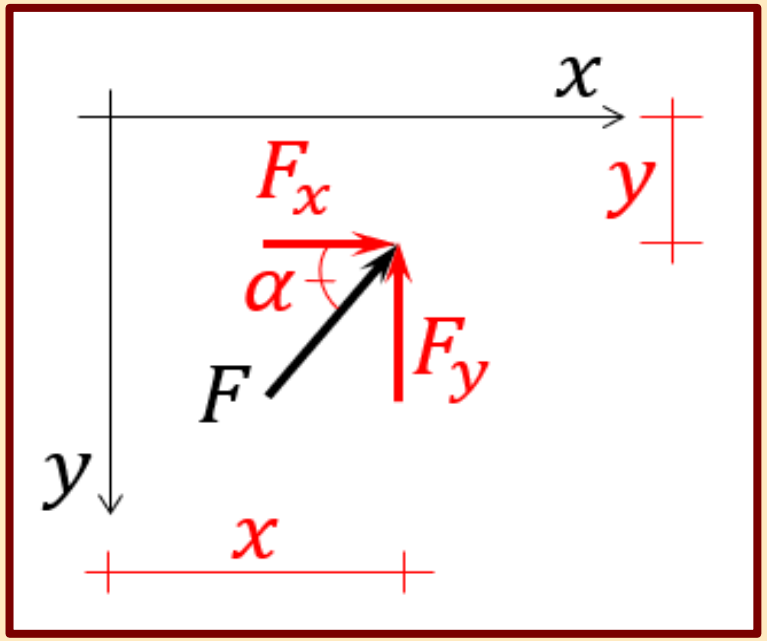
- A testek egymásra hatásának mértékét erőnek nevezzük.
- Az erő hatásai:
  - Mozgásállapot-változtató hatás: a test sebességének, vagy mozgásirányának megváltoztatása, akár nyugalmi helyzetéből kimozdítása.
  - Alakváltoztató hatás: nyugalmi állapotban lévő test alakjának megváltoztatása.
  - Méretváltoztató hatás: a test kiindulási méreteinek megváltozása, amely gyakran az alakváltozással együtt jár.



AZ ERŐ ADATAI

- Az erő mindig egy másik test hatását fejezi ki a vizsgált testre. Ezt matematikailag is kezelhetővé kell tennünk, ezért az erőt egy absztrakcióval vektorként kezeljük.
- Az erő kötött vektorként nagyságával, irányával és támadáspontjával jellemezhető. A statikában viszont támadáspont nélküli szabad vektorként kezelhetjük, mert az erő hatásvonalán eltolható.





- Az erő megadásához négy adat szükséges:
  - a hatásvonal egy pontjának két koordinátája,
  - a vektor nagysága és hatásvonalának vízszintessel bezárt szöge, vagy a vektor két összetevője.
- Az erő mértékegysége: N (Newton); 1 N = 1 kg·m/s^2

AZ ERŐ HATÁSAI

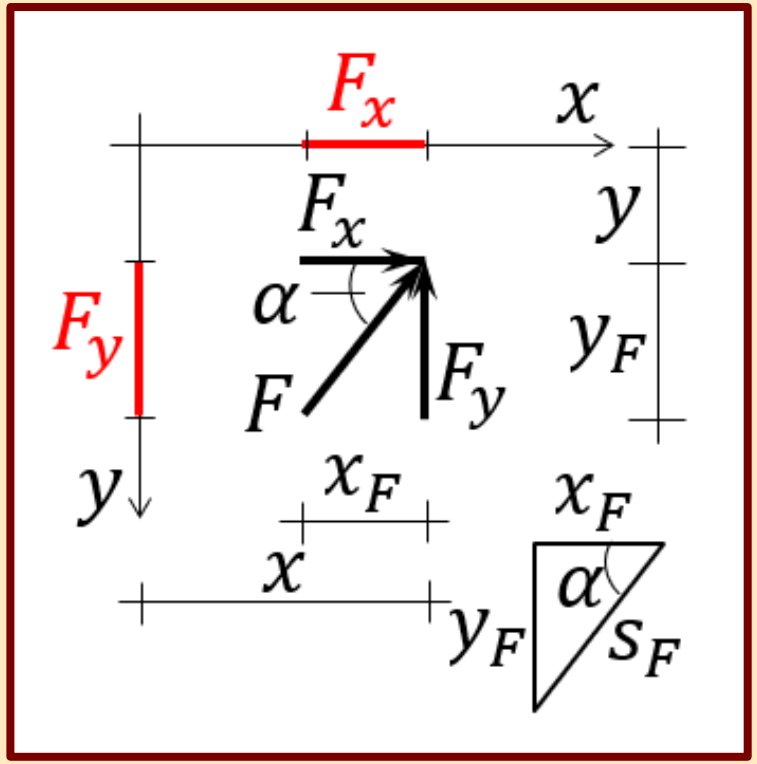
- A statikában az erő mozgásállapot-változtató hatásával foglalkozunk, amely a testet nyugalmi helyzetéből szándékozik elmozdítani. Alak- és méretváltozás a merev test modellen nem keletkezik. Az elmozdító szándék eltolásra és elfordításra irányulhat.
- Az erő koordináta tengelyek irányaira vizsgált eltoló hatása a tengelyekre vett vetületeivel egyezik meg:

$$F_x = F \cdot \cos\alpha = F \cdot \frac{x_F}{s_F} \qquad \cos\alpha = \frac{F_x}{F}$$

$$F_y = F \cdot \sin\alpha = F \cdot \frac{y_F}{s_F} \qquad \sin\alpha = \frac{F_y}{F}$$

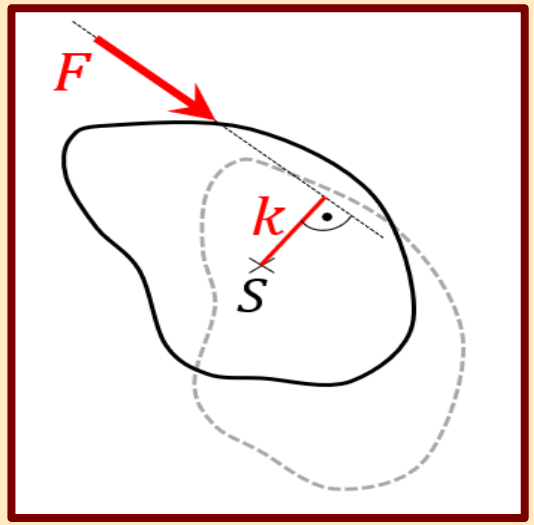
- Az erő nagysága és hajlásszöge a vetületek segítségével:

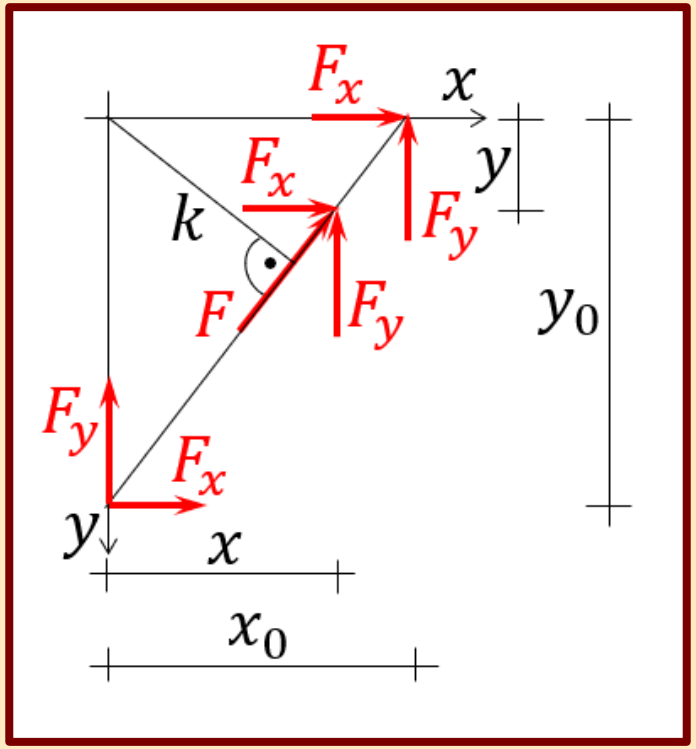
$$|F| = \sqrt{F^2{}_x + F^2{}_y}; \qquad tg \propto = \frac{|F_y|}{|F_x|}$$



AZ ERŐ HATÁSAI

- Az erőnek a sík egy pontja körüli elfordító hatása megegyezik az erőnek a pontra számított forgatónyomatékával.
- Az erő nyomatéka egyenlő az erő és az erő pontig mért távolságának (karjának) a szorzatával. Előjelét az óra járásával megegyező forgatás esetén minősítjük pozitívnak.
- Az erő nyomatéka helyettesíthető az összetevői nyomatékával.
- Az erőt hatásvonalán eltolva, a koordináta tengelyekkel alkotott metszéspontban felbontva komponenseire, a nyomaték meghatározása során az egyik erőösszetevő kiesik, csak a másik forgat.





A nyomaték szemléleti előjelezéssel:

$$M^0 = -\mathrm{F} \cdot \mathrm{k} = -F_x \cdot y - F_y \cdot x$$

A nyomaték az összetevők és a koordináták előjeleivel:

$$M^0 = -\mathrm{F} \cdot \mathrm{k} = -F_x \cdot y + F_y \cdot x$$

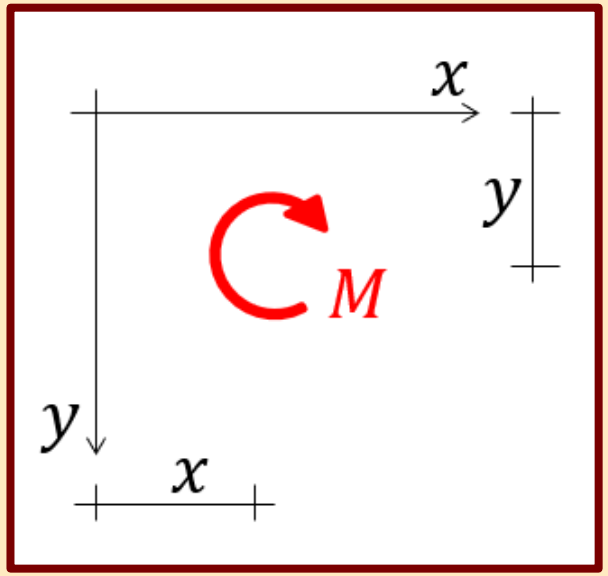
A nyomaték a tengelyeknél felbontott összetevőkkel:

$$M^0 = -\mathrm{F} \cdot \mathrm{k} = -F_y \cdot x_0 = -F_x \cdot y_0$$

A NYOMATÉK ÉS HATÁSA

- A nyomaték is a test mozgásállapotát szándékozik megváltoztatni, viszont csak elfordító hatással rendelkezik. A nyomaték elfordító hatása bármely síkbeli pontra megegyezik a nyomaték értékével (karral történő szorzás nélkül), mivel a nyomaték síkban eltolható a merev testek statikájában.

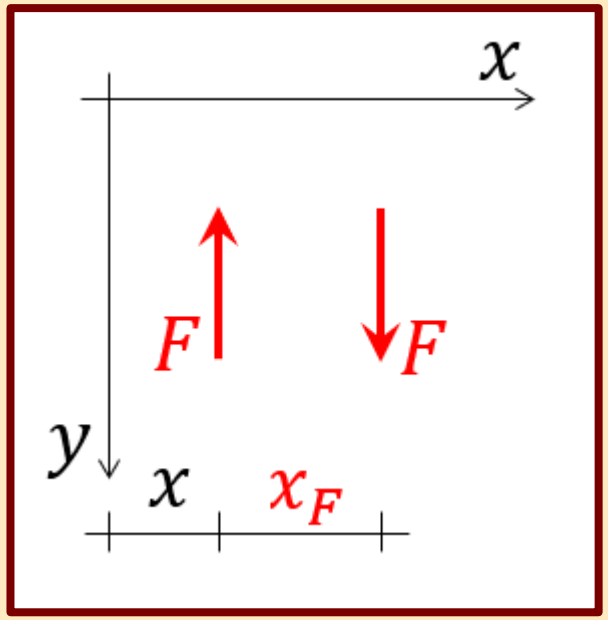
$$M^0 = M$$



- Az erőpár a nyomatékkal egyenértékű mennyiség, csak elfordító hatással rendelkezik. Erőpárnak a két azonos nagyságú, ellentett irányú, párhuzamos, de nem közös hatásvonalú erőt nevezzük.

$$M^0 = -F \cdot x + F \cdot (x + x_F) = F \cdot x_F$$

Az erőpár nyomatéka nem változik az erő és a kar változásával, ha a szorzatuk változatlan marad.

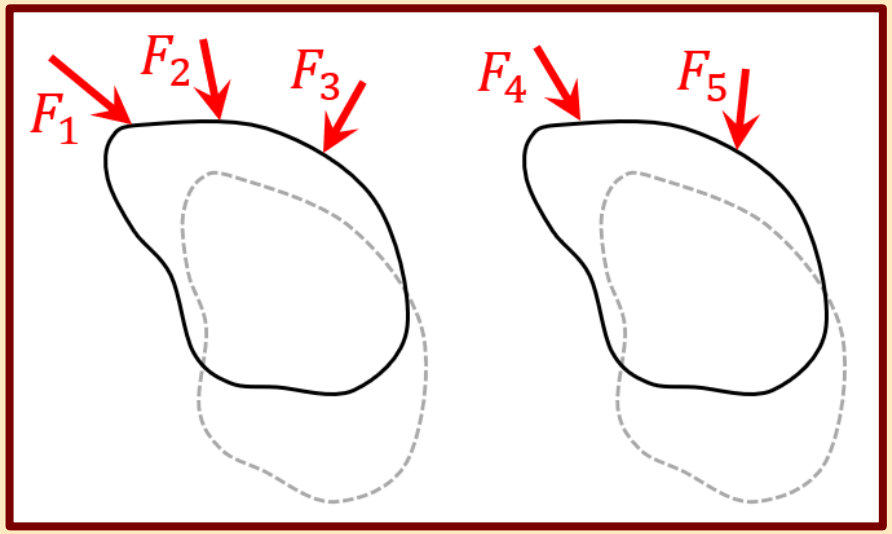


ERŐKKEL KAPCSOLATOS ALAPFOGALMAK

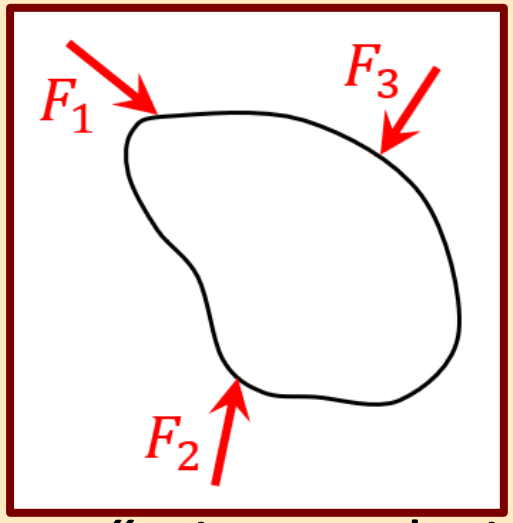
- Erőrendszer: a vizsgálatunk tárgyát képező erők együttesét, csoportját erőrendszernek hívjuk.
- Egyenértékűség: két erőrendszer egyenértékű, ha minden hatásukban azonosak.

$$(F_1, F_2, F_3) \doteq (F_4, F_5)$$

Az F_1, F_2, F_3 erőkből álló erőrendszer egyenértékű az F_4, F_5 erőkből álló erőrendszerrel.



- Egyensúly: ha a testre ható erőrendszer nem idéz elő mozgásállapot-változást, vagyis ha a test nyugalomban van, akkor egyensúlyról beszélünk. Az egyensúly kialakítása szerkezeteinknél a legalapvetőbb feladat.



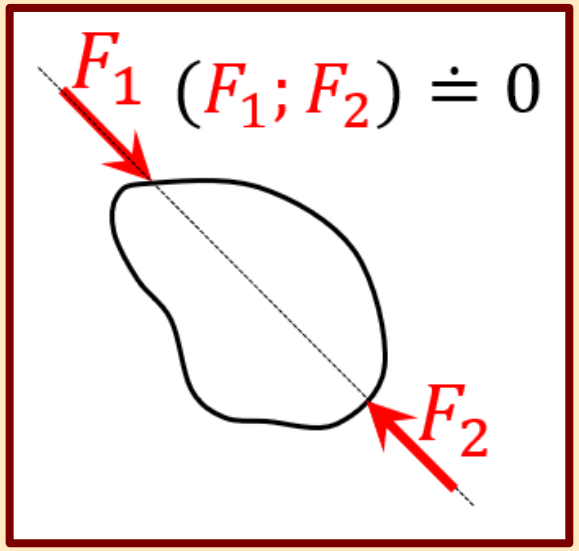
- Egyensúlyi erőrendszer: ha egy erőrendszer minden hatásában zérus, vagyis egy nyugalomban lévő testre működtetve, a test megőrzi nyugalmi állapotát, akkor ezt az erőrendszert egyensúlyi erőrendszernek hívjuk:

$$(F_1, F_2, F_3) \doteq 0$$

A STATIKA AXIÓMÁI

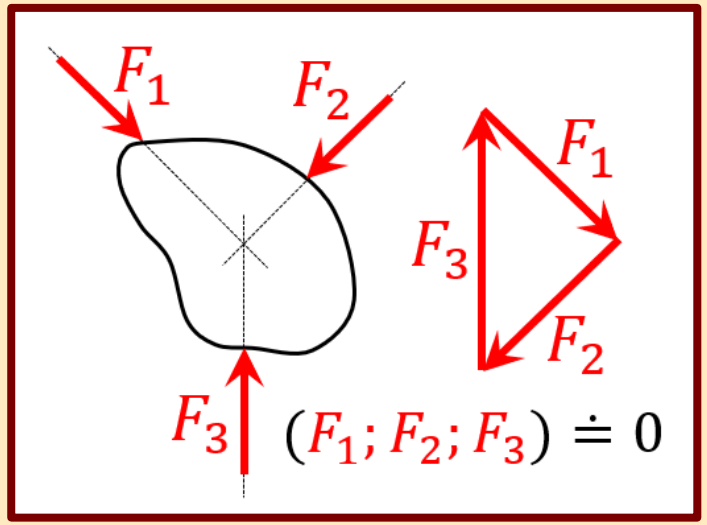
- Azokat az bizonyítás nélküli alaptörvényszerűségeket, amelyeket gyakorlati megfigyelések igazolnak és a további összefüggések, tételek, eljárások alapját képezik, axiómáknak nevezzük.
- Első axióma: két erő akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha hatásvonaluk közös, értelmük ellentett, nagyságuk azonos.

$$(F_1; F_2) \doteq 0$$



- Második axióma: három erő akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha hatásvonalaik közös pontban metsződnek és vektoraikból zárt, nyílfolytonos háromszög szerkeszthető.

$$(F_1; F_2; F_3) \doteq 0$$



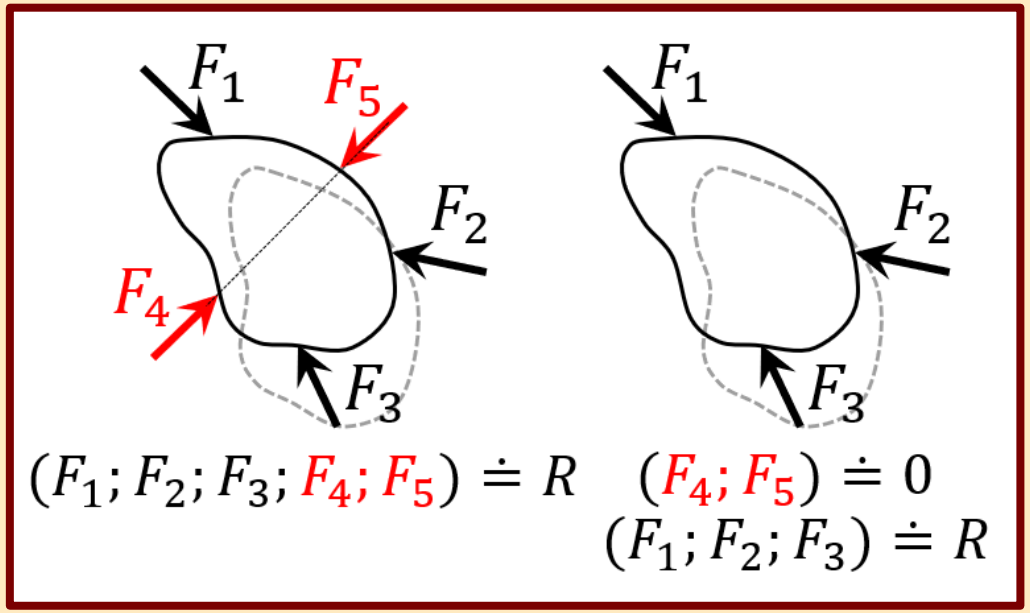
A STATIKA AXIÓMÁI

- Harmadik axióma: ha egy erőrendszerhez egy egyensúlyi erőrendszert hozzáadunk, vagy belőle egy egyensúlyi erőrendszert elveszünk, az erőrendszer hatása nem változik.

$$(F_1; F_2; F_3; F_4; F_5) \doteq \mathrm{R}$$

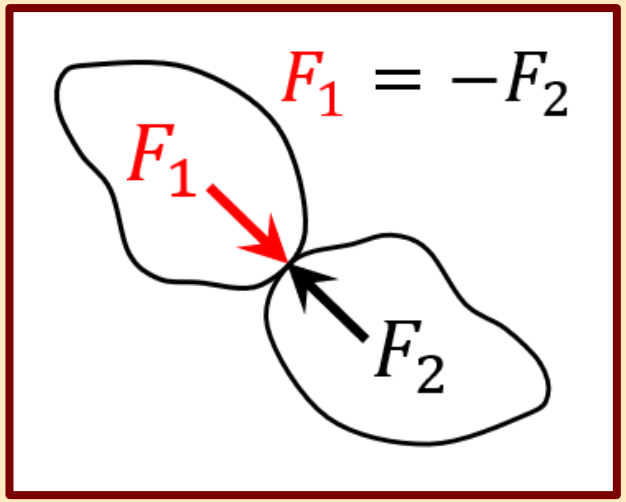
$$(F_4; F_5) \doteq 0$$

$$(F_1; F_2; F_3) \doteq \mathrm{R}$$



- Negyedik axióma: két test egymásra hatásakor az egymásra kifejtett erők egymás ellentettjei lesznek, vagyis egy egyenesbe esnek, azonos nagyságúak, ellentett értelműek (hatás-ellenhatás törvénye).

$$F_1 \doteq -F_2$$



AZ ERŐ ELTOLHATÓSÁGA

- A merev testek statikájában az erők hatásvonaluk mentén eltolhatóak.
- A testre ható F erő mellett a harmadik axióma alapján vegyünk fel egy egyensúlyi erőrendszert, melynek tagjai az F erővel azonos nagyságúak és hatásvonaluk egy egyenesbe esik vele.

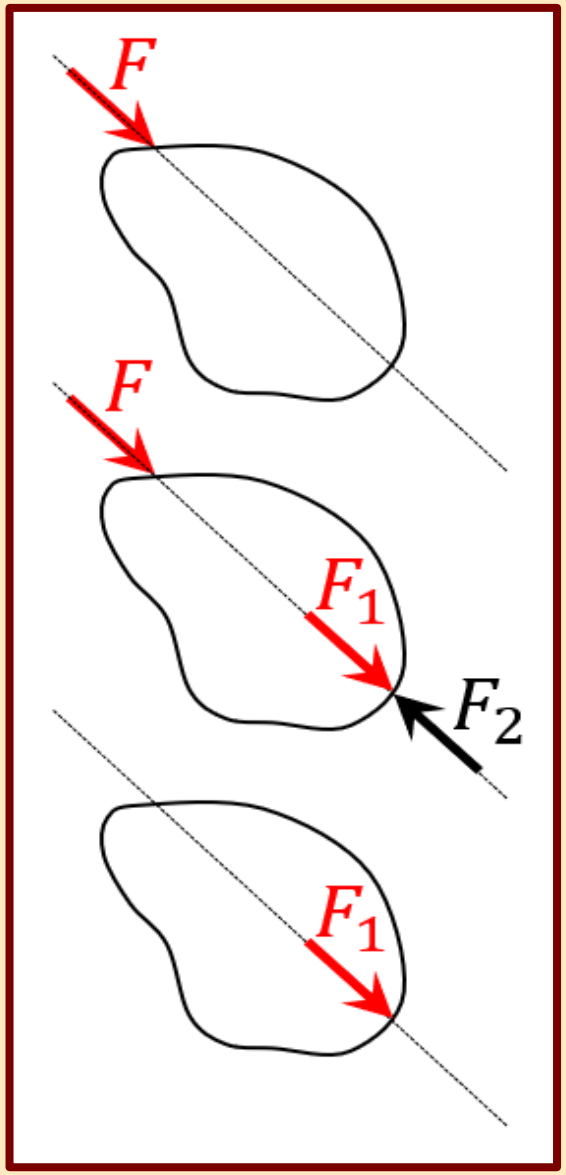
$$(F_1; F_2) \doteq 0 \qquad |F| = |F_1| = |F_2|$$

- Az F és az F_2 egyensúlyi erőrendszert alkot az első axióma alapján, ezáltal a harmadik axiómának megfelelően eltávolíthatóak.

$$(F; F_2) \doteq 0$$

- A megmaradt F_1 megegyezik az eredeti F erővel, vagyis a hatásvonalán eltolt erőt kaptuk eredményül.

$$\mathrm{F} \doteq F_1$$



Tartószerkezetek mechanikája I.

2.

Síkbeli erőrendszerek helyettesítése, egyensúlya

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

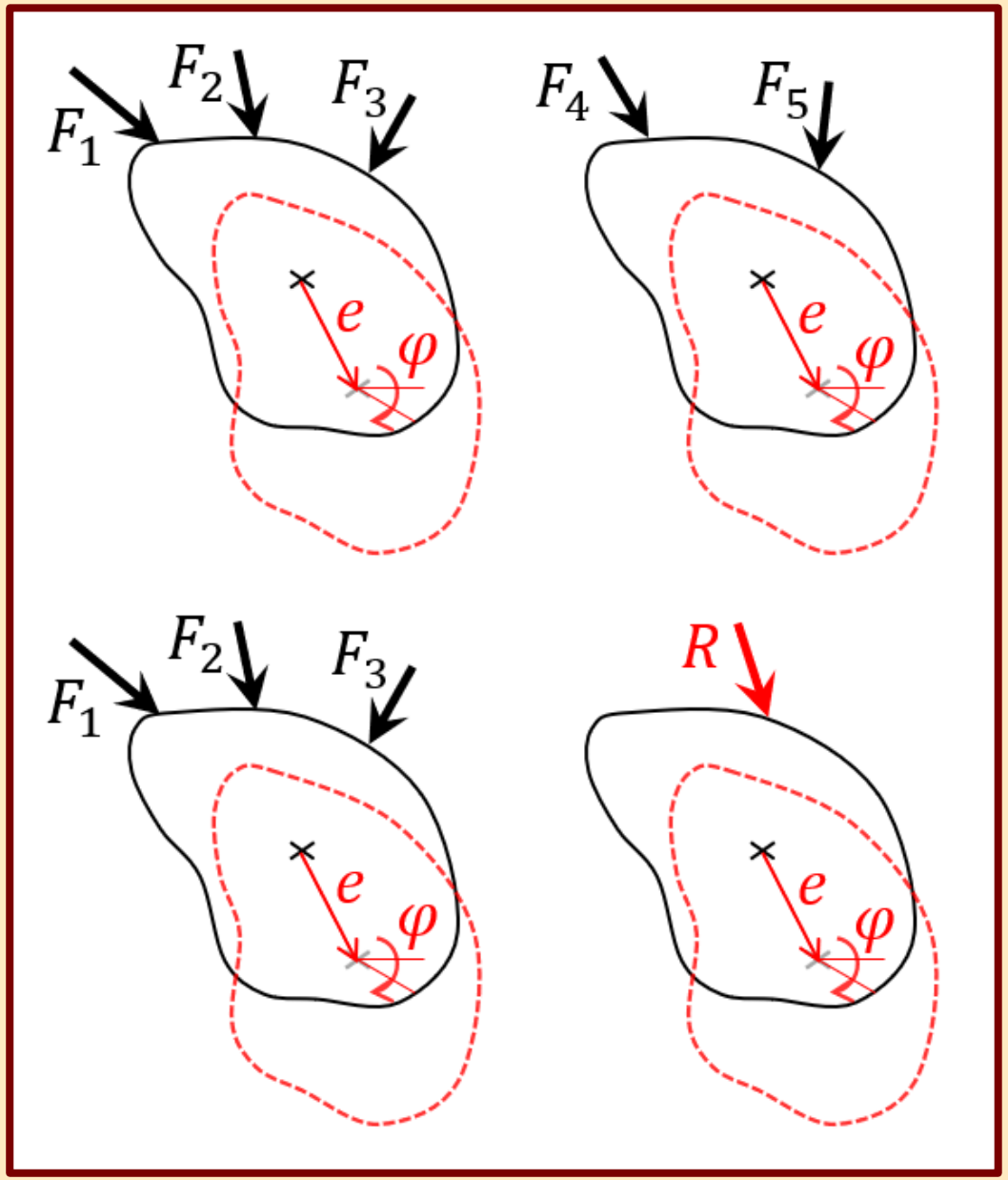
SÍKBELI ERŐRENDSZEREK HELYETTESÍTÉSE

- Ha az erőrendszer erői közös síkban működnek, akkor síkbeli erőrendszerről beszélünk.
- Ha két erőrendszer minden (eltoló és elfordító) hatásában megegyezik, akkor a két erőrendszer egyenértékű, és helyettesíthető egymással.

$$(F_1, F_2, F_3) \doteq (F_4, F_5)$$

- Ha egyetlen erő vagy erőpár egy erőrendszerrel minden hatásában megegyezik, akkor az az erő vagy erőpár az erőrendszerrel helyettesíthető és az erőrendszer eredőjének nevezzük.

$$(F_1, F_2, F_3) \doteq R$$



EREDŐ MEGHATÁROZÁSA

- Feladatunk egyetlen olyan dinám meghatározása, amely helyettesíti az erőrendszert eltoló és elfordító hatásában. Az erőt, a nyomatékot és a zéruserőt közös néven dinámnak nevezzük.
- Vetülettétel - eltoló hatás helyettesítése: az erőrendszer koordinátatengelyekkel alkotott erővetületeinek összege megegyezik az eredő ugyanezen tengelyekre vett vetületeivel.

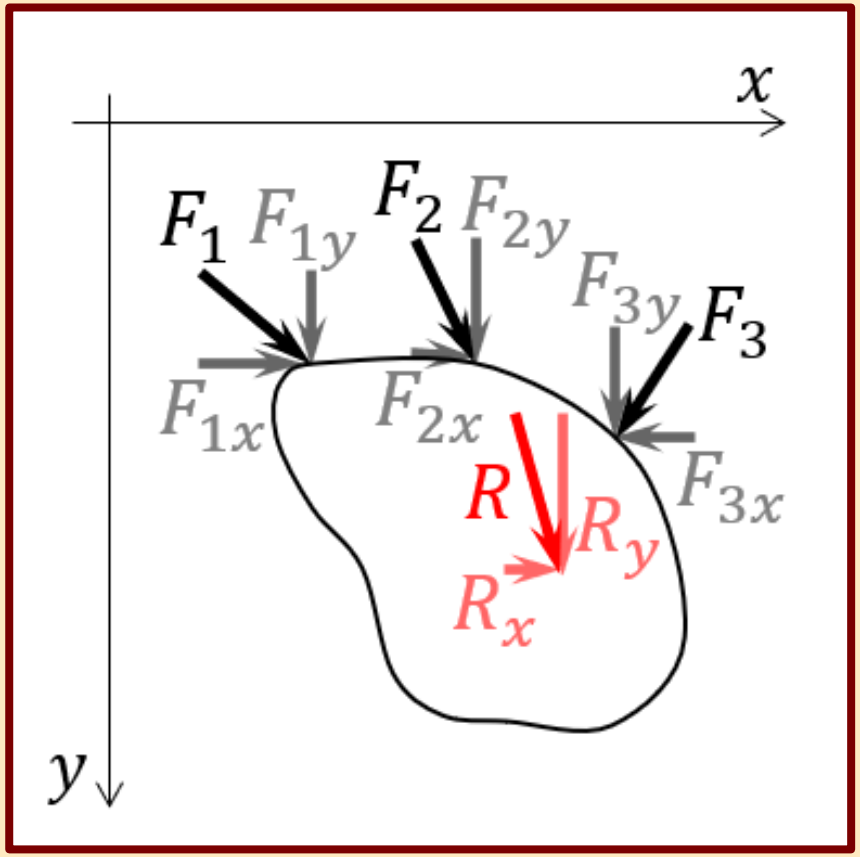
  Vetületi egyenletek:

  $$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} = R_x \qquad \sum_{i=0}^{n} F_{iy} = R_y$$

- Nyomatéktétel - elfordító hatás helyettesítése: az erőrendszer a sík valamely pontjára meghatározott nyomatékainak összege megegyezik az eredő ugyanezen pontra vett nyomatékával.

  Nyomatéki egyenlet:

  $$\sum_{i=0}^{n} M_i^0 = M_R^0$$



KÖZÖS METSZTÉSPONTÚ ERŐK EREDŐJE

Egyenértékűség:

$$(F_1, F_2, F_3) \doteq R$$

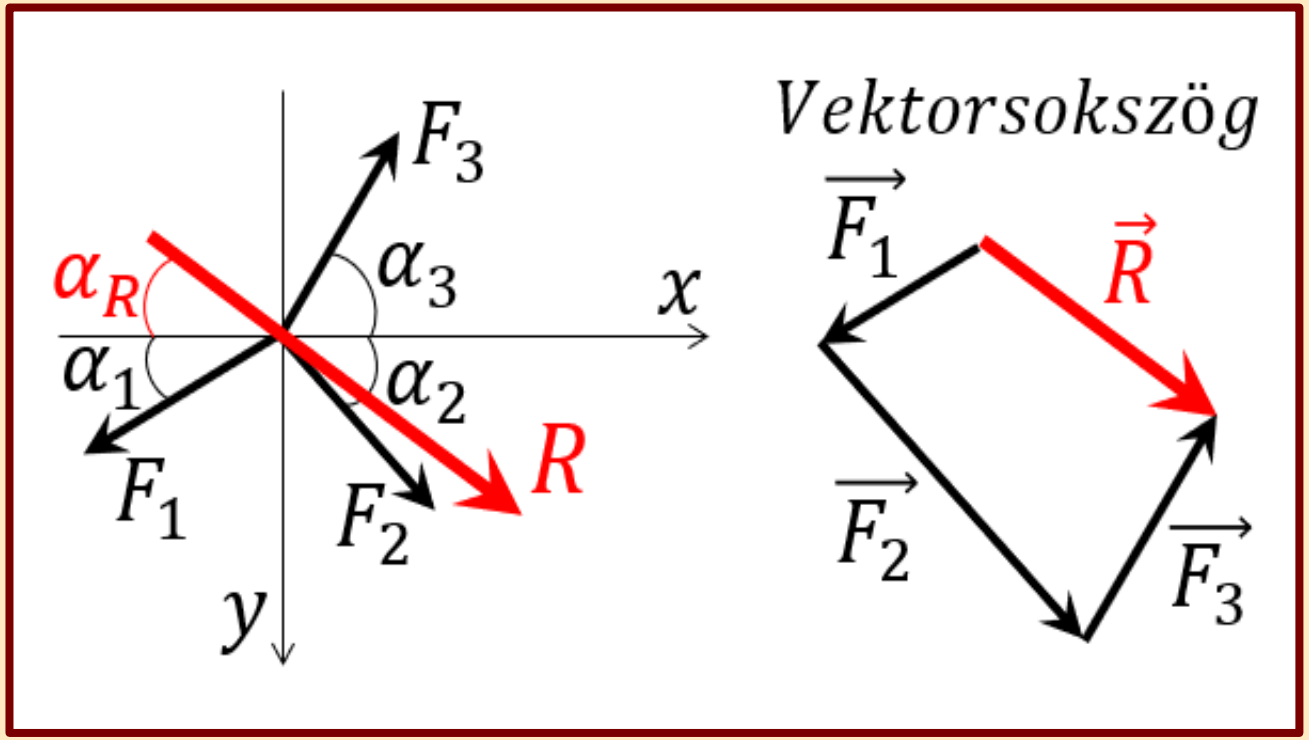
Vetületi egyenletek:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} = -F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = R_x$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} = R_y$$

Eredő nagysága és hajlásszöge:

$$R = \sqrt{R^2{}_x + R^2{}_y} \qquad \tan\alpha_R = \frac{|R_y|}{|R_x|}$$



Nyomatéki egyenlet:

$$\sum_{i=0}^{n} M_i^0 = M_R^0 = 0$$ (A két vetületi egyenlet felírása elegendő a megoldáshoz.)

Az erőrendszer nyomatéka zérus az origóra, ezért az eredő nyomatékának is zérust kell adnia az origóra számolva. Tehát az eredő áthalad a közös metszésponton. Szerkesztéssel léptékhelyesen felmérve az erőket, azoknak az eredővel együtt egy zárt, nyílütközéses vektorsokszöget kell kiadniuk.

PÁRHUZAMOS ERŐK EREDŐJE

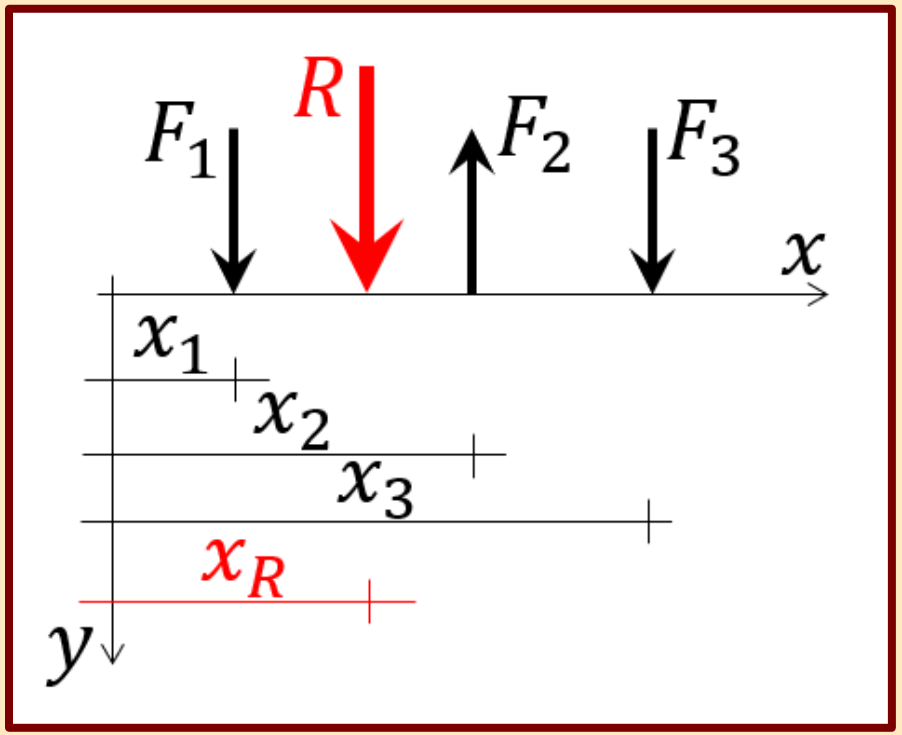
Egyenértékűség:

$$(F_1, F_2, F_3) \doteq R$$

Vetületi egyenletek:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = F_1 - F_2 + F_3 = R_y = R$$

Egy, az erőkkel párhuzamosan felírt vetületi egyenlettel előállítható az eredő nagysága.



Nyomatéki egyenlet:

$$\sum_{i=1}^{n} {M_i}^0 = F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3 = {M_R}^0 = R_y \cdot x_R \quad \rightarrow x_R = \frac{\sum_{i=0}^{n} M_i^0}{R_y}$$

A nyomatéki egyenlet segítségével az eredő helyét számíthatjuk ki, hiszen csak az lesz ismeretlen az egyenletben. Tehát két egyenlet felírása szükséges a párhuzamos erők eredőjének meghatározásához.

ERŐ ÉS ERŐPÁR EREDŐJE

Egyenértékűség:

$$(F; M) \doteq R$$

Vetületi egyenlet:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F = R$$

Az eredő nagysága a megadott erővel azonos.

Nyomatéki egyenlet:

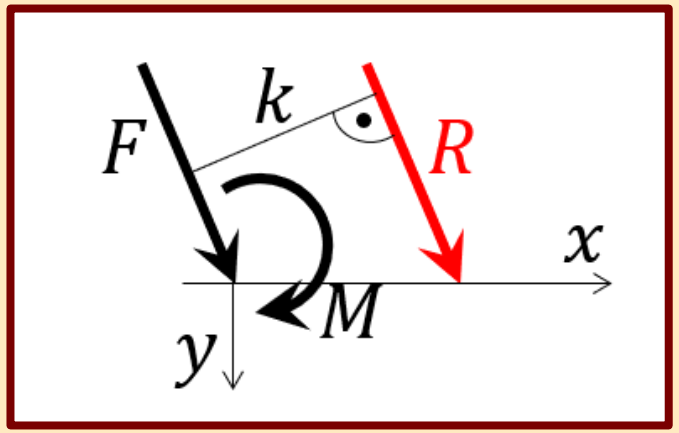
$$\sum_{i=1}^{n} M_i{}^0 = M = R \cdot k \quad \rightarrow k = \frac{M}{R}$$

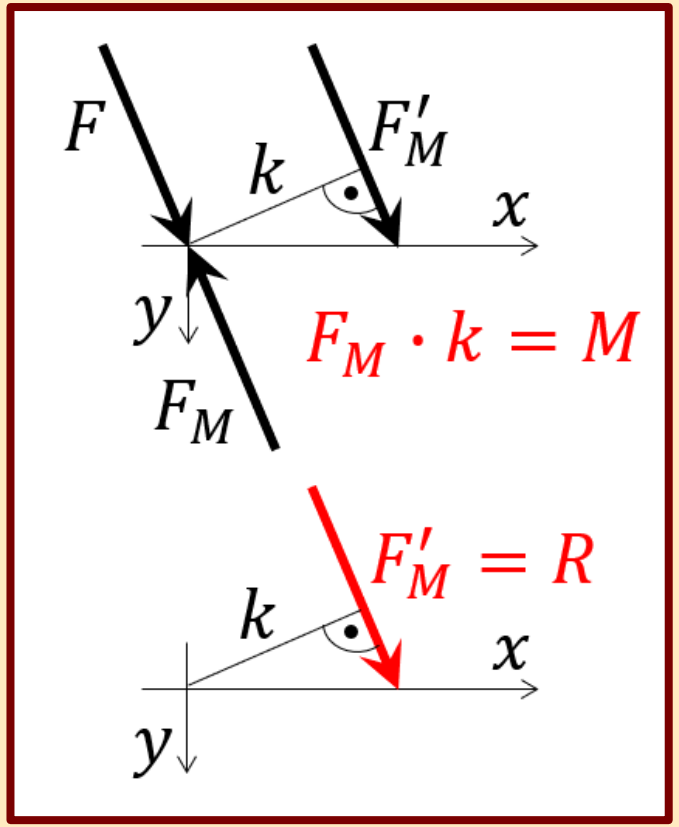
Az eredőnek a nyomaték hatását is helyettesítenie kell. Ott helyezkedik el, ahol a megadott nyomatékkal azonos értéket forgat.

A nyomatékot erőpárrá alakítva, az eredő az axiómák segítségével is meghatározható.

$$(F_M; F'_M) \doteq M \qquad (F; F_M; F'_M) \doteq R$$

$$(F; F_M) \doteq 0 \qquad F'_M \doteq R$$





ÁLTALÁNOS DINÁMRENDSZER EREDŐJE

Egyenértékűség:

$$(F_1; F_2; F_3; F_4; M_1; M_2) \doteq R$$

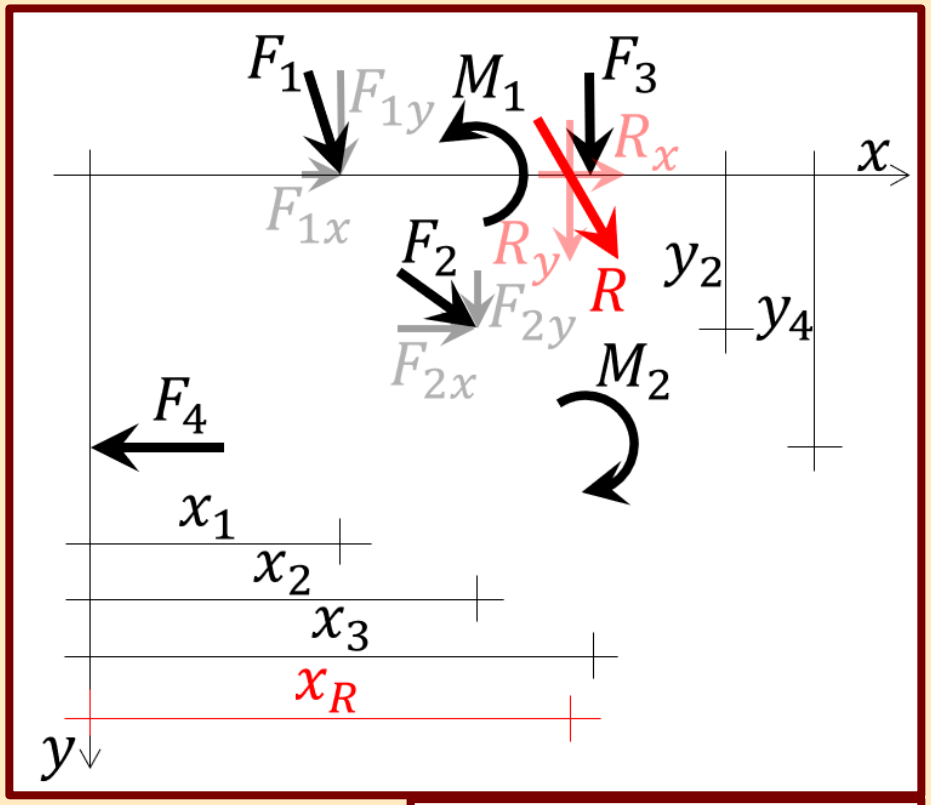
Vetületi egyenletek:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} - F_4 = R_x$$

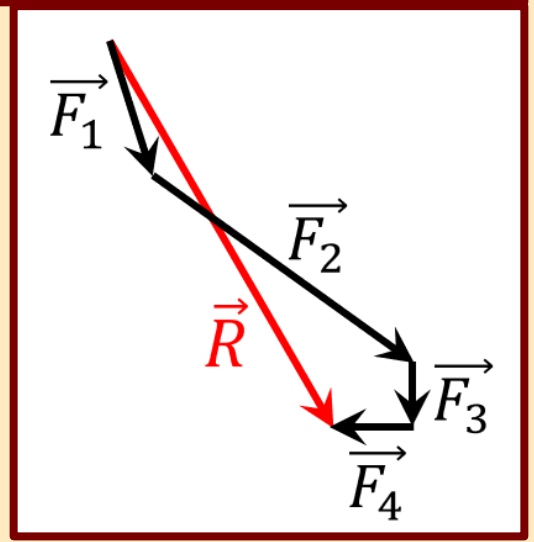
$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_3 = R_y$$

Eredő nagysága és hajlásszöge:

$$R = \sqrt{R^2{}_x + R^2{}_y} \qquad \tan \alpha_R = \frac{|R_y|}{|R_x|}$$



A két vetületi egyenlet felírásával az eredő két vetületét kapjuk meg, amelyek az erőrendszer tengelyirányú eltoló hatásait helyettesítik. A nyomatékok csak elfordító hatással rendelkeznek, ezért a vetületi egyenletekben nem szerepelnek. Az erőknek és az eredőnek egy zárt, nyílütközéses vektorsokszöget kell alkotniuk léptékhelyesen felrajzolva.



ÁLTALÁNOS DINÁMRENDSZER EREDŐJE

Nyomatéki egyenlet:

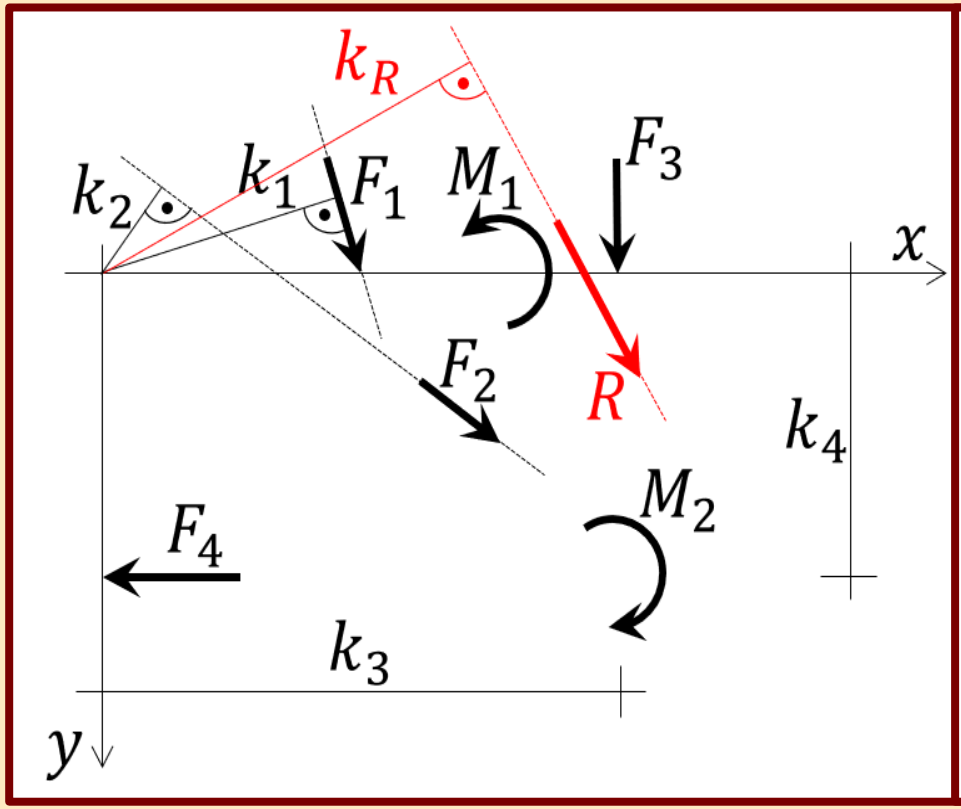
$$\sum_{i=1}^{n} M_i{}^0 = F_1 \cdot k_1 + F_2 \cdot k_2 + F_3 \cdot k_3 + F_4 \cdot k_4 - M_1 + M_2 = R \cdot k_R \qquad \rightarrow k_R$$

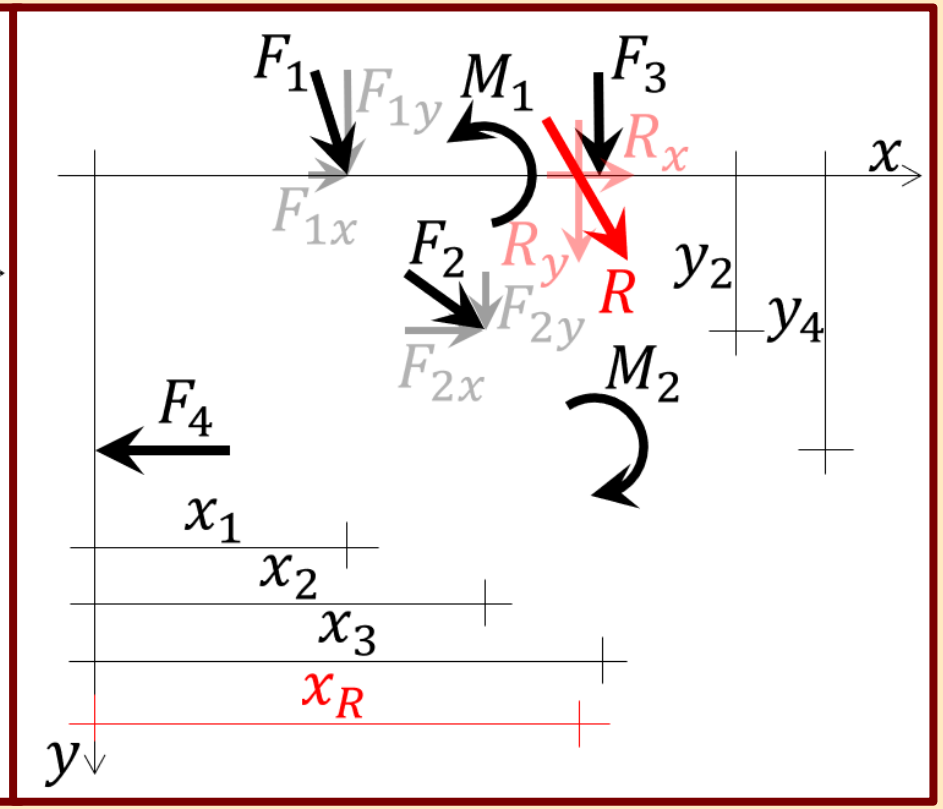
Nyomatéki egyenlet az erők összetevőivel:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i{}^0 = F_{1y} \cdot x_1 + F_{2y} \cdot x_2 - F_{2x} \cdot y_2 + F_3 \cdot x_3 + F_4 \cdot y_4 - M_1 + M_2 = R_y \cdot x_R$$

$$\rightarrow x_R$$

A nyomatéki egyenlet felírásával az eredő helyét kapjuk meg. (k_R az eredő távolsága az origótól, x_R pedig az eredő x tengellyel alkotott metszésp.-jának koordinátája.)





AZ EREDŐ ESETEI

Az erőrendszer hatásait az egyes egyenletek segítségével vesszük számításba. Az egyenletek eredményeinek függvényében az eredőnek többféle esete lehetséges:

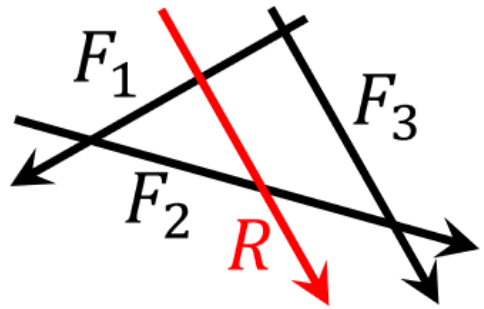
- Erő (eltoló és elfordító hatású is), ha:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} \neq 0$$

és/vagy

$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} \neq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{\,0} \neq 0$$



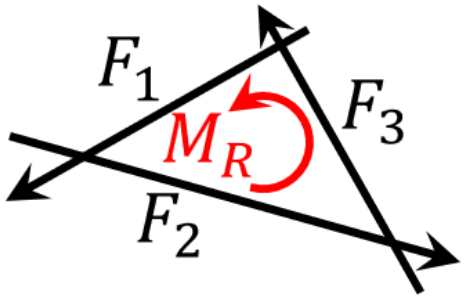
$$(F_1; F_2; F_3) \doteq R$$

- Erőpár (csak elfordító hatású), ha:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{\,0} \neq 0$$



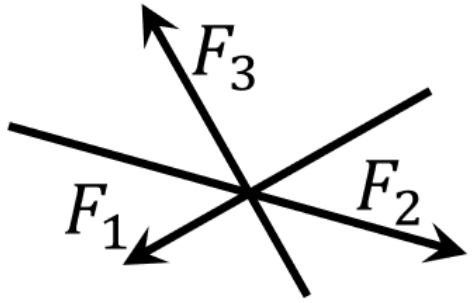
$$(F_1; F_2; F_3) \doteq M_R$$

- Zéruserő (eltoló és elfordító hatással nem rendelkező, másnéven egyensúly), ha:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = 0$$

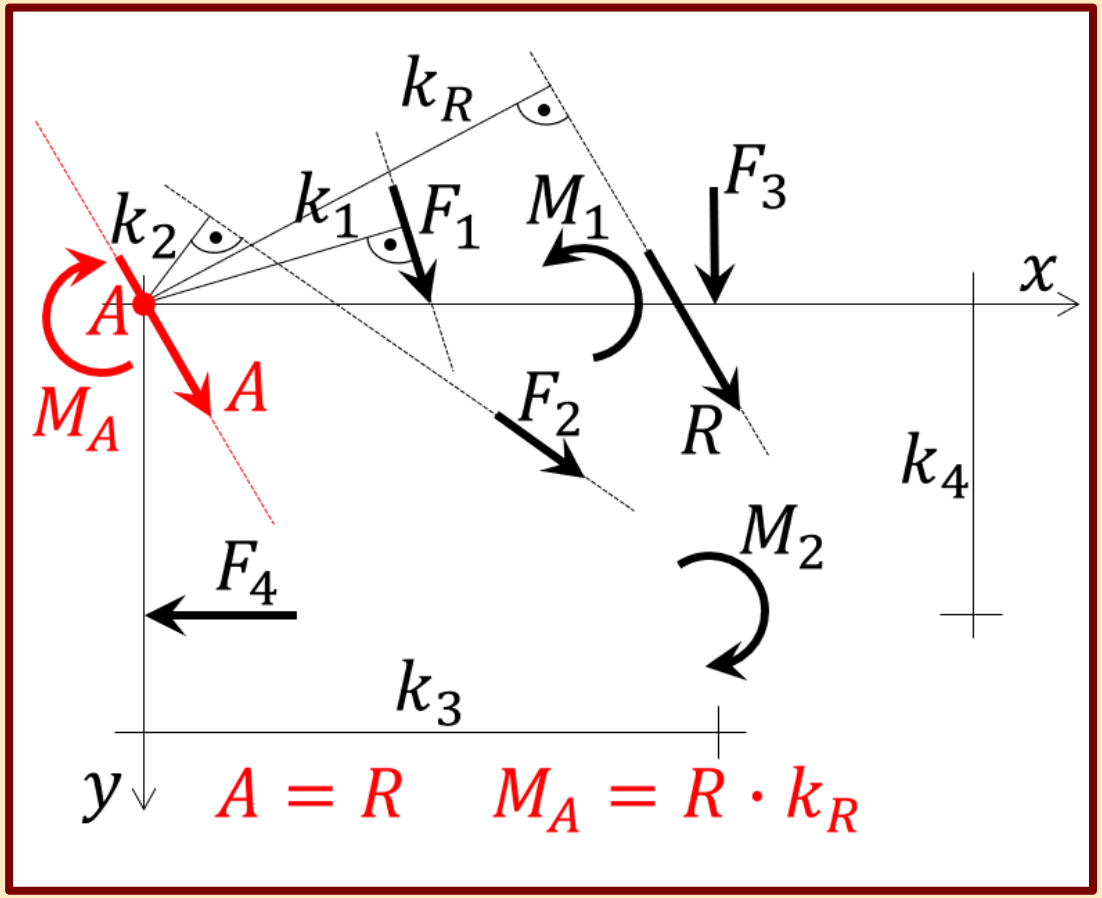
$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{\,0} = 0$$



$$(F_1; F_2; F_3) \doteq 0$$

PONTRA REDUKÁLÁS

- Az erőrendszer helyettesítését az eddigiektől eltérően egy megadott pontra vonatkoztatva kell elvégeznünk.
- Az erőrendszert vetületeivel helyettesítő, a ponton keresztül haladó erő viszont a nyomatéki helyettesítést nem tudja megoldani kar hiányában, ezért azt egy erre a célra felvett nyomaték tudja ellátni. Ezért a pontra redukálás nem más mint az erőrendszer adott ponton átmenő erővel és erőpárral történő helyettesítése.



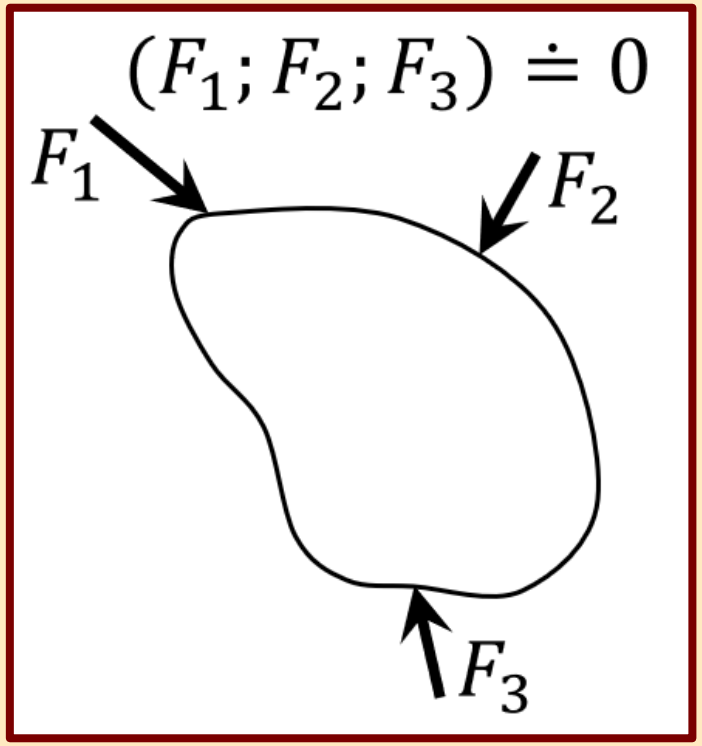
Egyenértékűség: $(F_1; F_2; F_3; F_4; M_1; M_2) \doteq (\mathrm{A}; M_A)$

Egyenletek: $\left.\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{n} F_{ix} = A_x \\ \sum_{i=0}^{n} F_{iy} = A_y \end{array}\right\} \rightarrow \mathrm{A} = \sqrt{A^2{}_x + A^2{}_y}; \quad \tan\alpha_A = \frac{|A_y|}{|A_x|}$

$\sum_{i=1}^{n} M_i{}^0 = M_A$

SÍKBELI ERŐRENDSZEREK EGYENSÚLYOZÁSA

- Az egyensúlyi erőrendszer minden hatásában zérus értékű, a test amelyre működik nyugalomban marad.
- Az egyensúly meglétét számítással is igazolhatjuk:
  - Eltoló hatás nullértékűségének biztosítása : ha az erőrendszer koordinátatengelyekkel alkotott erővetületeinek összege zérussal egyenlő.
    Vetületi egyenletek: $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$
  - Elfordító hatás nullértékűségének biztosítása: ha az erőrendszer a sík valamely pontjára meghatározott nyomatékainak összege zérussal egyenlő.
    Nyomatéki egyenlet: $\sum_{i=1}^{n} M_i{}^0 = 0$



- Az egyensúly biztosításához tehát három független egyensúlyi (statikai) egyenlet megoldása szükséges. A vetületi egyenletek egyike, vagy mindegyike kicserélhető nyomatéki egyenletekkel bizonyos feltételek mellett.

EGYENSÚLYOZÁS EGY DINÁMMAL

- Egyes erőrendszerek esetén nekünk kell biztosítanunk az egyensúlyt az erőrendszerhez hozzáadott dinám segítségével.
- Az erőrendszereket helyettesítő dinám ellentettje lesz az egyensúlyozó dinám.

$$(F_1; F_2; F_3; F_4; M_1; M_2) \doteq R \qquad (R; Q) \doteq 0 \qquad (F_1; F_2; F_3; F_4; M_1; M_2; Q) \doteq 0$$

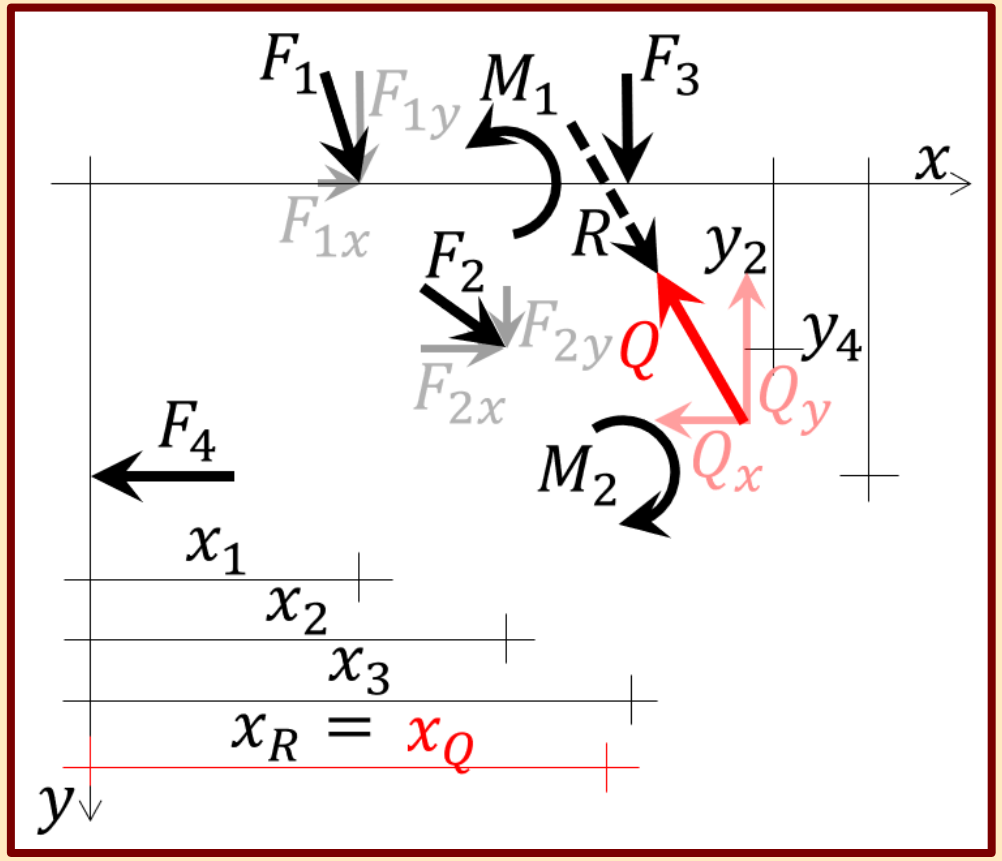
- Feladatunk egyetlen olyan dinám meghatározása, amelyet az erőrendszerhez hozzátéve, annak hatása zérus lesz.
- A vetületi egyenlet felírásakor a Q erő összetevőinek irányát pozitívnak feltételezzük, amelyet az eredmény előjele igazol (+ helyes).

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} + Q_x = 0 \quad \rightarrow Q_x$$

$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} + Q_y = 0 \quad \rightarrow Q_y$$

- A nyomatéki egyenlet felírásakor az x_Q távolság előjelét feltételezzük.

$$\sum_{i=1}^{n} M_i{}^0 + M_Q = \sum_{i=1}^{n} M_i{}^0 + Q_y \cdot x_Q = 0 \rightarrow x_Q$$



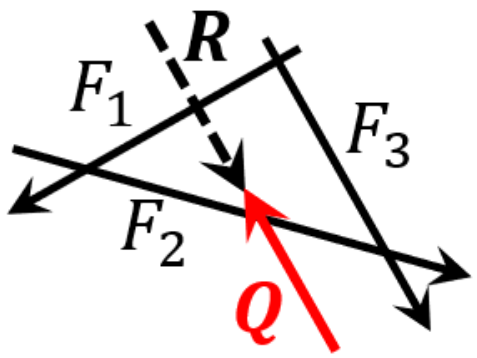
EGYENSÚLYOZÁS ESETEI

Az erőrendszerhez hozzáadott, annak egyensúlyát biztosító dinám nem csak erő lehet:

- Erő, ha:

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} = 0 \rightarrow Q_x \neq 0$$
$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = 0 \rightarrow Q_y \neq 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{\,0} = 0 \rightarrow x_Q \neq 0$$

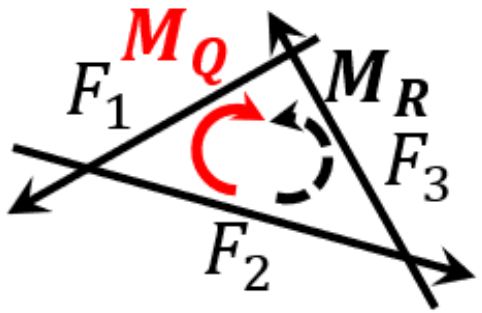
és/vagy



$$(F_1; F_2; F_3) \doteq R$$
$$(F_1; F_2; F_3; Q) \doteq 0$$
$$(R; Q) \doteq 0$$

- Erőpár, ha:

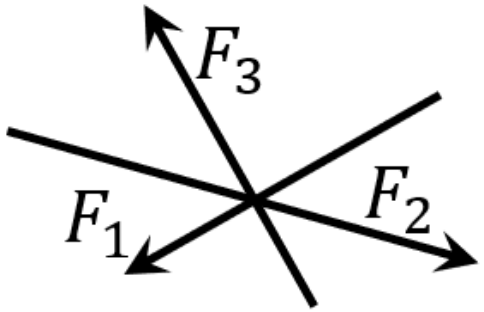
$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} = 0 \rightarrow Q_x = 0$$
$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = 0 \rightarrow Q_y = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{\,0} = 0 \rightarrow M_Q \neq 0$$



$$(F_1; F_2; F_3) \doteq M_R$$
$$(F_1; F_2; F_3; M_Q) \doteq 0$$
$$(M_R; M_Q) \doteq 0$$

- A kiindulási erőrendszer egyensúlyban van hozzáadott dinám nélkül, ha:

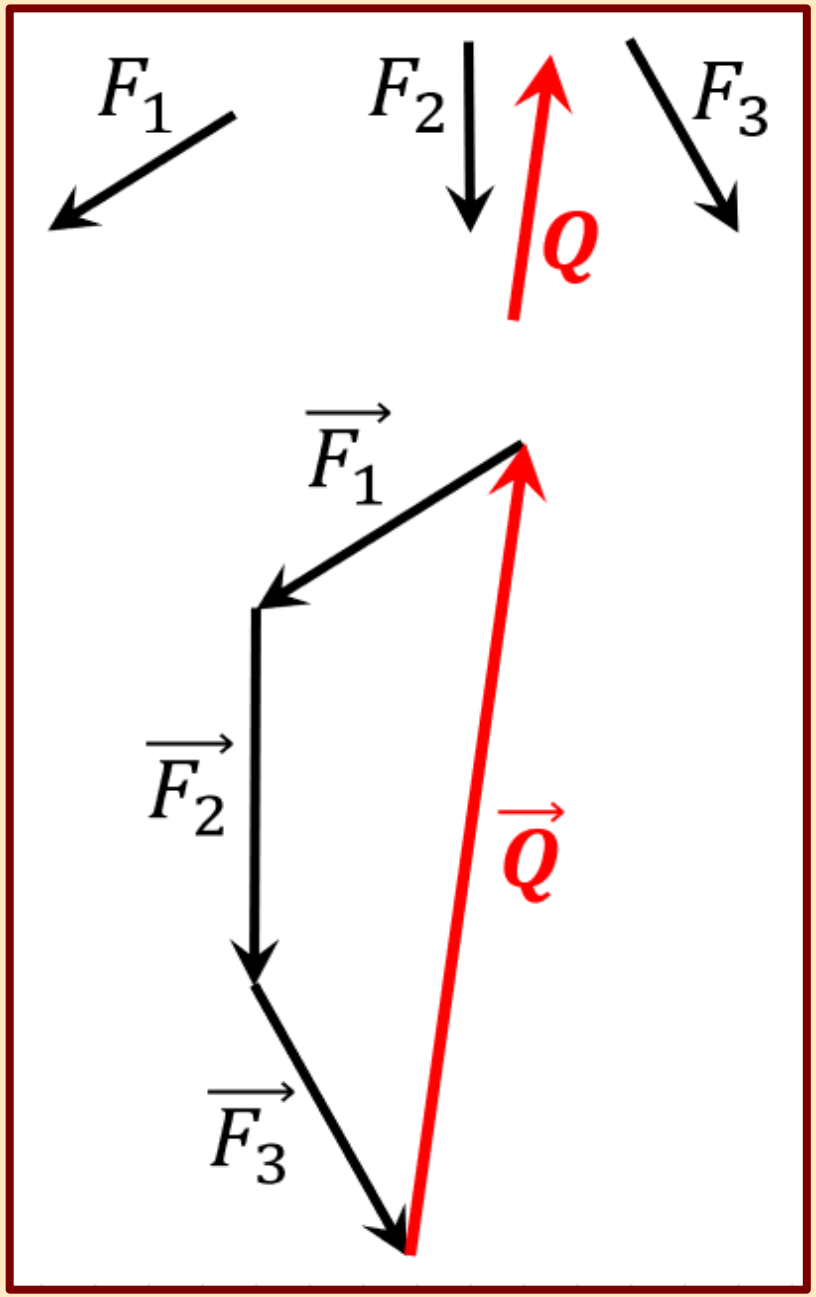
$$\sum_{i=0}^{n} F_{ix} = 0 \rightarrow Q_x = 0$$
$$\sum_{i=0}^{n} F_{iy} = 0 \rightarrow Q_y = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{\,0} = 0 \rightarrow M_Q = 0$$



$$(F_1; F_2; F_3) \doteq 0$$
$$R \doteq 0$$
$$Q \doteq 0$$

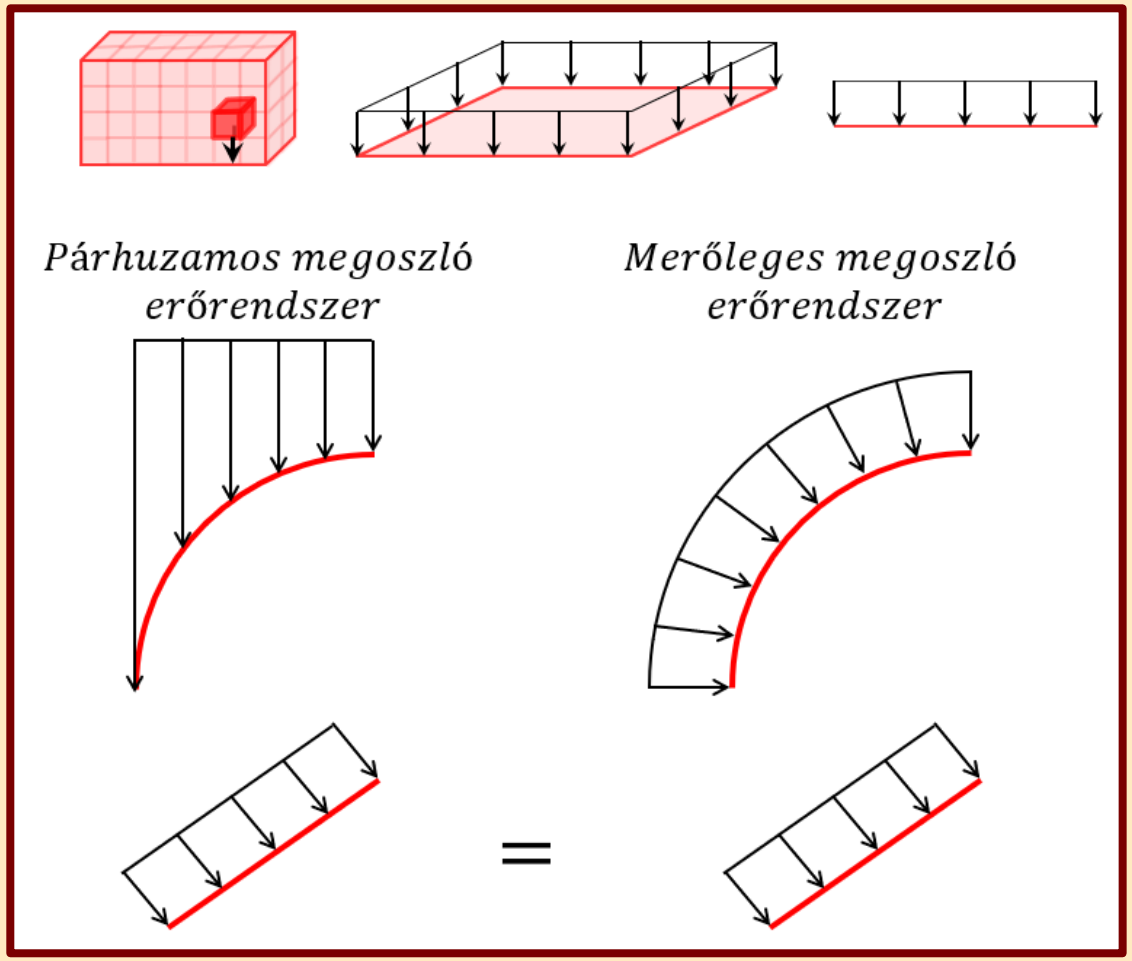
EGYENSÚLYOZÁS SZERKESZTÉSSEL

- Az erőrendszert egyensúlyozó erőt szerkesztéssel is előállíthatjuk:
- Az egyensúlyozó erő nagyságát az erőrendszer erőiből előállított vektorsokszög segítségével adhatjuk meg: ha az erővektorokat egy választott lépték alapján nyílfolytonosan felrajzoljuk, az egyik erő végpontjából indítva a következő erő kezdőpontját, akkor az utolsó erő végpontját az első erő kezdőpontjával összekötve az egyensúlyozó erőt kapjuk meg, amely a vektorábrát így zárni fogja.
- Az egyensúlyozó erő helyét a kötélsokszög-szerkesztéssel kaphatjuk meg (nem tanuljuk).



MEGOSZLÓ ERŐRENDSZEREK

- A megoszló erőrendszerek hatásukat nem egy pontban fejtik ki, hanem térfogat, felület vagy vonal mentén.
- Síkbeli erőrendszerek kapcsán a vonalmenti megoszló erőrendszerekkel foglalkozunk (legtöbbször jó közelítés a valós esetekben): a vonalhossz mentén rendel minden ponthoz egy intenzitásvektort (folytonos intenzitásfüggvény).
- Párhuzamos megoszló erőrendszer: az intenzitásvektorok párhuzamosak egymással, csak a nagyságuk változik a vonal mentén.
- Merőleges megoszló erőrendszer: az intenzitásvektorok a vonalra merőlegesek, a nagyságuk és irányuk is változik a vonal mentén.



PÁRHUZAMOS MEGOSZLÓ ERŐRENDSZEREK

- A megoszló erőrendszert számításainkban eredőjével helyettesítjük.
- A Δx szakasz eredője:

$$\Delta R = q(x) \cdot \Delta x$$

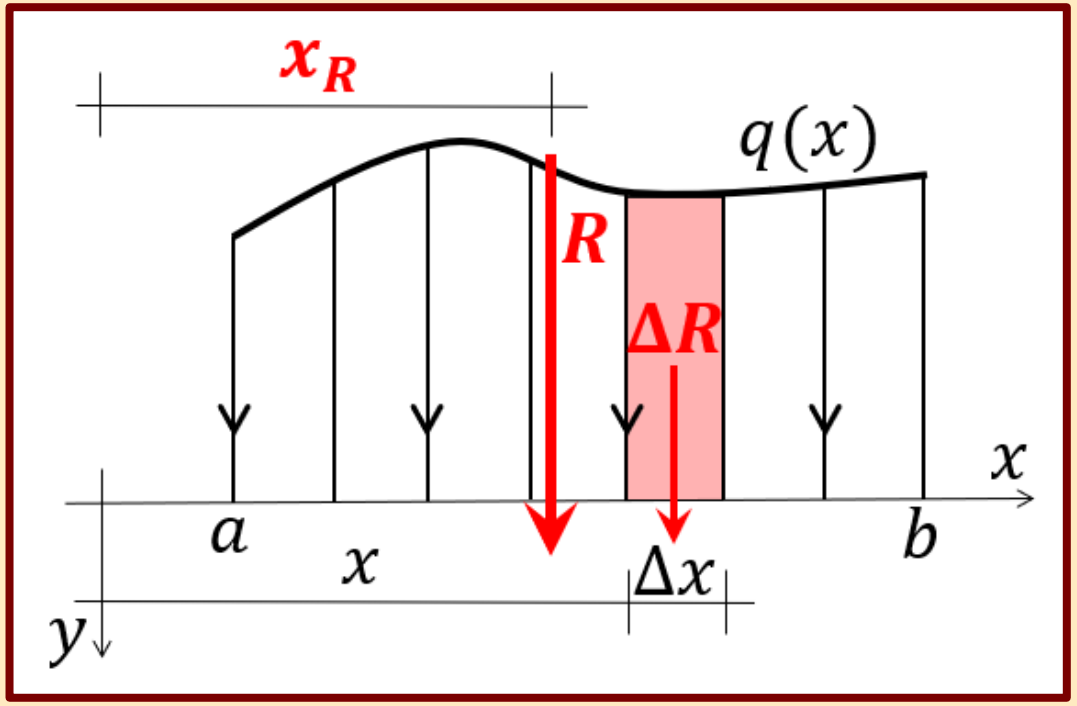
- A teljes (a-b) szakasz eredője:

$$R = \sum_a^b \Delta R = \sum_a^b q(x) \cdot \Delta x$$

- Az eredő a felosztás finomításával:

$$R = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b q(x) \cdot \Delta x = \int_a^b q(x) \cdot dx$$

Az eredő nagysága a teherábra területével egyezik meg.



- Az eredő helyének meghatározása a nyomatéki helyettesítés alapján:

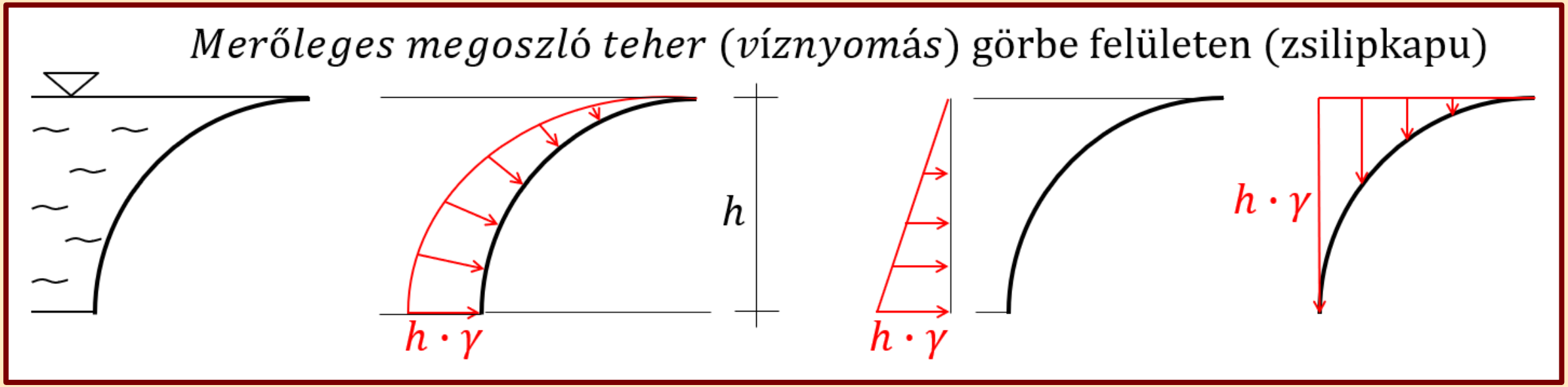
$$\sum_a^b M^0 = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b x \cdot q(x) \cdot \Delta x = \int_a^b x \cdot q(x) \cdot dx = R \cdot x_R$$

$$x_R = \frac{\sum_a^b M^0}{R} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b x \cdot q(x) \cdot \Delta x}{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b q(x) \cdot \Delta x} = \frac{\int_a^b x \cdot q(x) \cdot dx}{\int_a^b q(x) \cdot dx}$$

Az eredő helye a teherábra súlypontjával esik egybe.

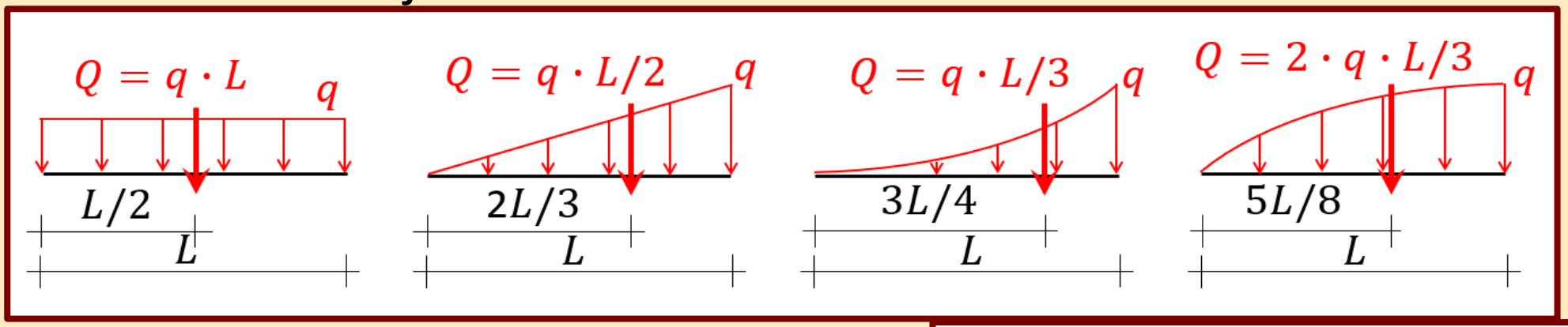
MERŐLEGES MEGOSZLÓ ERŐRENDSZEREK

- A merőleges megoszló erőrendszerek működése leginkább akkor érzékelhető, ha nem egyenes vonal mentén fejtik ki hatásukat. Görbe vonal esetén viszont a terhet kezelhetőbbé kell alakítanunk a könnyebb számíthatóság érdekében. A teherintenzitást a kiindulási görbe vetületi hosszaira vetítjük, amely által két párhuzamos (függőleges és vízszintes) megoszló erőrendszerre bontjuk a kezdeti terhet. A kapott erőrendszerek eredője az eddigiek alapján meghatározható.
- A legjellemzőbb ilyen jellegű valós teher a víznyomás és a szélteher.



MEGOSZLÓ ERŐRENDSZEREK EREDŐJE

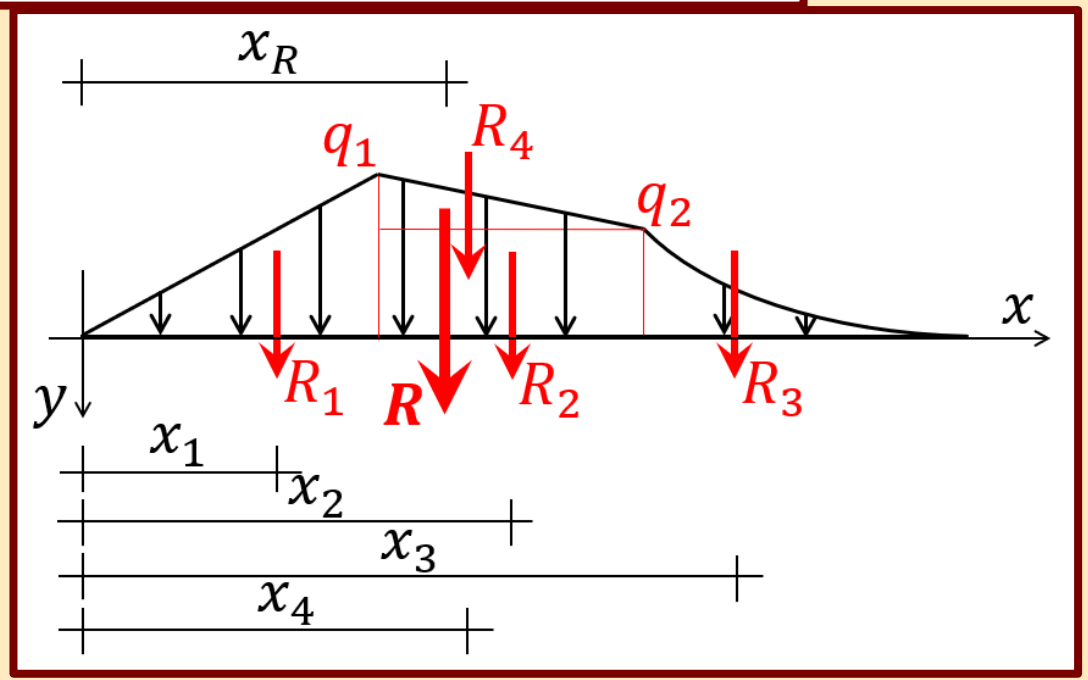
- A megoszló erőrendszerek eredője összetett teherintenzitási ábra esetén meghatározható az ábra elemi síkidomokra bontott részterületeinek összegéből.
- Elemi síkidomok eredője:



- Összetett teherábra eredője:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

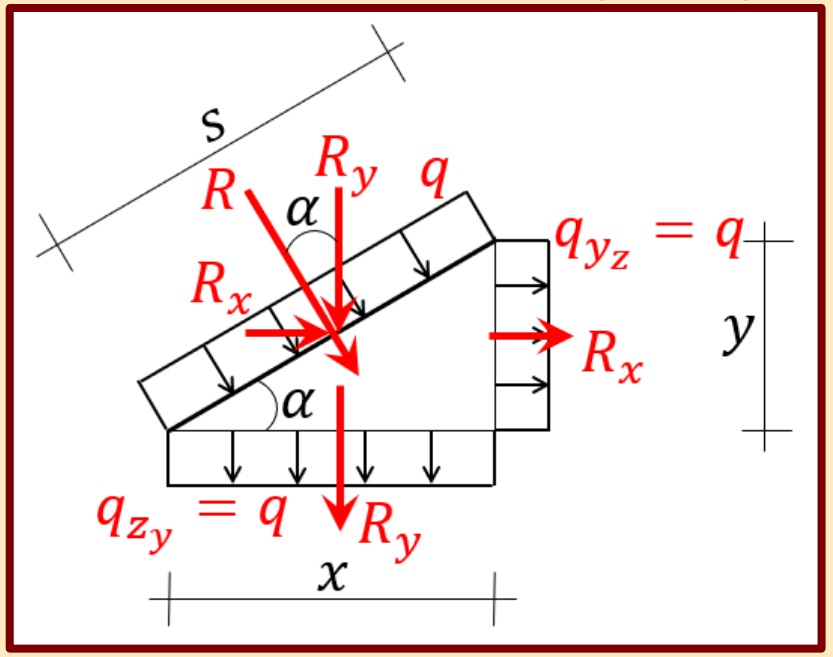
$$M^0 = \sum_{i=1}^{n} R_i \cdot x_i = R \cdot x_R \quad \rightarrow x_R$$

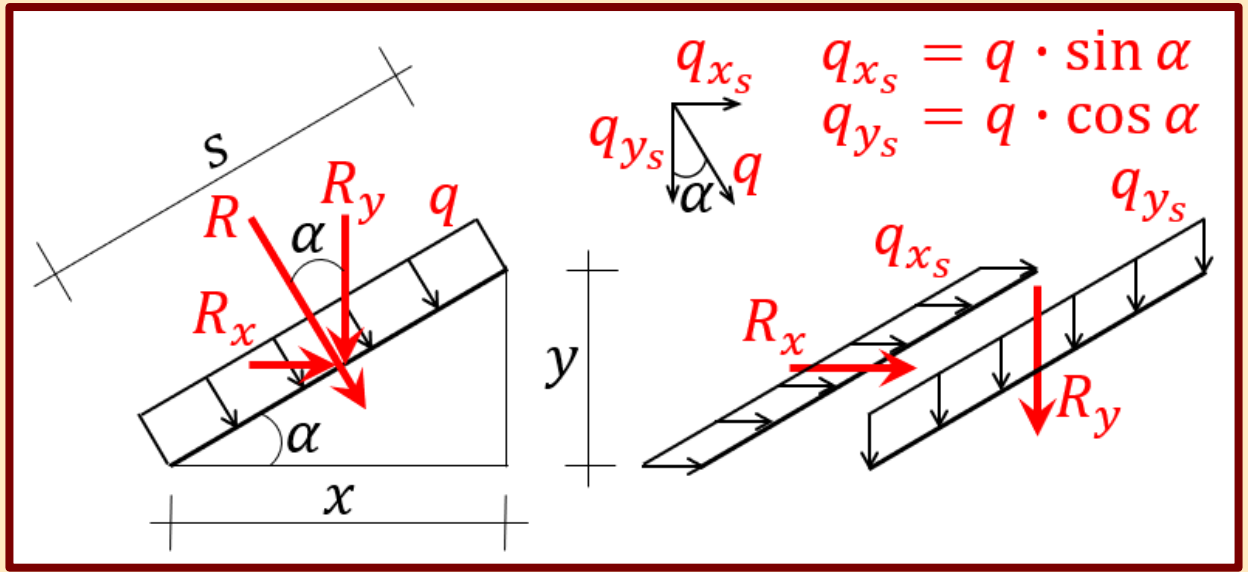


MEGOSZLÓ ERŐRENDSZEREK VETÜLETEI

- A nem a koordinátatengelyek irányába eső megoszló erőrendszert ezen irányokba számításba vehetjük az eredő összetevőkre bontásával, vagy az erőrendszer vetületi intenzitásainak, illetve intenzitásvetületeinek segítségével.
- Az erőrendszer vetületi intenzitásai:

$$R = q \cdot s$$
$$R_y = R \cdot \cos\alpha = q \cdot s \cdot \cos\alpha$$
$$R_y = q \cdot x$$
$$R_x = R \cdot \sin\alpha = q \cdot s \cdot \sin\alpha$$
$$R_y = q \cdot y$$





- Az erőrendszer intenzitásvetületei:

$$R_y = R \cdot \cos\alpha = q \cdot s \cdot \cos\alpha$$
$$R_y = q_{ys} \cdot s$$
$$R_x = R \cdot \sin\alpha = q \cdot s \cdot \sin\alpha$$
$$R_x = q_{xs} \cdot s$$

Tartószerkezetek mechanikája I.

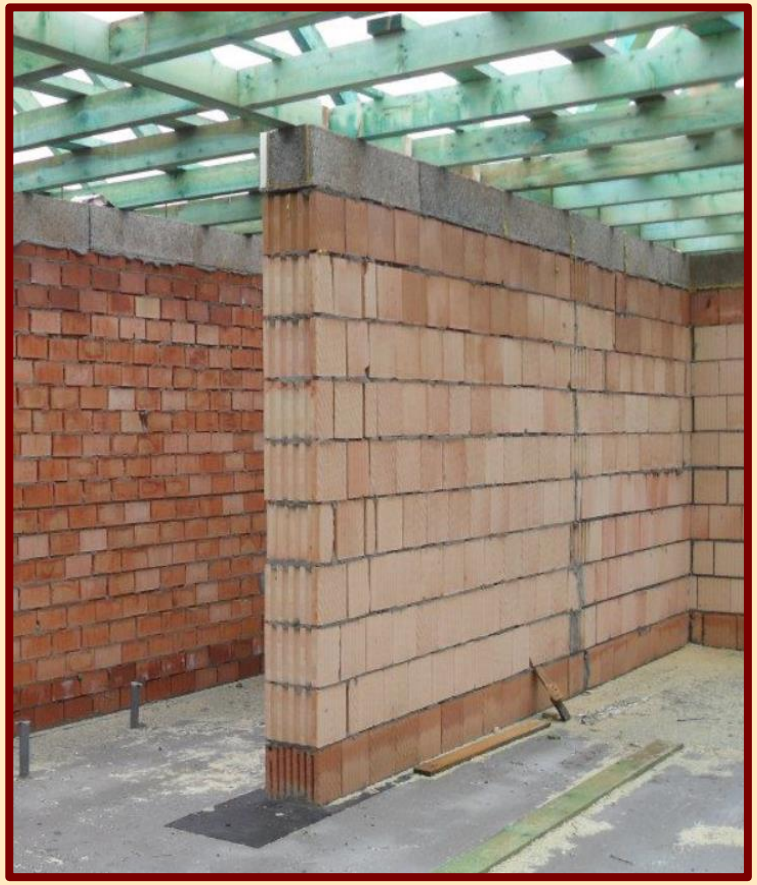
3.

Síkbeli tartószerkezetek: egyszerű tartók

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

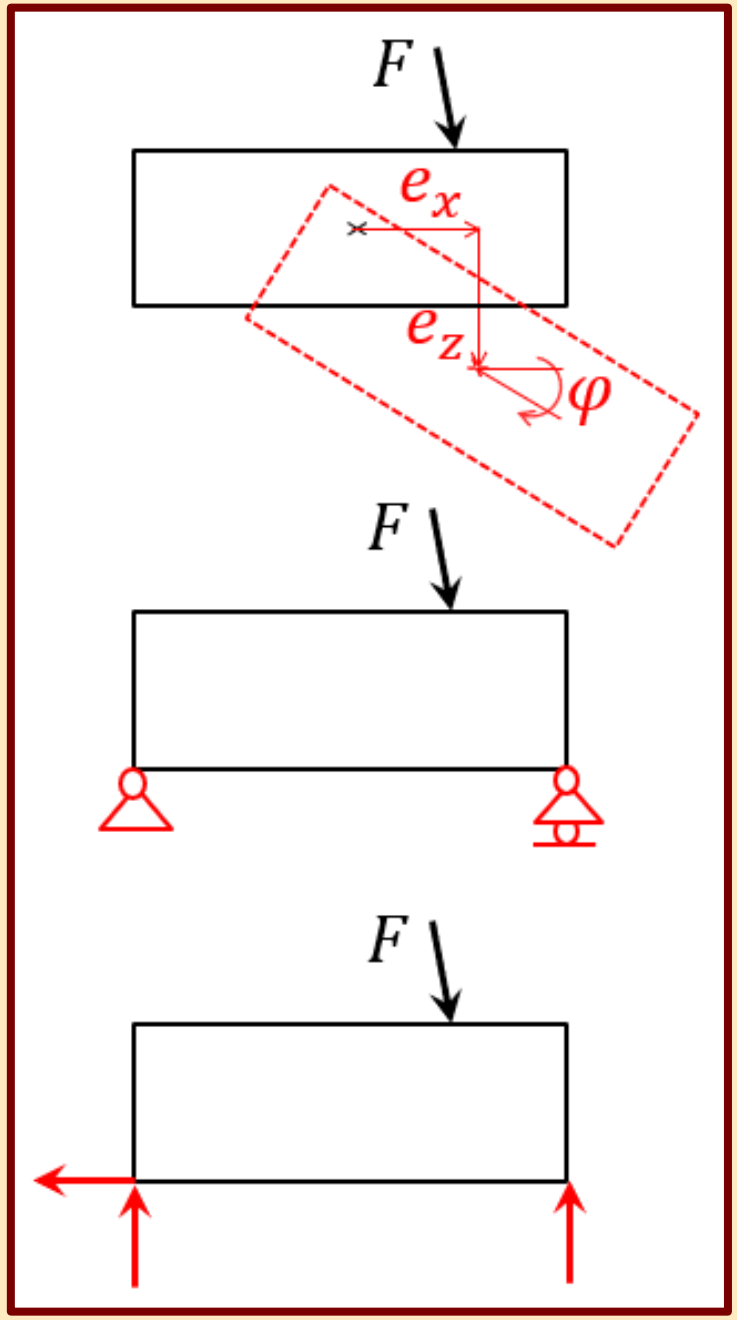
TARTÓSZERKEZETEK MEGHATÁROZÁSA

- Azokat a szerkezeteket, amelyek terhek elviselésére és annak továbbítására alkalmasak, tartószerkezeteknek nevezzük.
  (válaszfal → csak épületszerkezet, főfal → tartószerkezet is.)
- Ha a tartó és a rá ható teher egy közös síkban helyezkedik el, síkbeli tartókról beszélünk.
- A tartóknak különböző követelményeknek (pl. szilárdsági, merevségi, állékonysági) kell megfelelniük.
- Rúdszerkezetekkel foglalkozunk, merev testként modellezve őket.
- Az egy merev testből álló szerkezeteket egyszerű tartóknak hívjuk.



TARTÓSZERKEZETEK KÉNYSZEREI

- A merev testek síkban három szabadsági fokkal rendelkeznek, két egymásra merőleges eltolódást és egy síkbeli elfordulást szenvedhetnek a rájuk ható terhek hatására.
- Feladatunk a szerkezetek nyugalomban tartása, vagyis elmozdulás-mentességre kényszerítése, amelyet általában erre alkalmazott egyszerű kapcsolóelemekkel, szerkezeti kialakításokkal, másnéven kényszerekkel érünk el.
- A kényszerek a test egyes pontjainak elmozdulásait korlátozzák, bennük pedig a test egyensúlyát biztosító kényszererők (támaszerők, reakcióerők) keletkeznek, amelyek a megakadályozott elmozdulásokkal azonos jellegűek és irányúak lesznek.

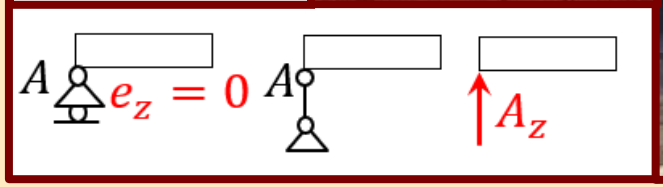


A KÉNYSZEREK FOKSZÁMA

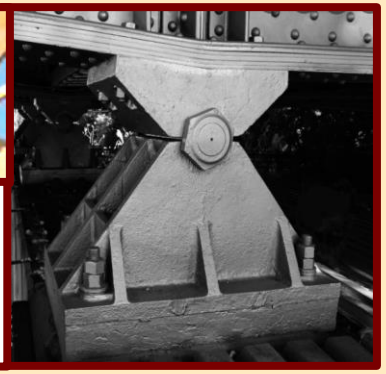
- A kényszerek által korlátozott elmozdulás-összetevők, és az ezzel megegyező számú bennük keletkező kényszererők számát a kényszerek fokszámának nevezzük.
- Elsőfokú kényszerek: egy kényszererő felvételére, és ennek megfelelő jellegű és irányú eltolódás megakadályozására alkalmas.
- Másodfokú kényszerek: két kényszererő felvételére, és ezeknek megfelelő jellegű és irányú eltolódások megakadályozására alkalmas.
- Harmadfokú kényszerek: két kényszererő és egy kényszernyomaték felvételére, és ezeknek megfelelő jellegű és irányú eltolódások és elfordulás megakadályozására alkalmas.

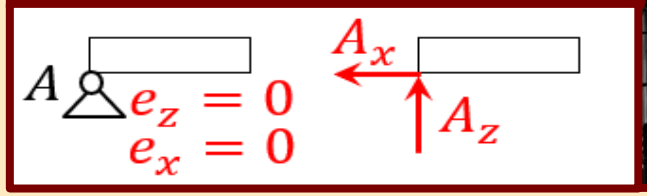
Görgős támasz

Támasztó-rúd

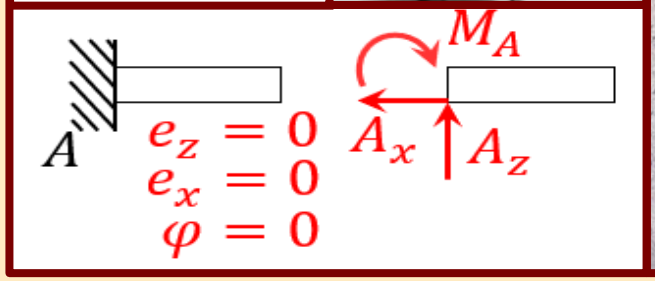


Csuklós támasz



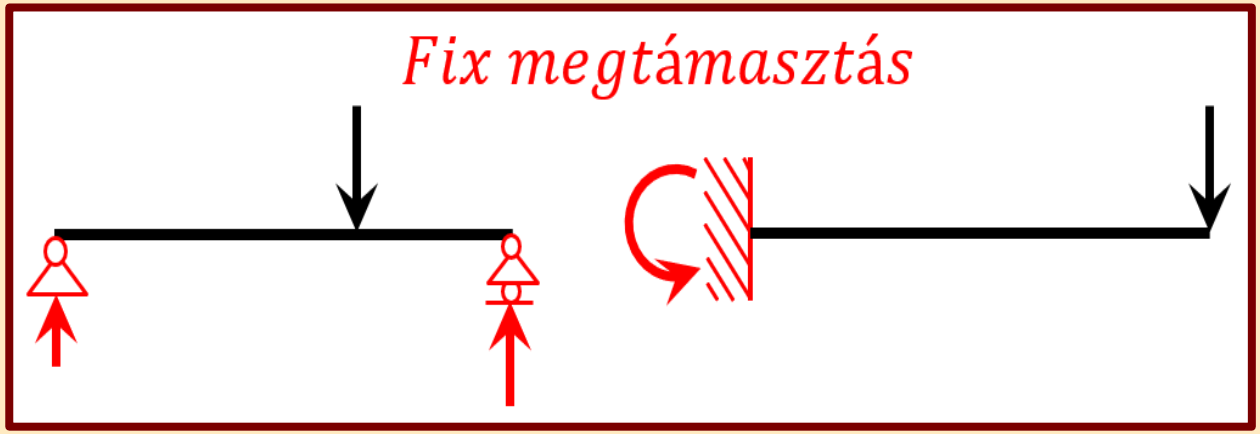


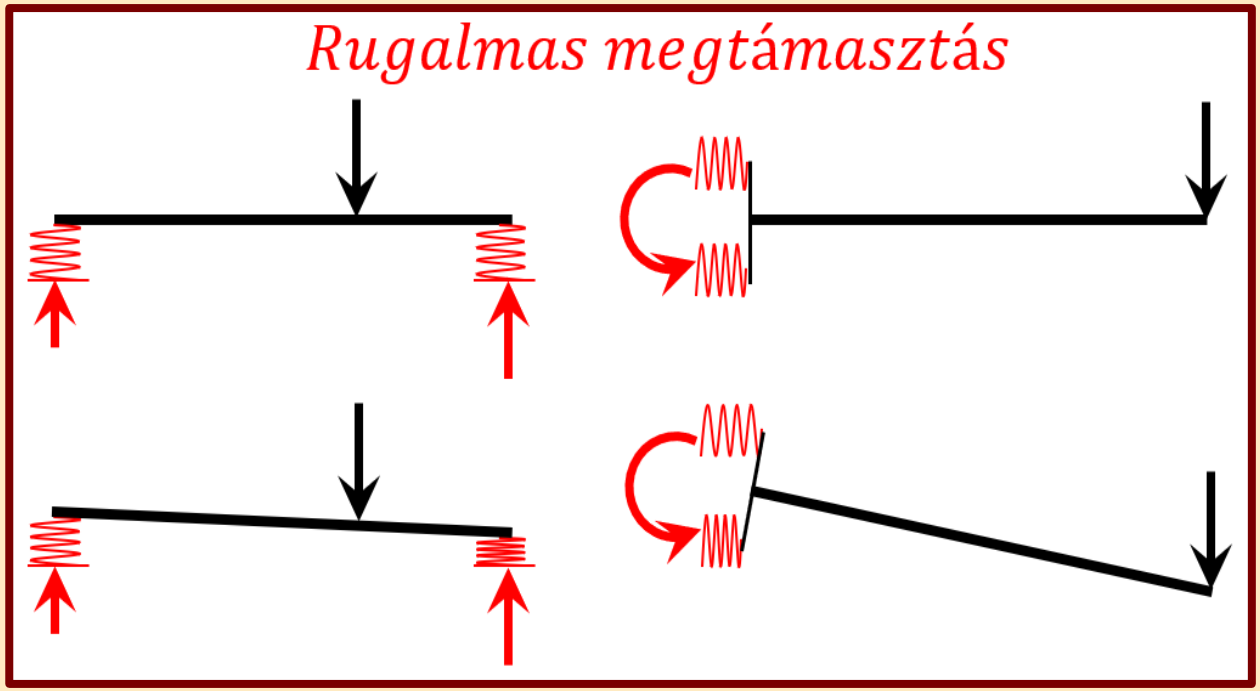
Befogás



A FIX ÉS RUGALMAS KÉNYSZEREK

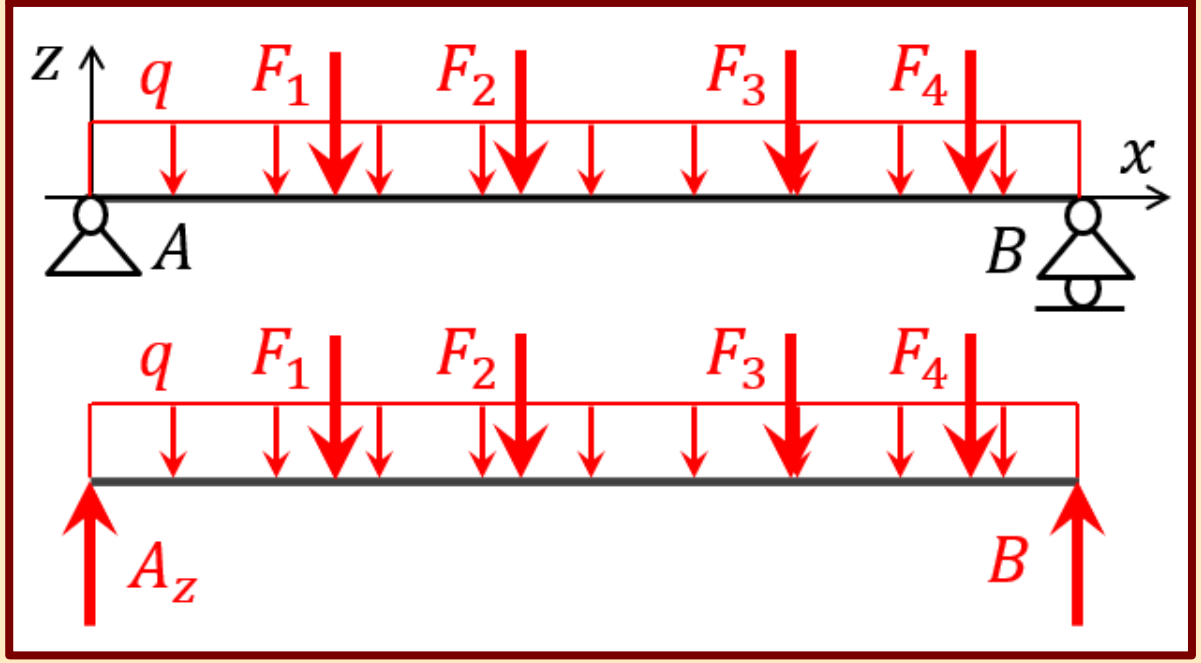
- Azokat a kényszereket, amelyekben a támaszerők-támasznyomatékok hatására irányukban nem keletkezik elmozdulás, fix megtámasztású kényszereknek nevezzük.
- Azokat a kényszereket, amelyekben a támaszerők-támasznyomatékok hatására a nagyságukkal arányos elmozdulás keletkezik irányukban, rugalmas megtámasztású kényszereknek nevezzük. A kialakuló elmozdulások a tartó viselkedését befolyásolják, nagyságuk a támasz rugómerevségétől függ.





STATIKAI VÁZ

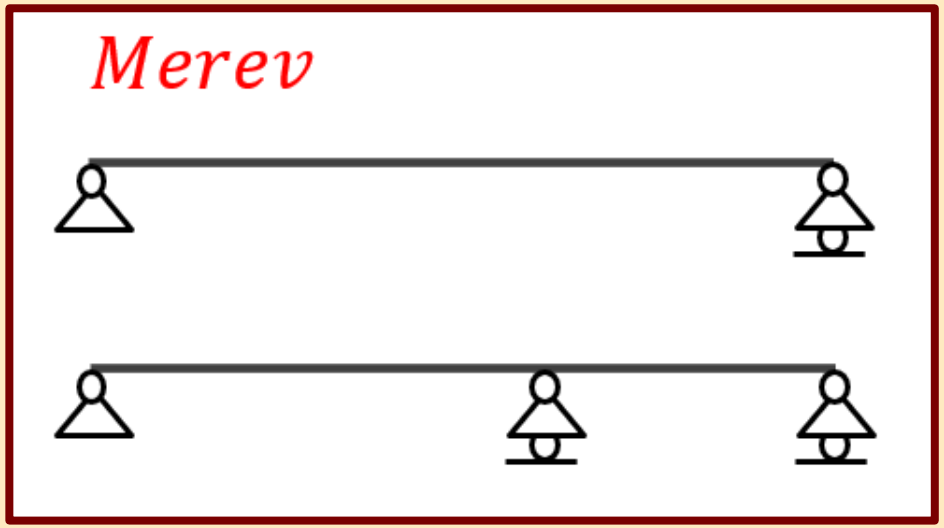
- A kényszerekkel megtámasztott, segítségükkel kialakított tartószerkezeteket a statikai vázukkal vesszük figyelembe számításainkban.
- A statikai vázat a modellalkotásnál tanultak figyelembevételével alakítjuk ki. A vizsgálandó rúdszerkezeteinket csak tengelyvonalukkal, a kényszereket pedig sematikus rajzaikkal ábrázoljuk a rá ható terhek megfelelő tehermodelljével.
- A tartó egyensúlyát és a terhelésre adott válaszfüggvényeit a statikai váz alapján vizsgáljuk egy felvett koordinátarendszerben.
- A terhelő erőket aktív, a támaszerőket passzív erőknek hívjuk.

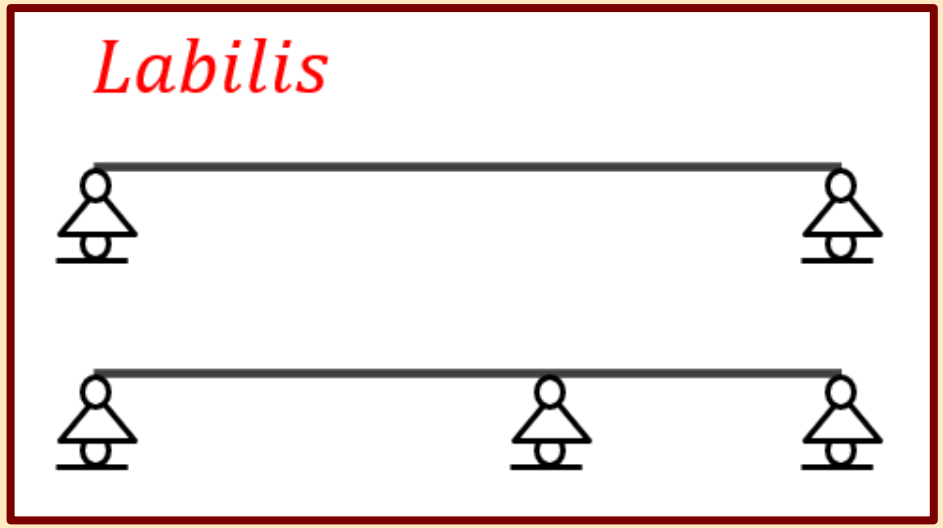


A MEGTÁMASZTOTTSÁG MINŐSÍTÉSE

MINŐSÍTÉS ELMOZDULÁSI LEHETŐSÉGEK ALAPJÁN

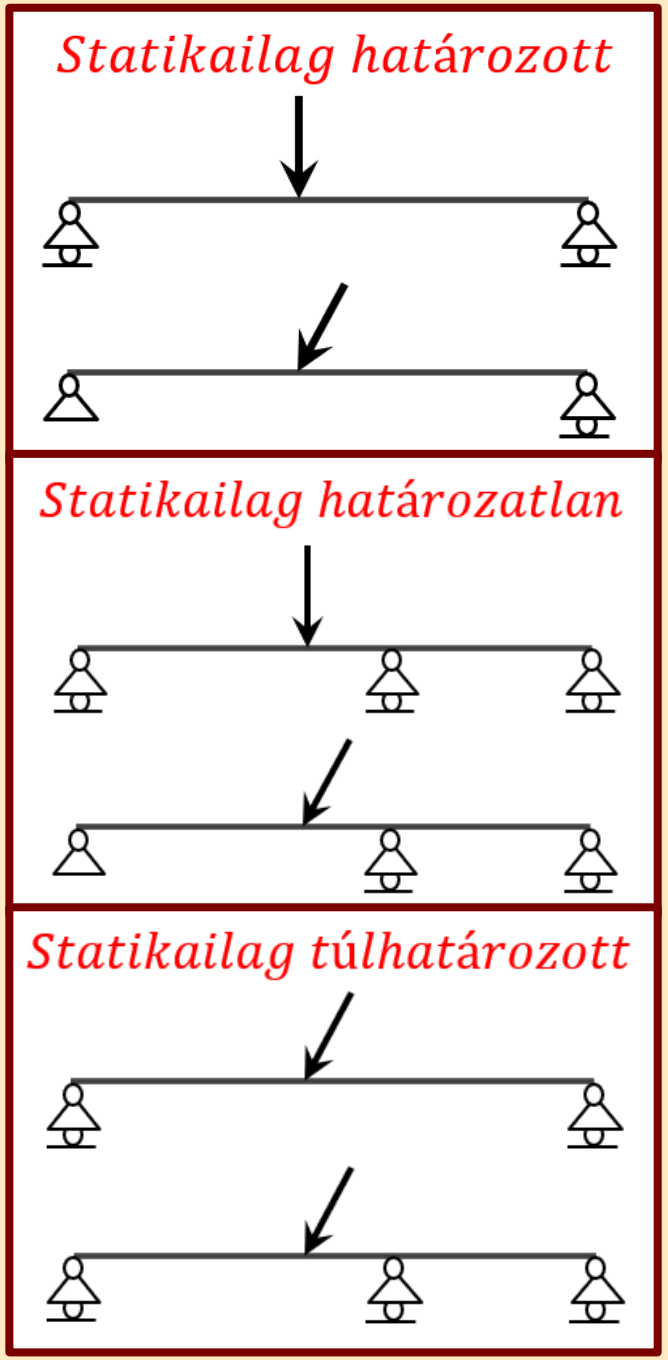
- A tartó elmozdulási lehetőségeit vizsgáljuk, vagyis azt, hogy a tartó bármely terhelési helyzetben megőrzi-e nyugalmát. A minősítést általánosan, a terhek ismerete nélkül végezzük el.
- Merev: tetszőleges teher mellett is nyugalomban marad a tartó, kialakul az egyensúly.
- Labilis: létezik legalább egy olyan teher, amelyre nem marad nyugalomban a tartó. Egyes terhelési esetben a labilis tartó is kerülhet nyugalomba, a rájuk ható erők pedig egyensúlyba.





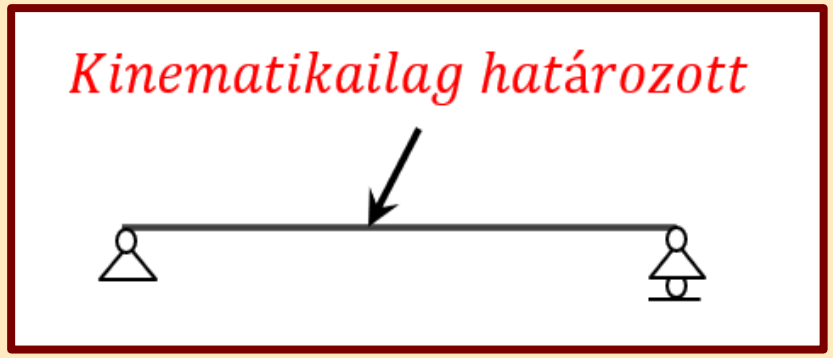
STATIKAI MINŐSÍTÉS

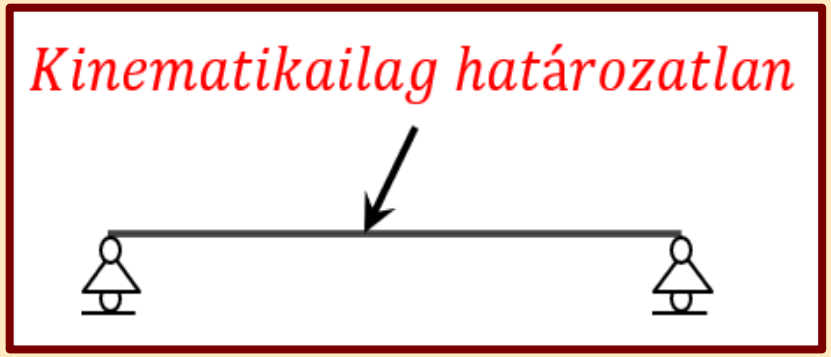
- A támaszerők számítási lehetőségeit vizsgáljuk, vagyis azt, hogy a tartó ismeretlen kapcsolati erői kiszámíthatóak-e a rendelkezésre álló statikai (egyensúlyi) egyenletekkel. A minősítést a terhek ismeretében végezzük el.
- Statikailag határozott : a kapcsolati erők meghatározására a statikai egyenletek elégségesek (ismeretlenek = statikai egyenletek).
- Statikailag határozatlan: a kapcsolati erők meghatározására a statikai egyenletek nem elégségesek, felhasználásukkal nincs egyértelmű megoldás (ismeretlenek > statikai egyenletek.).
- Statikailag túlhatározott: a kapcsolati erők meghatározására a statikai egyenletekkel nincs megoldás, nem jön létre egyensúly (ismeretlenek < statikai egyenletek).

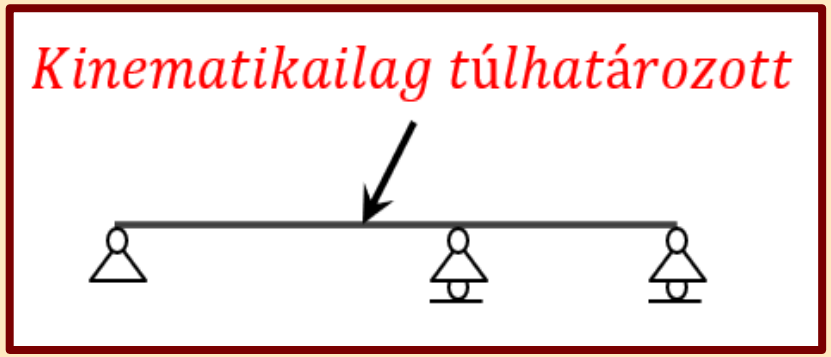


KINEMATIKAI MINŐSÍTÉS

- A támaszelmozdulások számítási lehetőségeit vizsgáljuk, vagyis azt, hogy a tartó ismeretlen kapcsolati mozgásai kiszámíthatóak-e a rendelkezésre álló kinematikai (geometriai) egyenletekkel.
- Kinematikailag határozott : a támaszelmozdulások meghatározására a kinematikai egyenletek elégségesek (ismeretlenek = kinem. egyenletek).
- Kinematikailag határozatlan: a támaszelmozdulások meghatározására a kinematikai egyenletek nem elégségesek, felhasználásukkal nincs egyértelmű megoldás (ismeretlenek > kinematikai egyenletek).
- Kinematikailag túlhatározott: a támaszelmozdulások meghatározására a kinematikai egyenletekkel nincs megoldás, nem jön létre geometriai folytonosság. (ismeretlenek < kinematikai egyenletek).





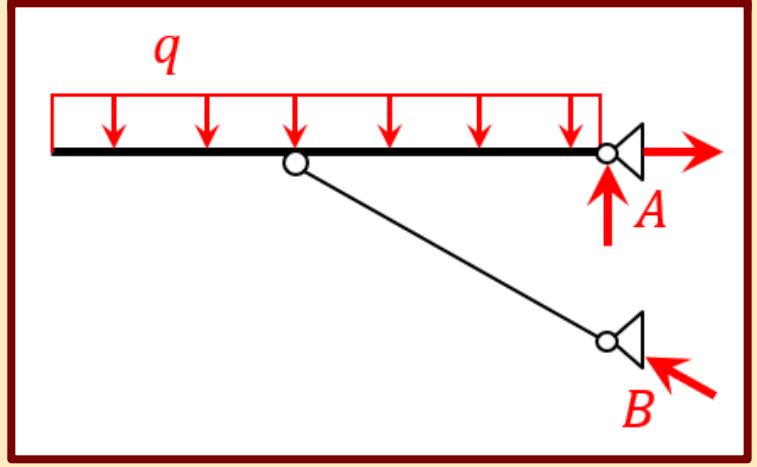


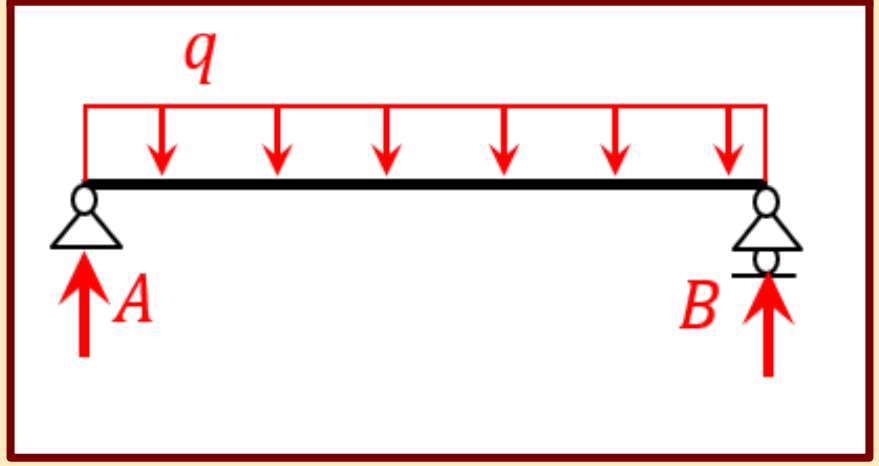
EGYSZERŰ TARTÓK TÍPUSAI

KÉTTÁMASZÚ TARTÓ

- Ha egy merev testet egy elsőfokú (görgős támasz vagy támasztórúd) és egy másodfokú kényszerrel (csuklós támasz) támasztunk meg, akkor kéttámaszú tartóról beszélünk.

- Statikai váz:

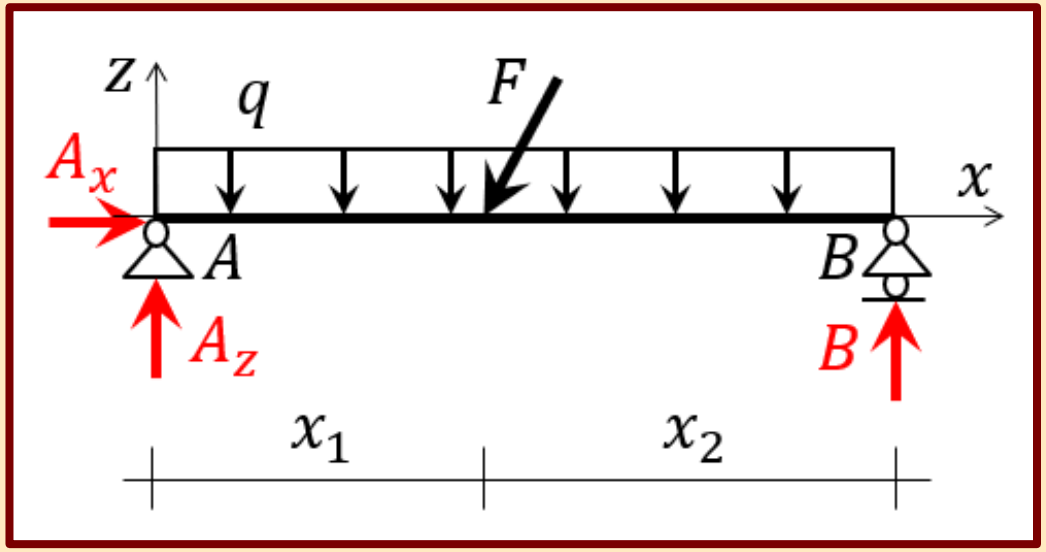




- Egyensúlyi kijelentés:

$$(Q; A; B) \doteq 0$$

KÉTTÁMASZÚ TARTÓ TÁMASZERŐI



- A tartó megtámasztása merev és statikailag határozott, vagyis a tartó elmozdulásmentes és a támaszerők a statikai egyenletekkel egyértelműen meghatározhatóak.
- Egyensúlyi kijelentés:

  $(F; Q; A; B) \doteq 0$
- Egyensúlyi egyenletek:

  $\sum M_i^A = F_z \cdot x_1 + q \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_2)/2 - B_z \cdot (x_1 + x_2) = 0 \quad \rightarrow B_z$

  $\sum F_{iz} = -F_z - q \cdot (x_1 + x_2) + A_z + B_z = 0 \quad \rightarrow A_z$

  A függőleges vetületi egyenlet helyett egy másik nyomatéki egyenlettel (A_x és B metszéspontjára) a kiszámolt eredmények felhasználását elkerülhetjük.

  $\sum M_i^B = -F_z \cdot x_2 - q \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_2)/2 + A_z \cdot (x_1 + x_2) = 0 \rightarrow A_z$

  $\sum F_{ix} = -F_x + A_x = 0 \quad \rightarrow A_x$
- Az ismeretlen támaszerőket mindig pozitív állásúnak feltételezzük, az eredmények előjele igazolja a feltételezés helyességét (plusz → helyes).

KÉTTÁMASZÚ TARTÓ TÁMASZERŐI

- A tartó megtámasztása merev és statikailag határozott, vagyis a tartó elmozdulásmentes és a támaszerők a statikai egyenletekkel egyértelműen meghatározhatóak.
- Egyensúlyi kijelentés:

  $(Q; A; B) \doteq 0$
- Egyensúlyi egyenletek:

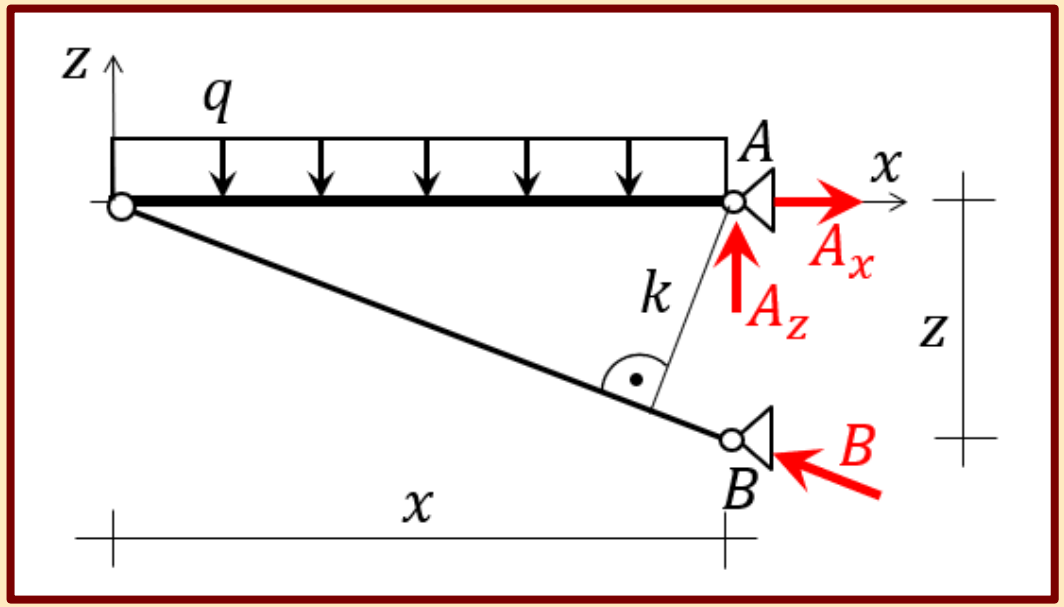
  $$\sum M_i^A = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + B \cdot k = 0 \quad \rightarrow B$$

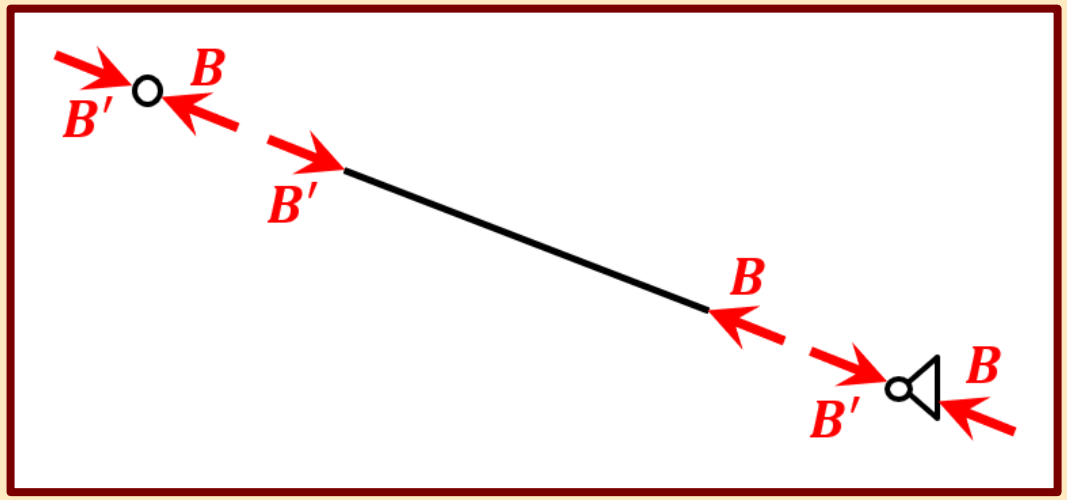
  $$\sum F_{iz} = -q \cdot x + A_z + B_z = 0 \quad \rightarrow A_z$$

  $$\sum F_{ix} = -B_x + A_x = 0 \quad \rightarrow A_x$$

  vagy

  $$\sum M_i^B = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + A_x \cdot z = 0 \quad \rightarrow A_x$$
- A támasztórúdban mindig rúdirányú erő működik.

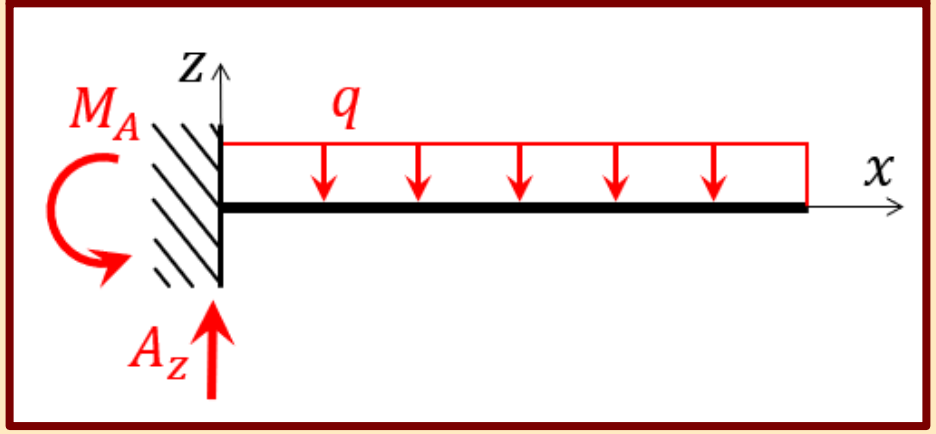


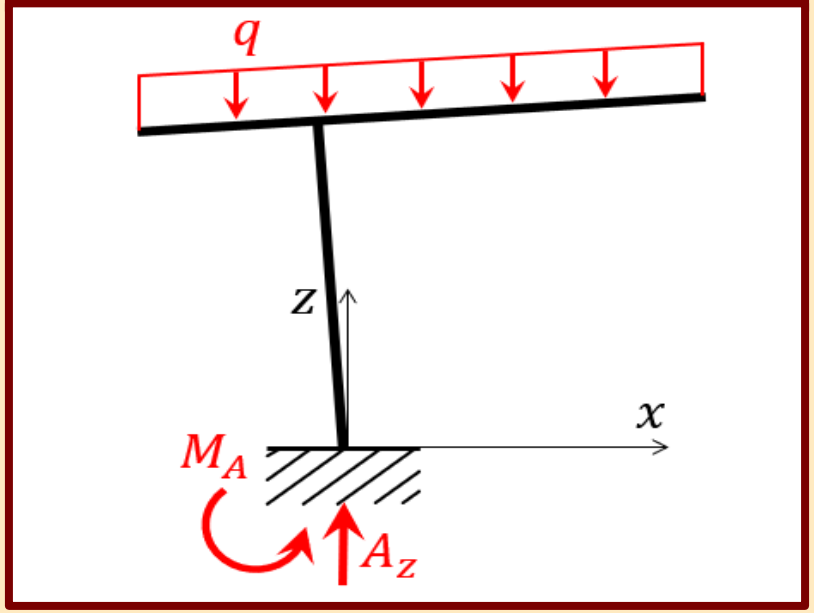


BEFOGOTT (KONZOL) TARTÓ

- Ha egy merev testet egy harmadfokú (befogás) kényszerrel támasztunk meg, akkor befogott tartóról beszélünk.

- Statikai váz:



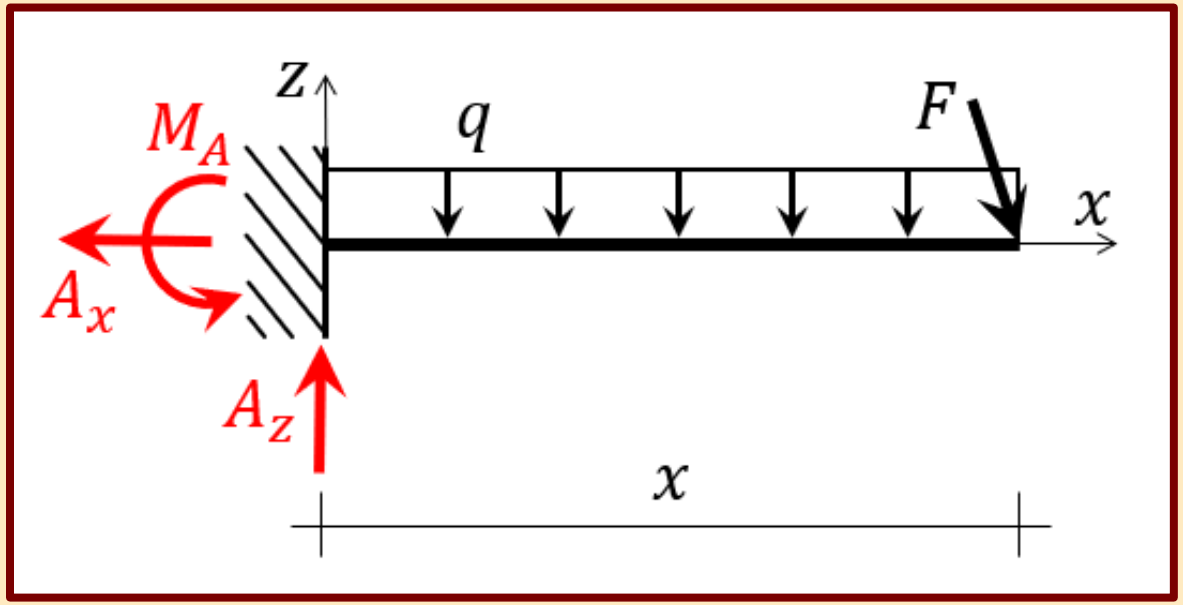


- Egyensúlyi kijelentés:

$$(Q; A; M_A) \doteq 0$$

BEFOGOTT TARTÓ TÁMASZDINÁMAI

- A tartó megtámasztása merev és statikailag határozott, vagyis a tartó elmozdulásmentes és a támaszerők a statikai egyenletekkel egyértelműen meghatározhatóak.



- Egyensúlyi kijelentés:

$$(F; Q; A; M_A) \doteq 0$$

- Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum M_i^A = F_z \cdot x + q \cdot x \cdot x/2 + M_A = 0 \quad \rightarrow M_A$$

$$\sum F_{iz} = -F_z - q \cdot x + A_z = 0 \quad \rightarrow A_z$$

$$\sum F_{ix} = F_x + A_x = 0 \quad \rightarrow A_x$$

- Az egyenletek függetlenek, nem használnak fel már kiszámolt ismeretleneket. Az egyenletek felírási sorrendje szabadon választható.

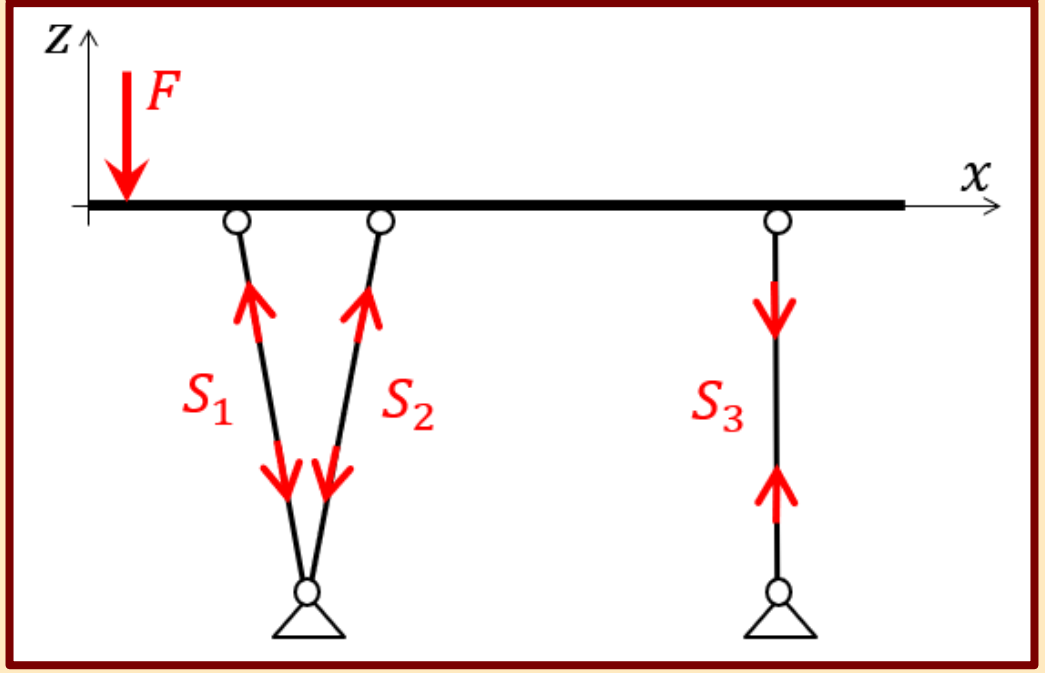
HÁROM RÚDDAL MEGTÁMASZTOTT TARTÓ

- Ha egy merev testet három elsőfokú (támasztórúd vagy görgős támasz) kényszerrel támasztunk meg, akkor három rúddal megtámasztott tartóról beszélünk. A megtámasztást biztosító rudak nem lehetnek párhuzamosak, ill. egy pontban metsződőek.

- Statikai váz:

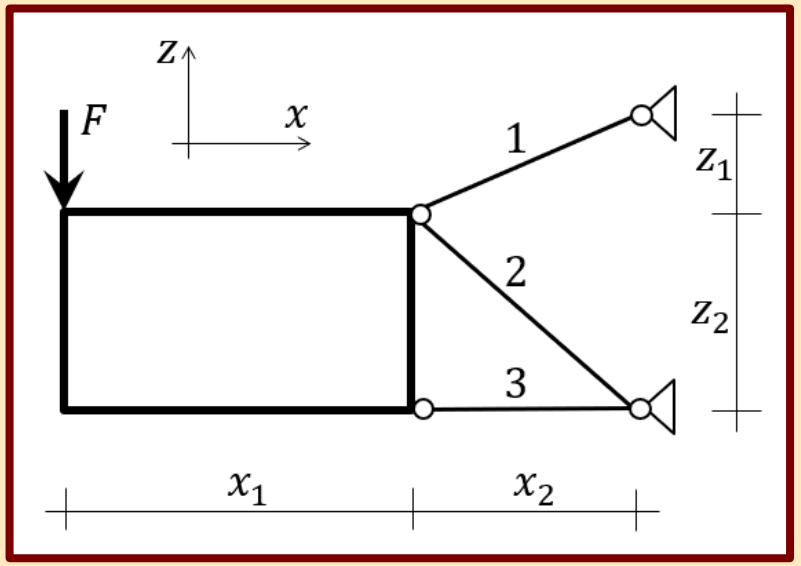
- Egyensúlyi kijelentés:

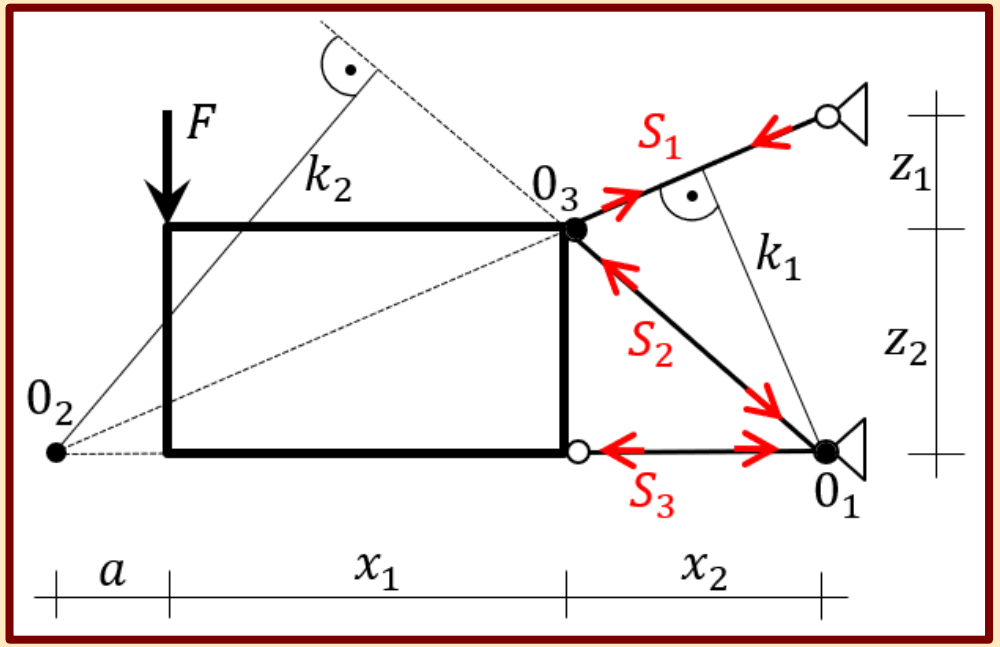
$$(F; S_1; S_2; S_3) \doteq 0$$



HÁROM RÚDDAL MEGTÁMASZTOTT TARTÓ TÁMASZERŐI

- A tartó megtámasztása merev és statikailag határozott, vagyis a tartó elmozdulásmentes és a támaszerők a statikai egyenletekkel egyértelműen meghatározhatóak.
- Egyensúlyi kijelentés: $(F; S_1; S_2; S_3) \doteq 0$
- Egyensúlyi egyenletek - főponti (Ritter)-módszer: két ismeretlen rúderő metszéspontjára (főpont) írjuk fel a nyomatéki egyenleteket. Ezáltal minden egyegyenlet egyismeretlenes lesz és független az előző eredményektől. A rúderőket mindig húzottnak feltételezzük, az eredmények előjele igazolja a feltételezés helyességét.





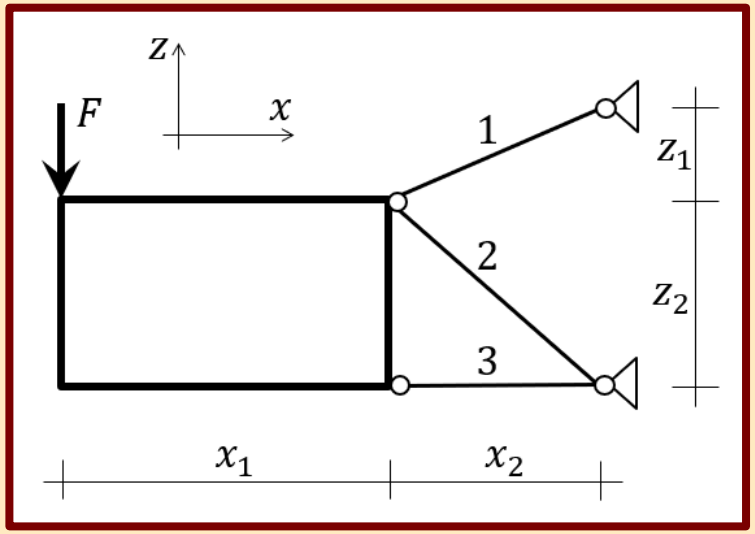
$$\sum M_i^{0_1} = -F \cdot (x_1 + x_2) + S_1 \cdot k_1 = 0 \ \rightarrow S_1$$

$$\sum M_i^{0_2} = F \cdot a - S_2 \cdot k_2 = 0 \ \rightarrow S_2$$

$$\sum M_i^{0_3} = -F \cdot x_1 - S_3 \cdot z_2 = 0 \ \rightarrow S_3$$

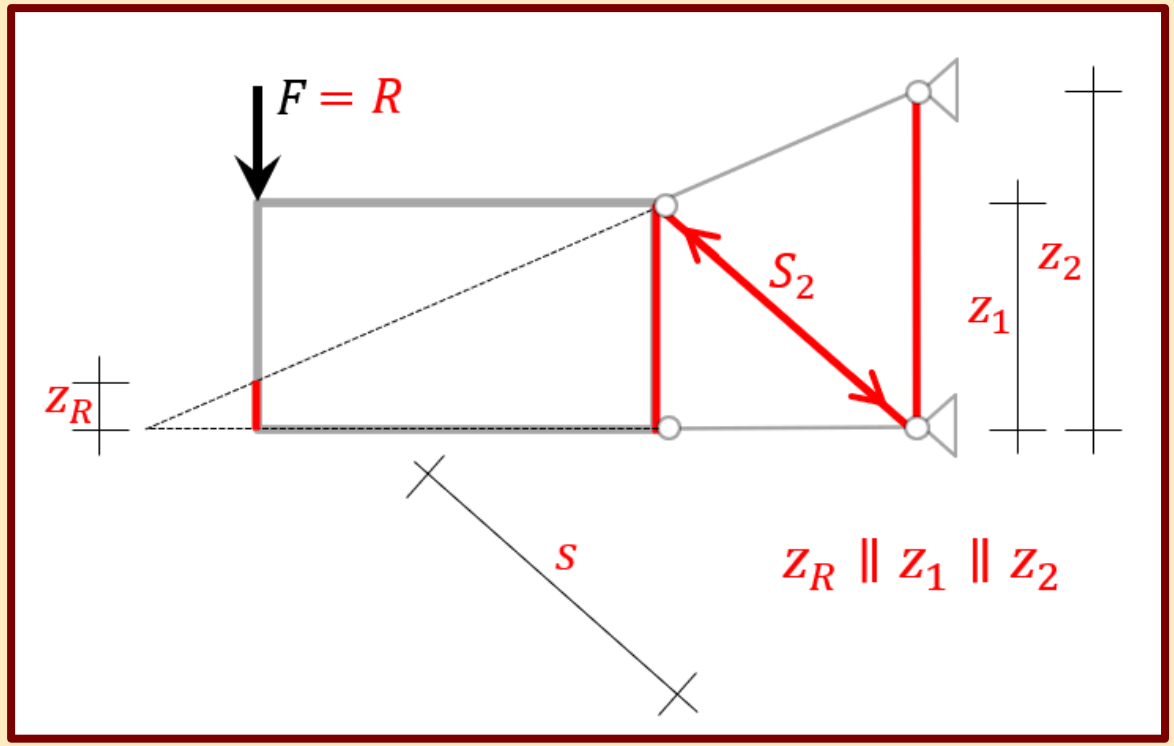
HÁROM RÚDDAL MEGTÁMASZTOTT TARTÓ TÁMASZERŐI

- Grafoanalítikus megoldás – hasonlósági módszer: a terhelő erők eredőjével közel párhuzamos egyensúlyozó erő nagysága meghatározható az eredő nagyságának és a geometriából leolvasható meghatározott metszékeknek a segítségével összeállított képlettel.



$$S = R \cdot \frac{z_R \cdot s}{z_1 \cdot z_2}$$

$$S_2 = F \cdot \frac{z_F \cdot s}{z_1 \cdot z_2}$$



- A rúderő előjele szemléletből, a főpontra vizsgált nyomatékok forgatása segítségével állapítható meg.

TÁMASZERŐK HÁROM ERŐ EGYENSÚLYÁVAL

- Ha a tartóra ható aktív és passzív erők száma három, akkor a támaszerők a második axióma alapján grafoanalítikus eszközökkel is meghatározhatóak.

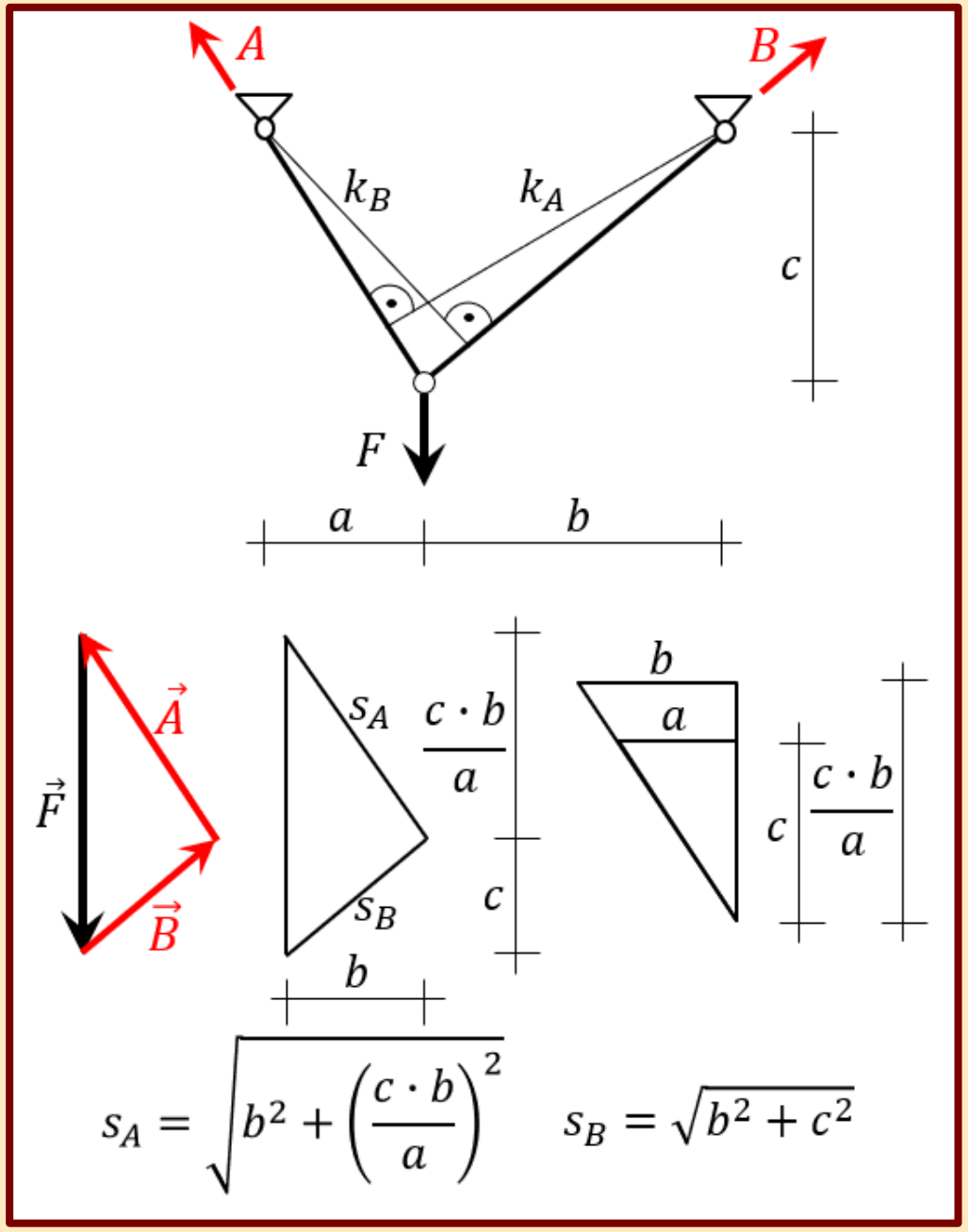
$$\frac{A}{F} = \frac{s_A}{\frac{c \cdot b}{a} + c} \quad \rightarrow \quad A = \frac{s_A}{\frac{c \cdot b}{a} + c} \cdot F$$

$$\frac{B}{F} = \frac{s_B}{\frac{c \cdot b}{a} + c} \quad \rightarrow \quad B = \frac{s_B}{\frac{c \cdot b}{a} + c} \cdot F$$

- A támaszerők egyensúlyi egyenletekkel is előállíthatóak.

$$\sum M_i^A = F \cdot a - B \cdot k_B = 0 \quad \rightarrow \quad B$$

$$\sum M_i^B = -F \cdot b + A \cdot k_A = 0 \quad \rightarrow A$$



Tartószerkezetek mechanikája I.

4.

Síkbeli tartószerkezetek: összetett tartók

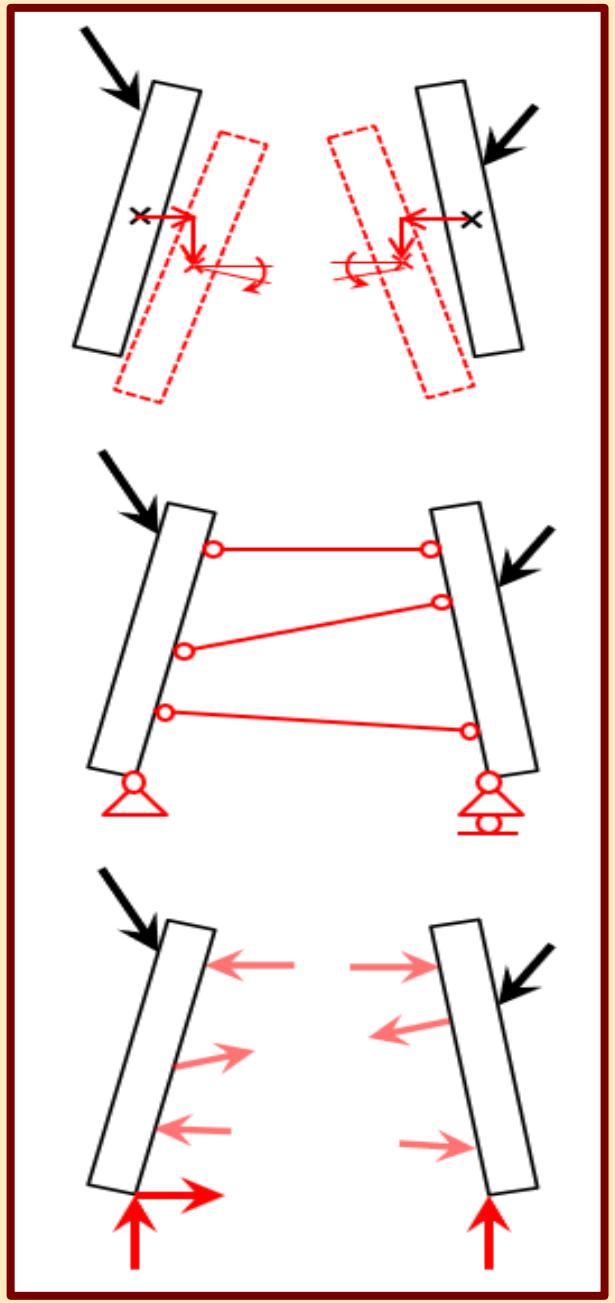
Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

ÖSSZETETT TARTÓK MEGHATÁROZÁSA

- Ha több merev testet megfelelő belső kényszerekkel egymáshoz, valamint külső kényszerekkel a talajhoz rögzítünk, akkor a kialakított tartószerkezetet összetett tartónak nevezzük.
- A tartók több elemből történő összeállítása sok esetben a méretbeli korlátok leküzdésére irányul a tartó statikai határozottságát fenntartva.
- A tartó nyugalmi állapotát a külső és belső kényszerek, egyensúlyát a kialakuló külső és belső kényszererők együtt biztosítják.

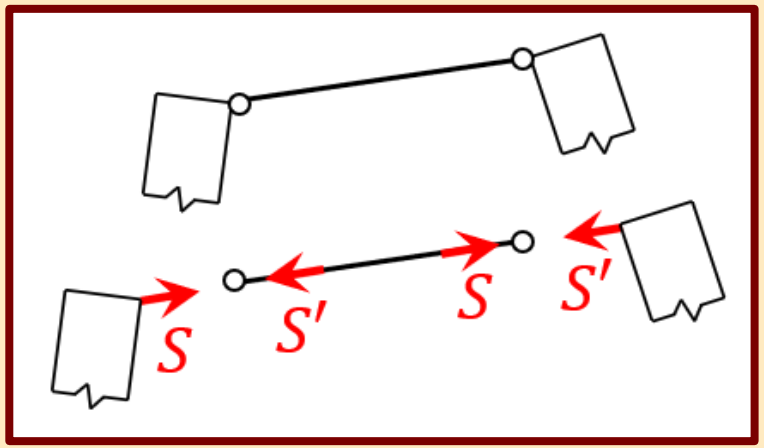
ÖSSZETETT TARTÓK KÜLSŐ ÉS BELSŐ KÉNYSZEREI

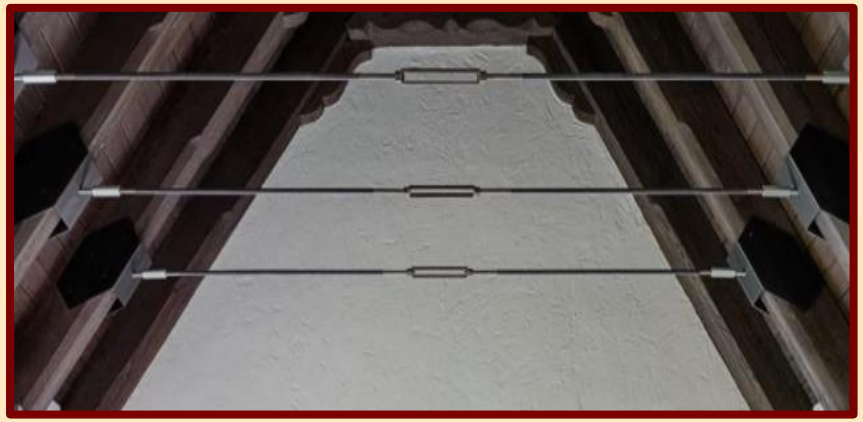
- Több merev test nem csak eredeti helyzetéhez képest, hanem egymáshoz képest is elmozdulhat. Ennek az elmozdulásnak is három szabadsági foka van, két egymásra merőleges eltolódás és egy síkbeli elfordulás jöhet létre.
- Ezeknek az (relatív) elmozdulásoknak a kialakulását belső kényszerekkel korlátozhatjuk. A belső kényszerekben is a külsőkhöz hasonlóan a megakadályozott mozgásnak megfelelő kényszererők keletkeznek, amelyek az egyes elemek egyensúlyának biztosításában vesznek részt.
- Feladatunk továbbra is a teljes szerkezet nyugalmának biztosítása. Az ehhez szükséges külső kényszerek kialakításánál az egyszerű tartókhoz képest figyelembe kell venni az alkalmazott belső kényszereket és az általuk korlátozott mozgások számát is.



A BELSŐ KÉNYSZEREK FOKSZÁMA

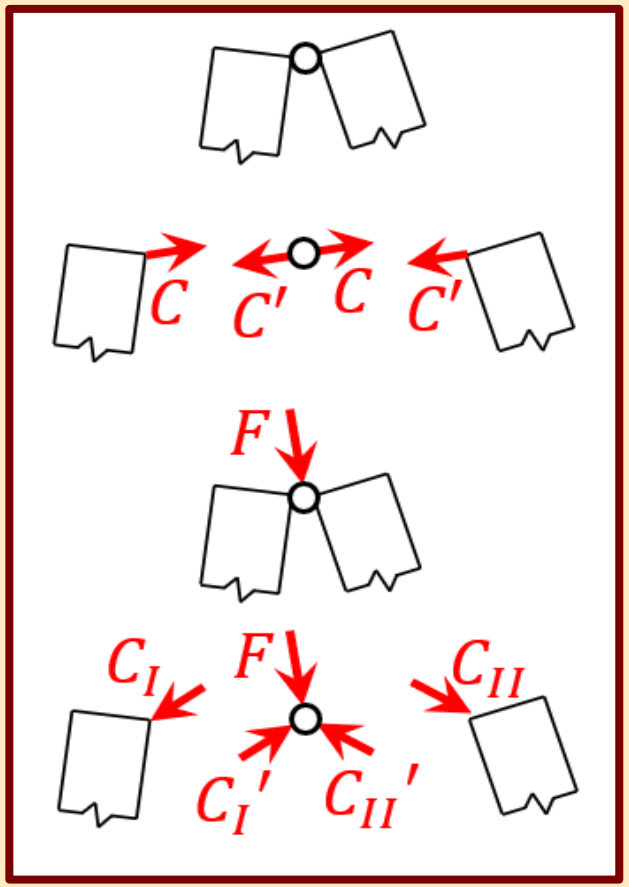
- A belső kényszerek által korlátozott testek közötti relatív elmozdulás-összetevők, és az ezzel megegyező számú bennük keletkező belső kényszererők számát a belső kényszerek fokszámának nevezzük.
- Elsőfokú kényszer - kapcsolórúd: egy rúdirányú kényszererő felvételére, és ennek megfelelő irányú eltolódás megakadályozására alkalmas. Akkor működik rúdként egy elem, amelyben csak tengelyirányú erő ébred, ha egyenes tengelyvonalú, végein csuklóval kapcsolódik más elemekhez és terheletlen (erők csak a csuklókon adódnak át). Számítás során tehát a kapcsolórúd egy ismeretlent jelent.





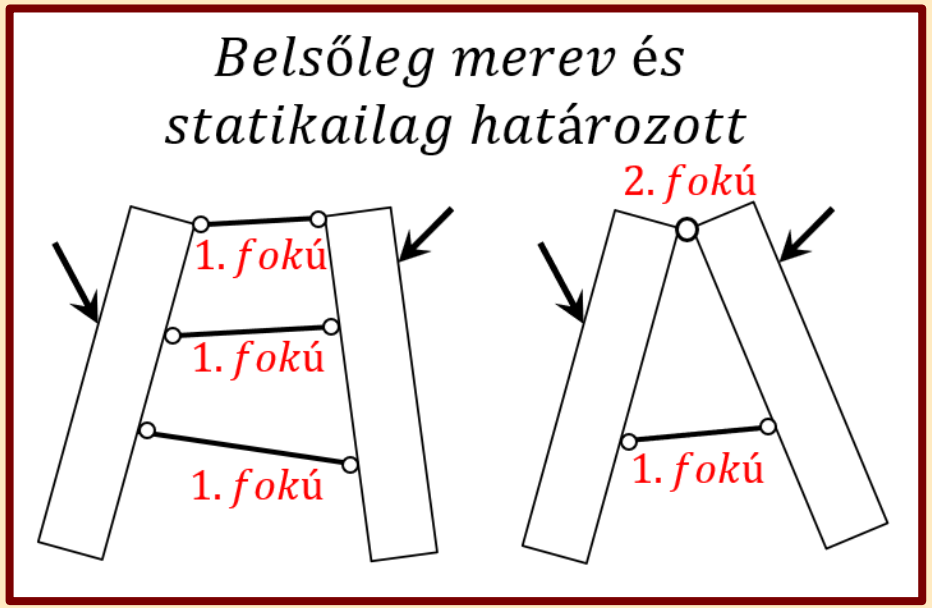
A BELSŐ KÉNYSZEREK FOKSZÁMA

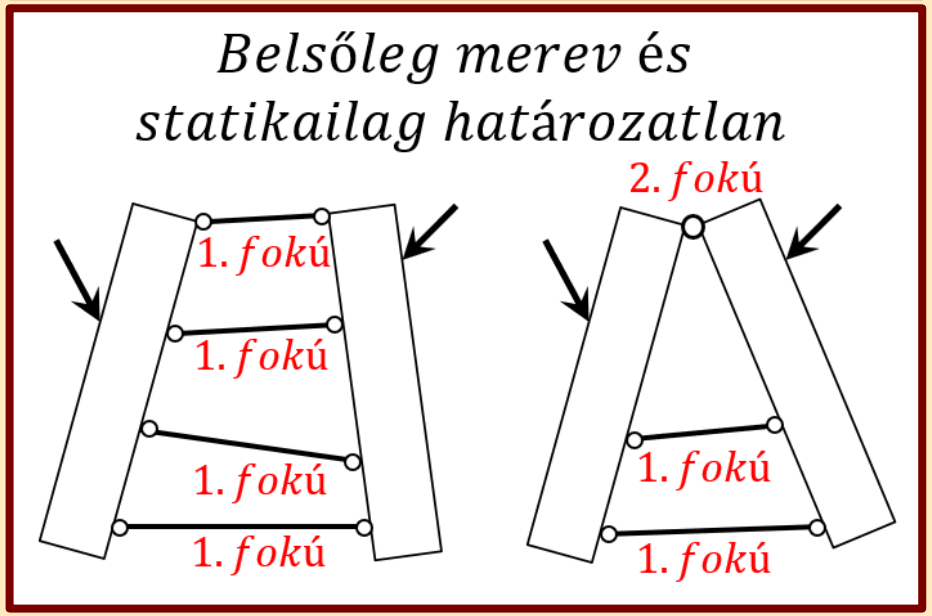
- Másodfokú kényszer – egyszerű csukló: két test összekapcsolása révén alakíthatjuk ki, amely egy két összetevővel rendelkező kényszererő felvételére, és a két test közötti mindkét irányú eltolódás megakadályozására alkalmas. Az egyszerű csuklóra tehát két erő, egy két összetevőjű erő és annak ellentettje hat (két erő egyensúlya).
- Többszörös csukló: ha a csuklóra külső erő működik, vagy kettőnél több testet kapcsol össze, akkor kettőnél több erő is hat rá és azok egyensúlya érvényesül.



A BELSŐLEG MEREV KAPCSOLAT

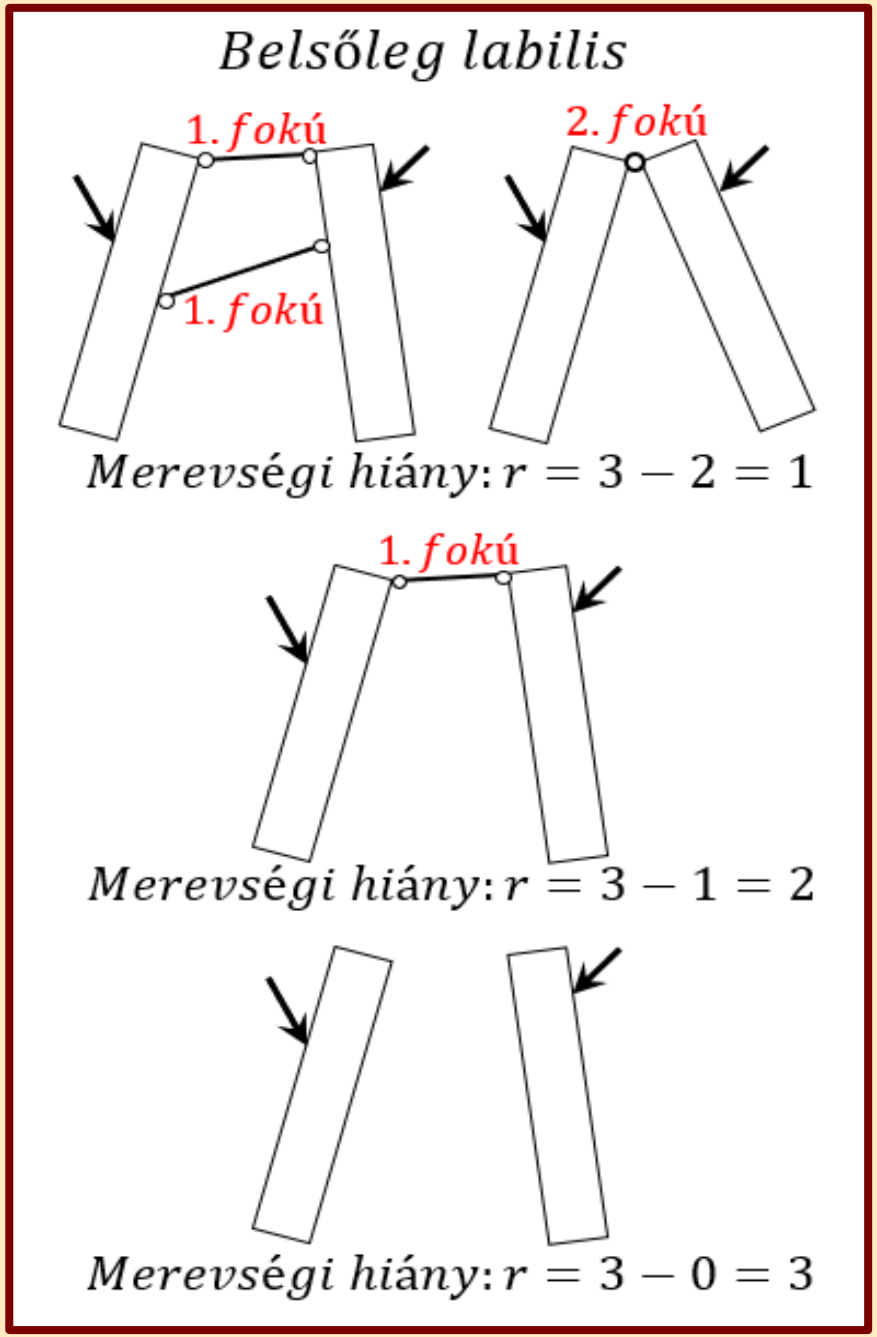
- Ha tetszőleges teher hatására az összekapcsolt testek között nem jön létre semmilyen elmozdulás, akkor a belső kapcsolatot merevnek minősítjük.
- A belső merevség kialakításához minimálisan három nem párhuzamos és nem egy pontban metsződő kapcsolati erő szükséges.
- Az ennek megfelelő három kapcsolati erő alkalmazása esetén a belső kapcsolat statikailag és kinematikailag is határozott lesz. Ennél több kapcsolati erő esetén a kapcsolat minősítése statikailag határozatlan, kinematikailag pedig túlhatározott, vagyis a lehetséges elmozdulások kialakulását a minimálisan szükségesnél több erővel akadályoztuk meg.





A BELSŐLEG LABILIS KAPCSOLAT

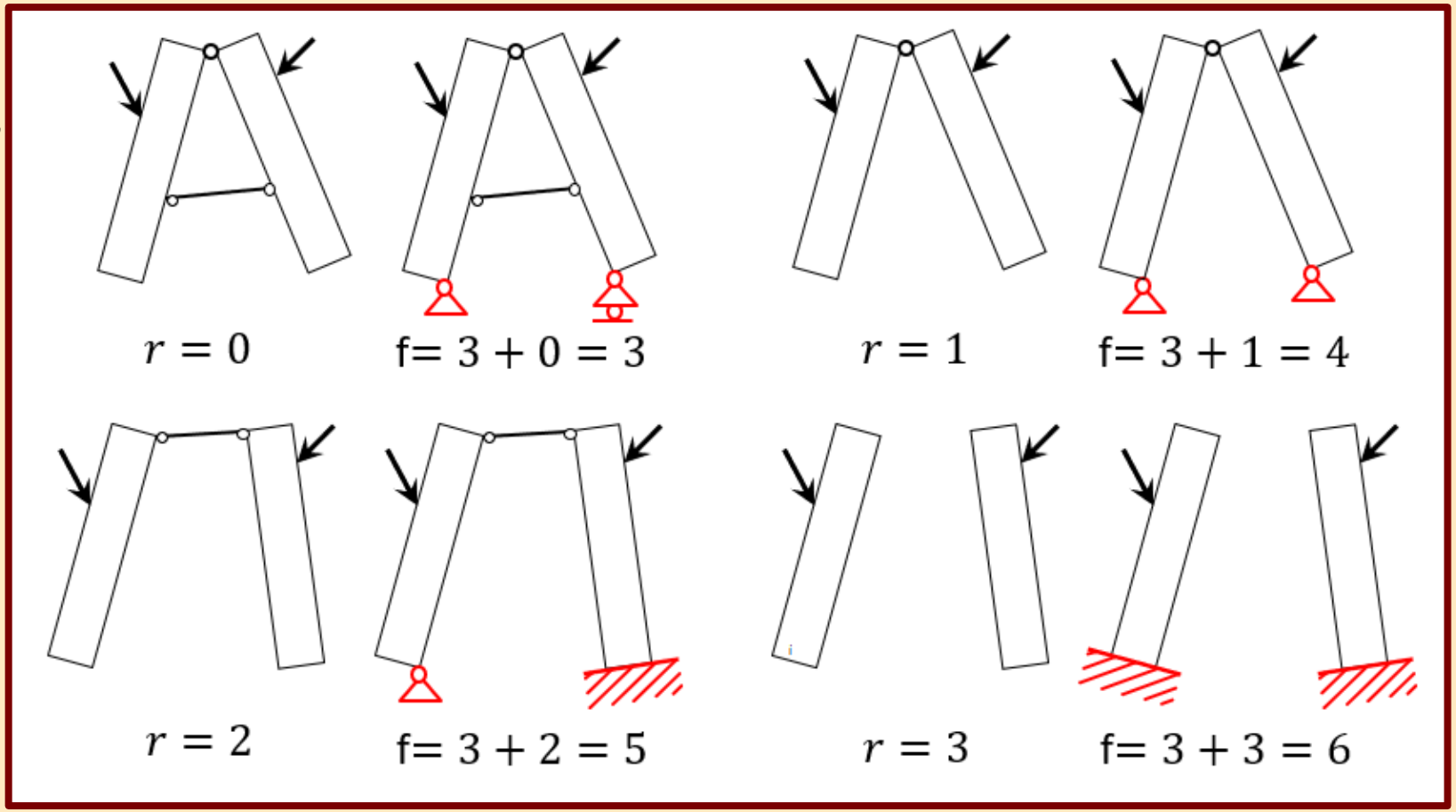
- Ha létezik olyan teher, amelynek hatására az összekapcsolt testek között létrejön elmozdulás, akkor a belső kapcsolatot labilisnak minősítjük.
- A belsőleg labilis kialakítás esetén háromnál kevesebb kényszererővel jött létre a kapcsolat, vagy legalább három erővel lett létrehozva, de azok nem akadályozzák meg valamennyi elmozdulás kialakulását (párhuzamosak vagy egy pontban metsződőek).
- Merevségi hiánynak (r) hívjuk azon szükséges hiányzó kapcsolati erők számát, amely a belsőleg labilis kialakítás belsőleg merevvé változtatásához szükséges. Tehát a merev kapcsolathoz szükséges három kényszererőhőz képesti eltérést adja meg.



A KÜLSŐ KÉNYSZEREK KIALAKÍTÁSA

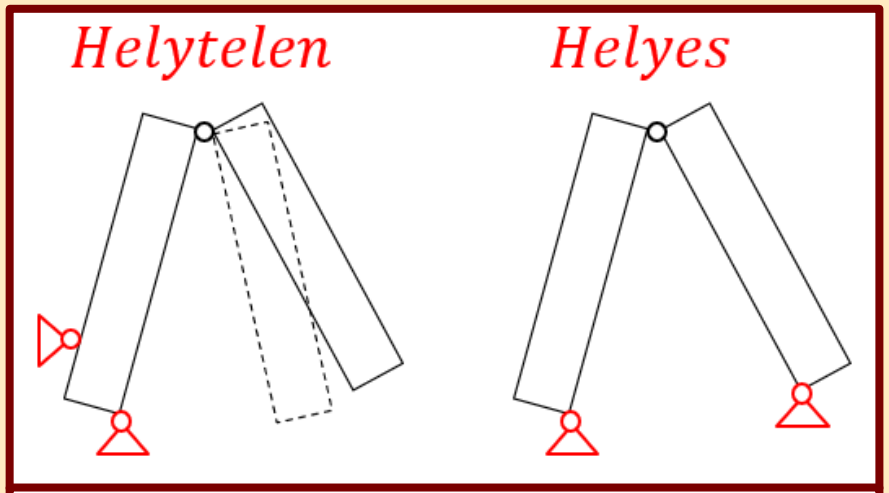
- A külső kényszerek kialakításakor a belső merevségi hiányt figyelembe kell venni.
- A külső kényszerek összfokszámát az statikailag határozott és merev kialakításhoz eddigi szükséges háromhoz képest a belső merevségi hiány értékével megnöveljük. Tehát a belső merevséghez hiányzó kapcsolati erőket kívülről kompenzáljuk, ezáltal nemcsak a belsőleg merev, hanem a labilis kialakításból is létrehozható egészében merev és statikailag határozott tartó. A tartóvá alakítás minimális kényszerfokszáma:

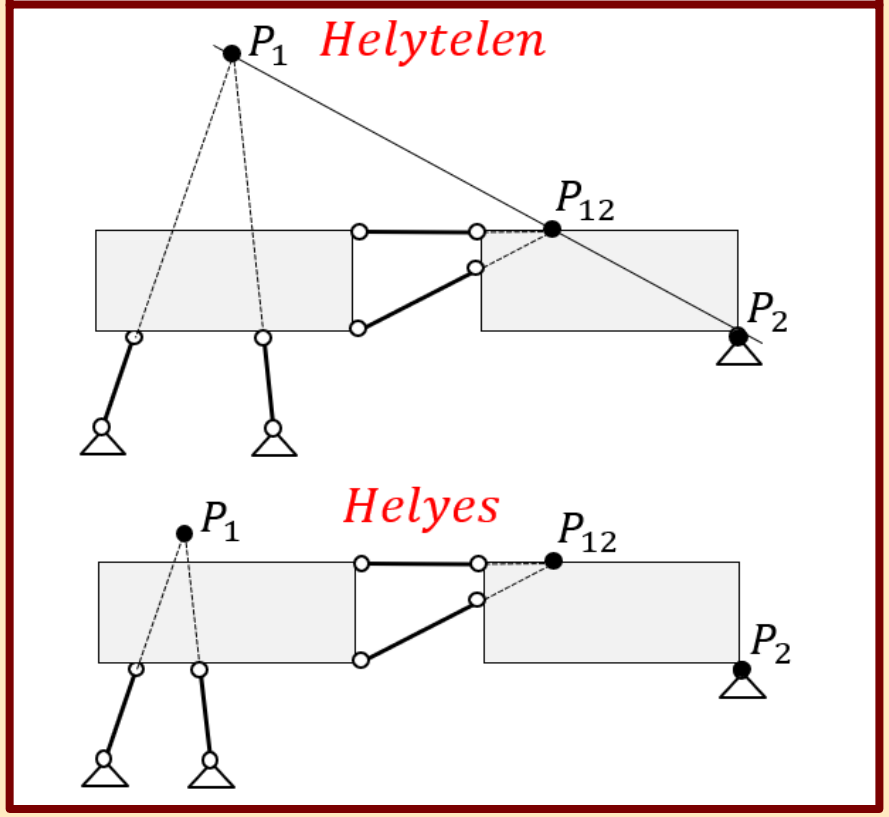
$$f = 3 + r$$



A KÜLSŐ KÉNYSZEREK KIALAKÍTÁSA

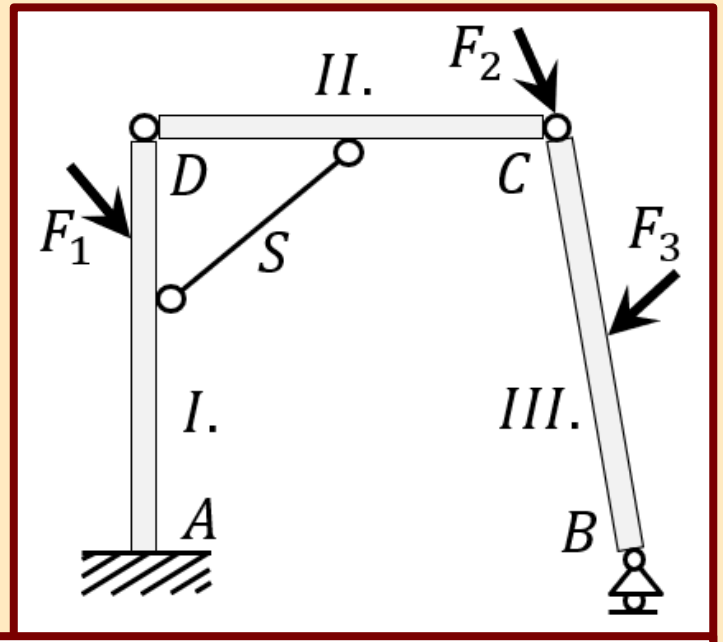
- A külső kényszerek vonatkozásában a megkapott szükséges fokszámukon túl biztosítani kell olyan elhelyezésüket is a teljes tartó merevségének igazolásához, amellyel a tartó valamennyi elmozdulását egyszeresen korlátozzák. A helytelen elrendezésű kényszerek a tartó labilitását okozzák.
- Belsőleg labilis kialakítás esetén a belső kényszererők metszéspontja körül forgáspont (P_{12}) jön létre a két test között. Az egyes testeket külsőleg megtámasztó kényszerekben ébredő erők metszéspontjai körül is forgáspontok (P_1;P_2) alakulnak ki az adott testek vonatkozásában. A három forgáspont nem eshet egy egyenesbe, mert a tartó labilis lesz.





A STATIKAI HATÁROZOTTSÁG ÉS MEREVSÉG VIZSGÁLATA

- A statikai határozottság szükséges feltétele: $i = e$, ahol „i” az ismeretlen kapcsolati erők, „e” a felírható statikai egyenletek száma.
- Ezen kívül a szerkezetnek merevnek kell lennie, ami az egyenletek függetlenségét és ellentmondásmentességét eredményezi.
- Különítsünk el és vizsgáljunk minden olyan tartórészt, amelyre háromnál több erő hat:

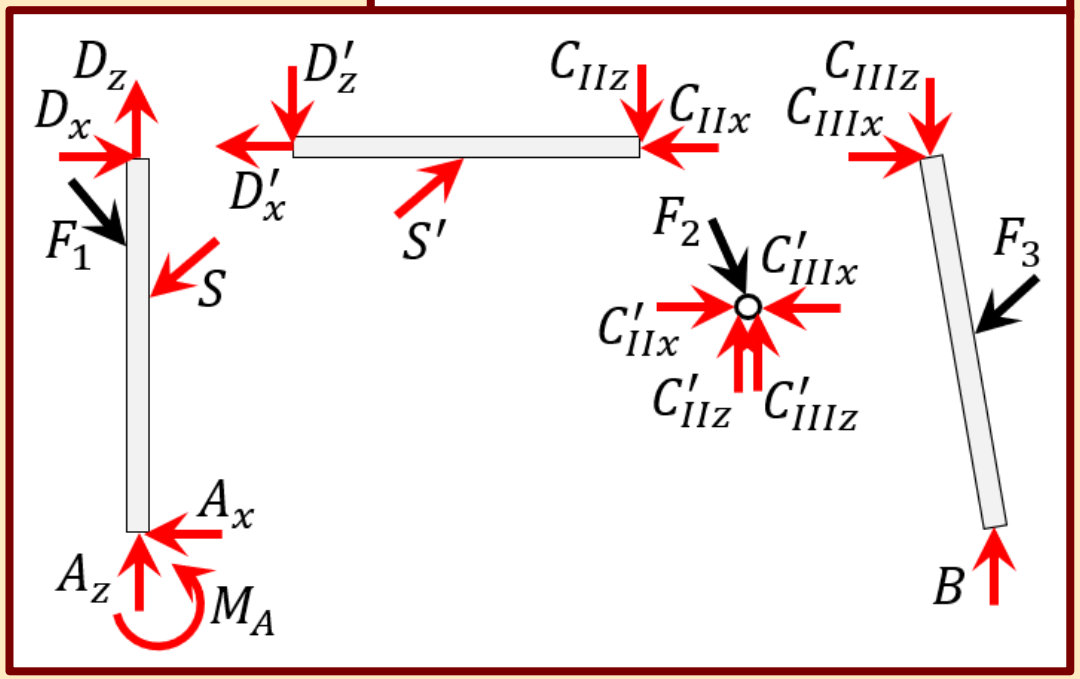


$$I.\,(F_1; D_x; D_z; S; A_x; A_z; M_A) \doteq 0 \rightarrow e = 3$$

$$II.\,(D'_x; D'_z; S'; C_{IIx}; C_{IIz}) \doteq 0 \rightarrow e = 3$$

$$III.\,(F_3; B; C_{IIIx}; C_{IIIz}) \doteq 0 \rightarrow e = 3$$

$$\text{C.}\,(F_2; C'_{IIx}; C'_{IIz}; C'_{IIIx}; C'_{IIIz}) \doteq 0 \rightarrow e = 2$$



$$\left.\begin{array}{l}\text{Összes ismeretlen:}\quad i = 11\\ \text{Összes egyenlet:}\quad e = 11\end{array}\right\} \rightarrow i = e$$

BELSŐLEG LABILIS TARTÓ KÉNYSZERERŐI

- A tartó megtámasztása belsőleg labilis (r=1), egészében merev és statikailag határozott.
- Egyensúlyi kijelentések:

$$E\,(F_1; F_2; A_x; A_z; B_x; B_z) \doteq 0$$

$$I.\,(F_1; A_x; A_z; S_1; S_2) \doteq 0$$

$$II.\,(F_2; B_x; B_z; S_1'; S_2') \doteq 0$$

- Egyensúlyi egyenletek:

$$E\colon \sum M_i^A = 0 \;\rightarrow B_z$$

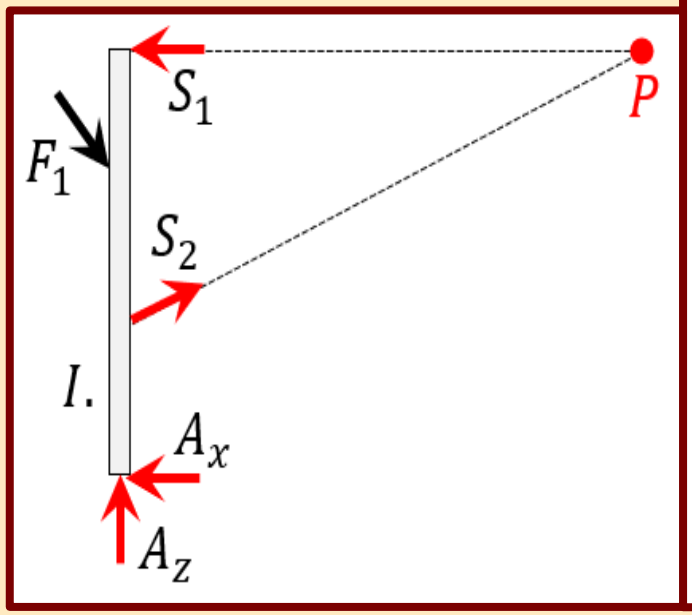
$$E\colon \sum M_i^B = 0 \;\rightarrow A_z$$

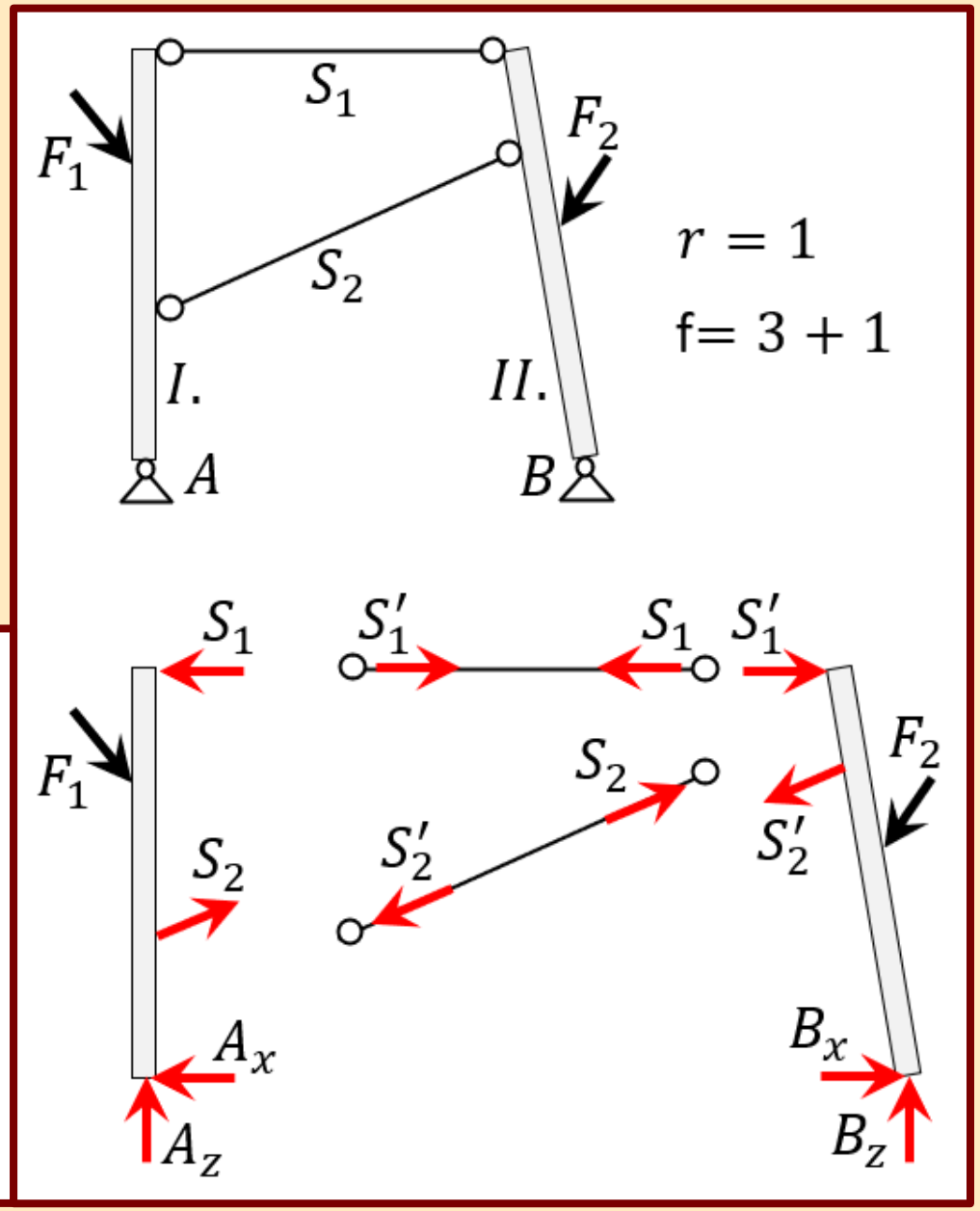
$$I.\colon \sum M_i^P = 0 \;\rightarrow A_x$$

$$I.\colon \sum F_{iz} = 0 \;\rightarrow S_2$$

$$I.\colon \sum F_{ix} = 0 \;\rightarrow S_1$$

$$E\colon \sum F_{ix} = 0 \;\rightarrow B_x$$





BELSŐLEG LABILIS TARTÓ KÉNYSZERERŐI

- A tartó megtámasztása belsőleg labilis (r=2), egészében merev és statikailag határozott.
- Egyensúlyi kijelentések:

$$E\,(F_1; F_2; A_x; A_z; M_A; B_x; B_z) \doteq 0$$

$$I.\,(F_1; A_x; A_z; M_A; S_1) \doteq 0$$

$$II.\,(F_2; B_x; B_z; S_1') \doteq 0$$

- Egyensúlyi egyenletek:

$$II.: \sum M_i^B = 0 \;\rightarrow S_1'$$

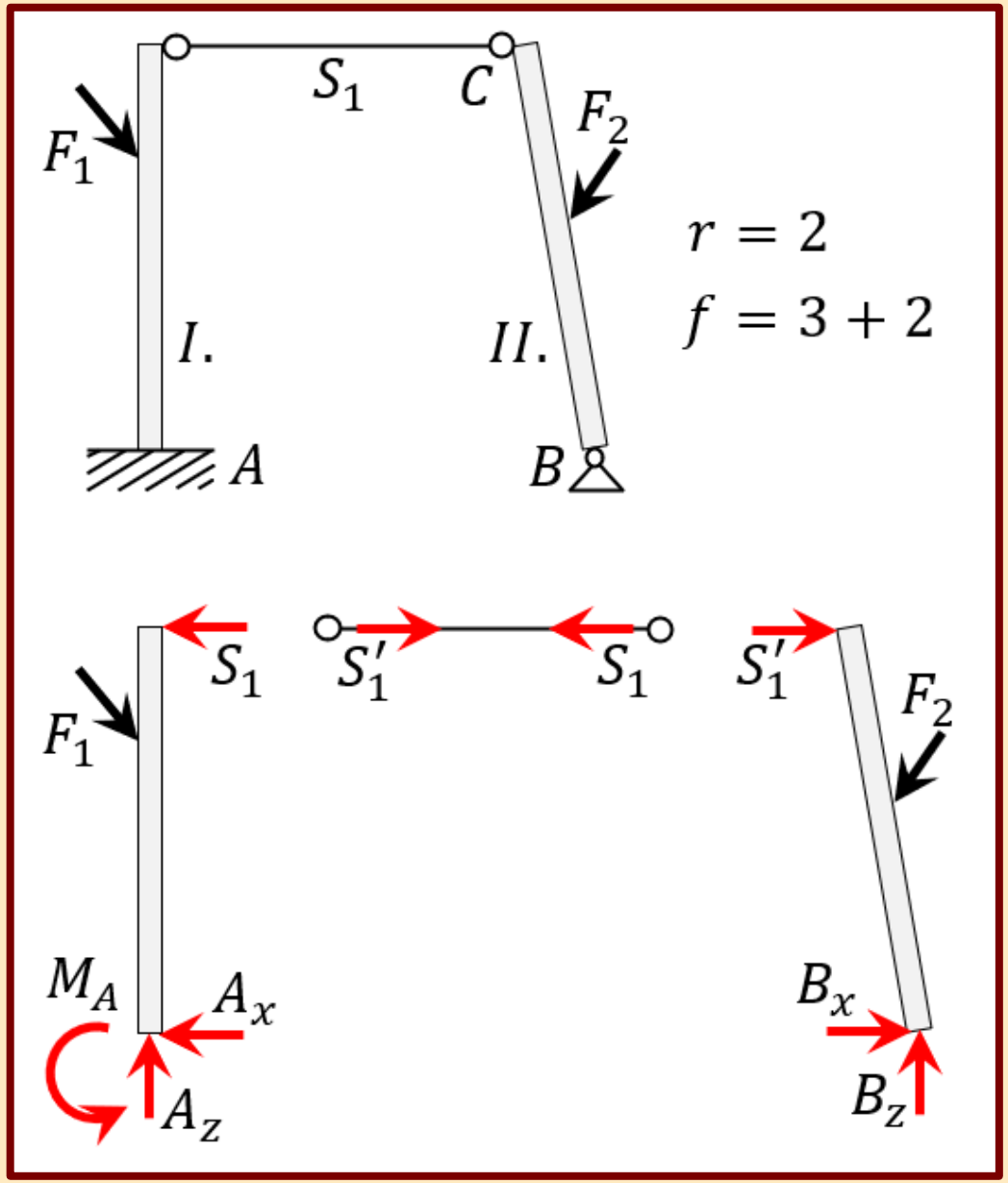
$$II.: \sum F_{ix} = 0 \;\rightarrow B_x$$

$$II.: \sum F_{iz} = 0 \;\rightarrow B_z$$

$$I.: \sum M_i^A = 0 \;\rightarrow M_A$$

$$I.: \sum F_{ix} = 0 \;\rightarrow A_x$$

$$I.: \sum F_{iz} = 0 \;\rightarrow A_z$$



BELSŐLEG MEREV TARTÓ KÉNYSZERERŐI

- A tartó megtámasztása belsőleg merev, egészében is merev és statikailag határozott. A belső és a külső kapcsolat is kéttámaszú (1 első és 1 másodfokú kényszer).
- Egyensúlyi kijelentések:

$$E(F_1; F_2; A_x; A_z; B) \doteq 0$$

$$I.(F_1; A_x; A_z; C_x; C_z; S) \doteq 0$$

$$II.(F_2; B; C_x'; C_z'; S') \doteq 0$$

- Egyensúlyi egyenletek:

$$E: \sum M_i^A = 0 \quad \rightarrow B$$

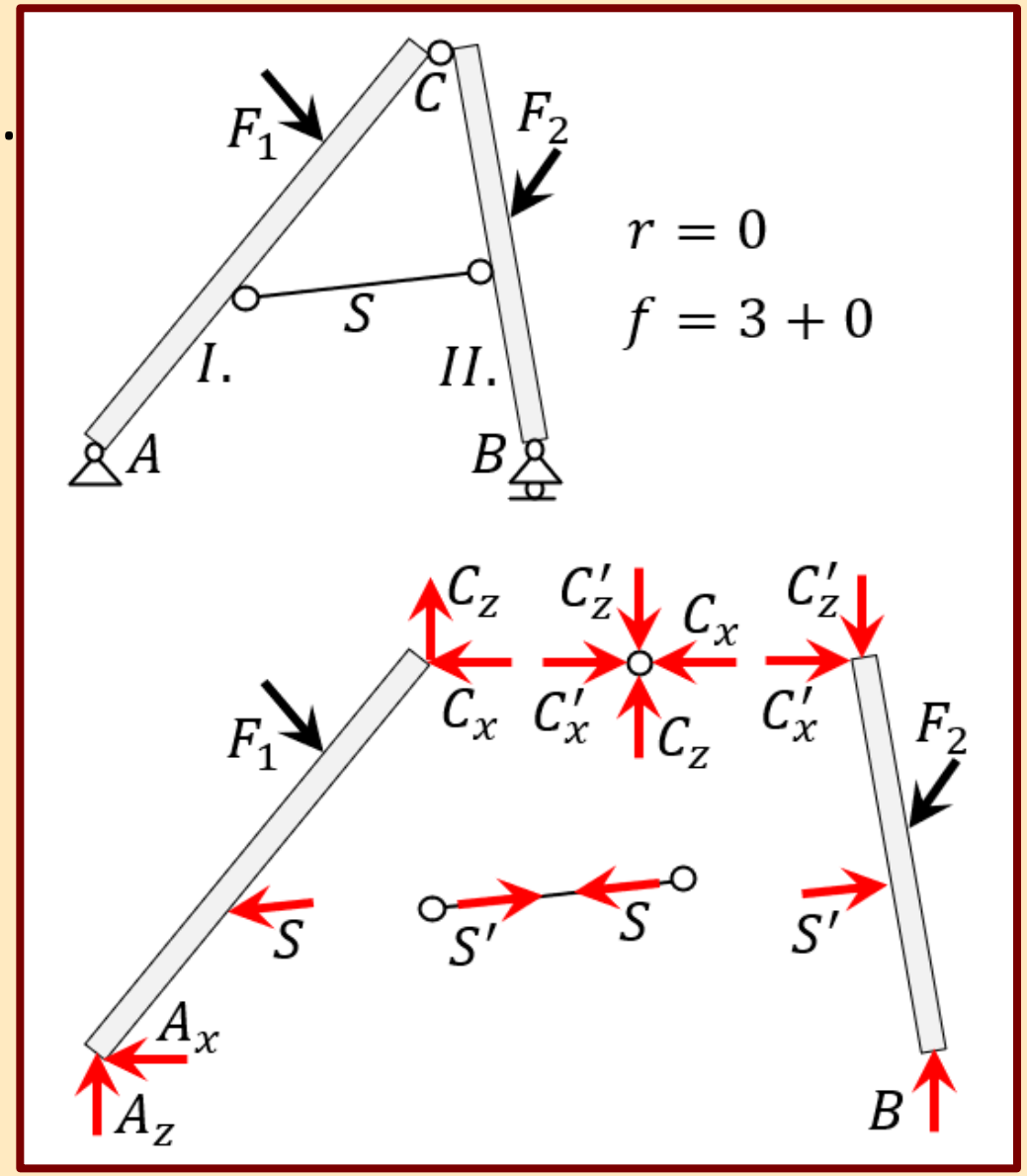
$$E: \sum F_{ix} = 0 \quad \rightarrow A_x$$

$$E: \sum F_{iz} = 0 \quad \rightarrow A_z$$

$$I.: \sum M_i^C = 0 \quad \rightarrow S$$

$$I.: \sum F_{ix} = 0 \quad \rightarrow C_x$$

$$I.: \sum F_{iz} = 0 \quad \rightarrow C_z$$



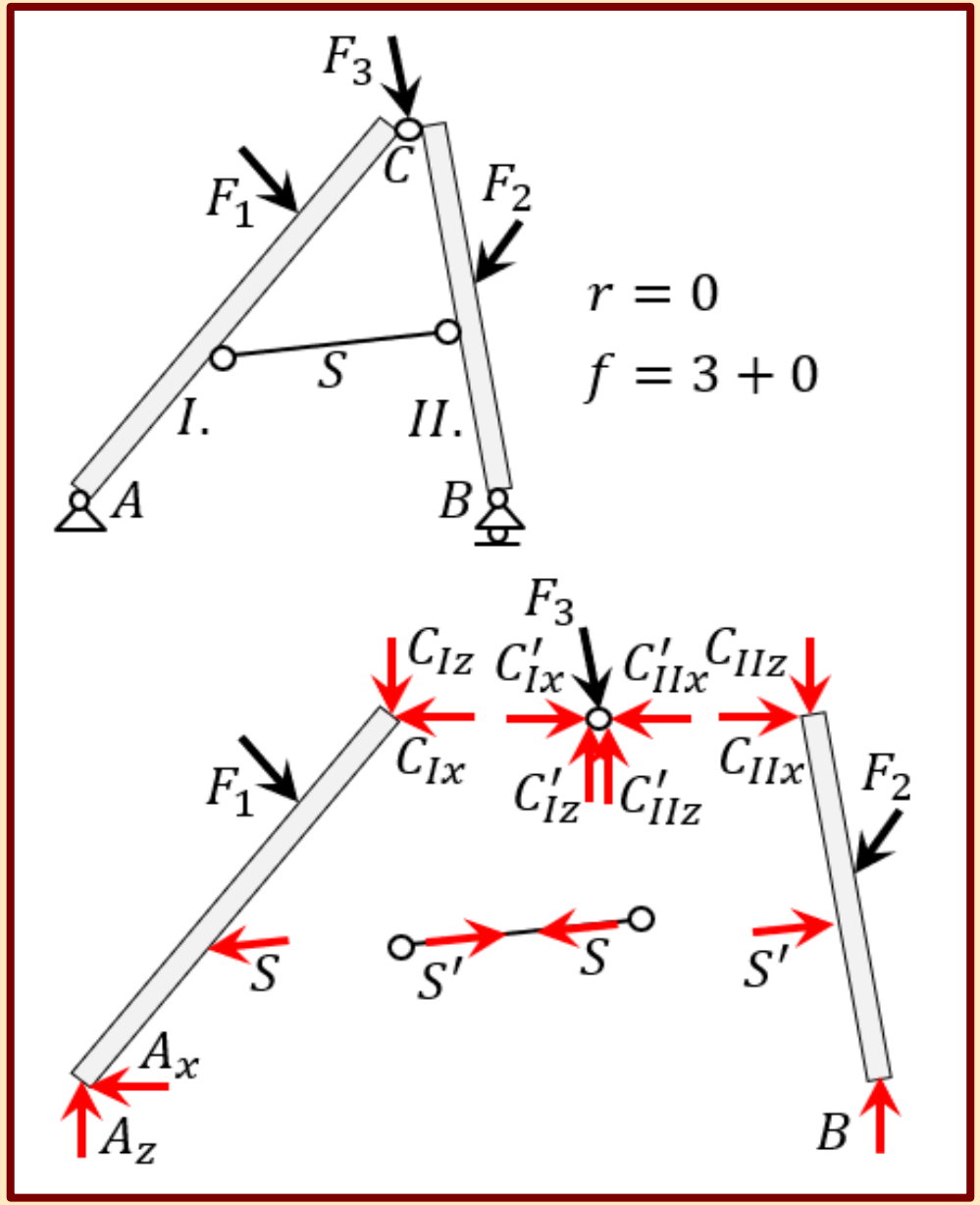
BELSŐLEG MEREV TARTÓ KÉNYSZERERŐI

- A tartó megtámasztása belsőleg merev, egészében is merev és statikailag határozott. Az erővel terhelt (többszörös) csukló egyensúlyát külön vizsgáljuk.
- Egyensúlyi kijelentések:

$$E\,(F_1; F_2; F_3; A_x; A_z; B) \doteq 0$$
$$I.\,(F_1; A_x; A_z; C_{Ix}; C_{Iz}; S) \doteq 0$$
$$II.\,(F_2; B; C_{IIx}; C_{IIz}; S') \doteq 0$$
$$C\,(F_3; C'_{Ix}; C'_{Iz}; C'_{IIx}; C'_{IIz}) \doteq 0$$

- Egyensúlyi egyenletek:

$$E: \sum M_i^A = 0 \;\rightarrow B$$
$$E: \sum F_{ix} = 0 \;\rightarrow A_x$$
$$E: \sum F_{iz} = 0 \;\rightarrow A_z$$
$$I.: \sum M_i^C = 0 \rightarrow S$$
$$I.: \sum F_{ix} = 0 \;\rightarrow C_{Ix} \qquad II.: \sum F_{ix} = 0 \rightarrow C_{IIx}$$
$$I.: \sum F_{iz} = 0 \;\rightarrow C_{Iz} \qquad II.: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow C_{IIz}$$



BELSŐLEG MEREV TARTÓ KÉNYSZERERŐI

- A tartó megtámasztása belsőleg merev, egészében is merev és statikailag határozott. A belső kapcsolat három rudas (3 elsőfokú kényszer), a külső kapcsolat kéttámaszú.
- Egyensúlyi kijelentések:

$$E\,(F_1; F_2; A_x; A_z; B) \doteq 0$$

$$I.\,(F_1; A_x; A_z; S_1; S_2; S_3) \doteq 0$$

$$II.\,(F_2; B; S_1'; S_2'; S_3') \doteq 0$$

- Egyensúlyi egyenletek:

$$E: \sum M_i^A = 0 \;\rightarrow B$$

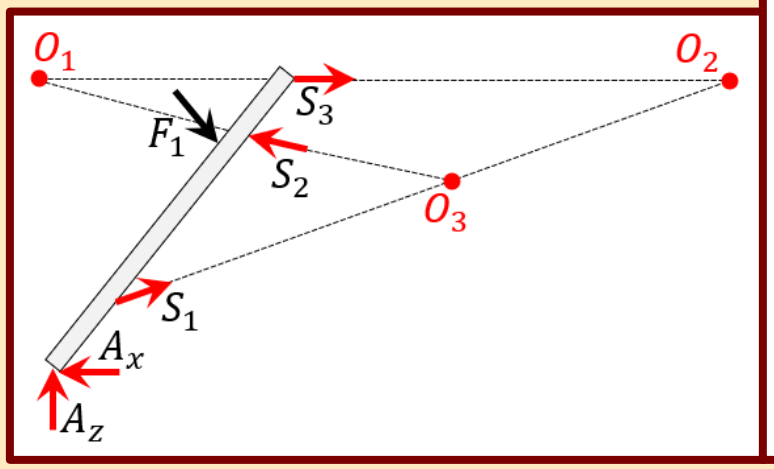
$$E: \sum F_{ix} = 0 \;\rightarrow A_x$$

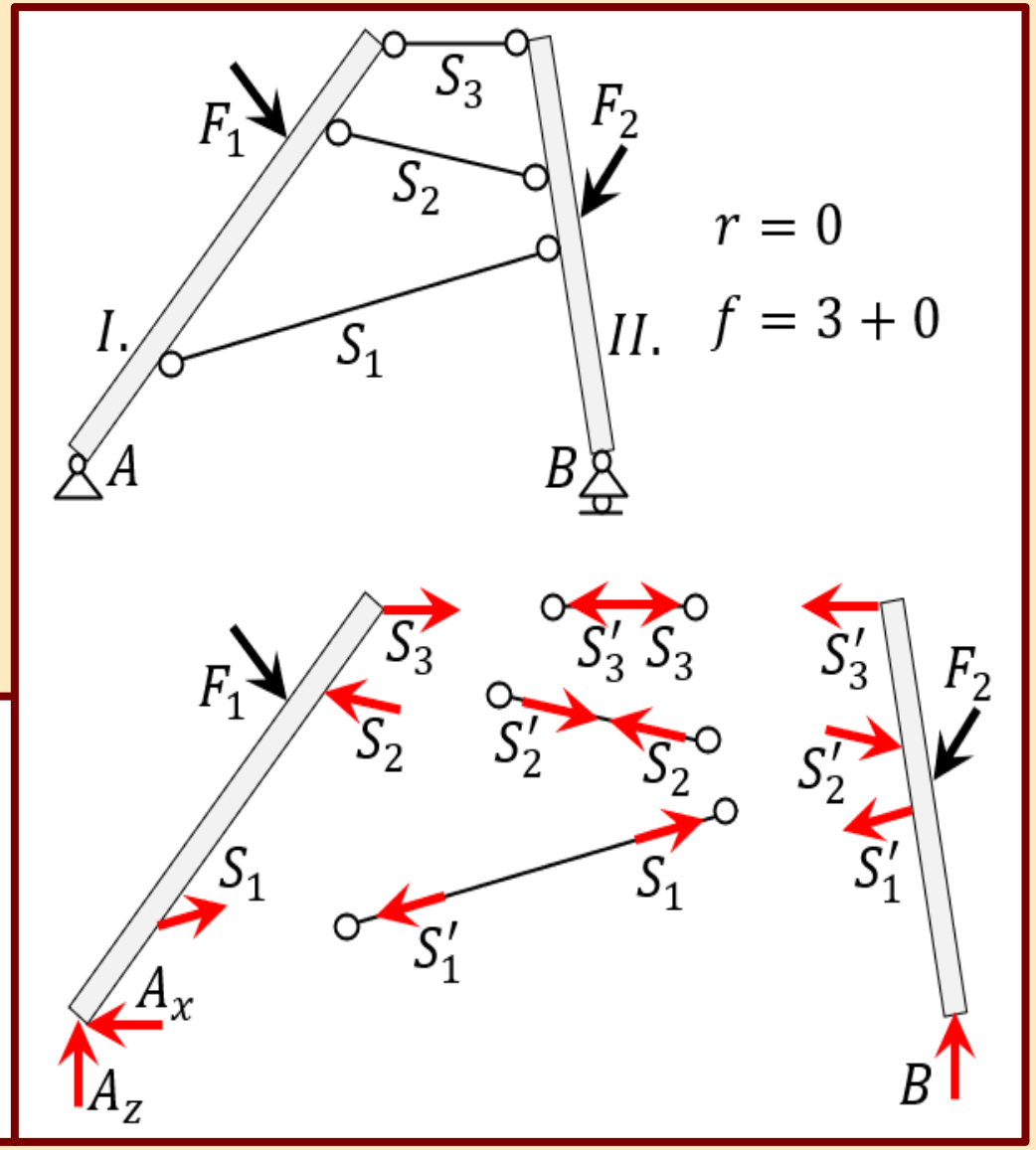
$$E: \sum F_{iz} = 0 \;\rightarrow A_z$$

$$I.: \sum M_i^{O_1} = 0 \rightarrow S_1$$

$$I.: \sum M_i^{O_2} = 0 \rightarrow S_2$$

$$I.: \sum M_i^{O_3} = 0 \rightarrow S_3$$





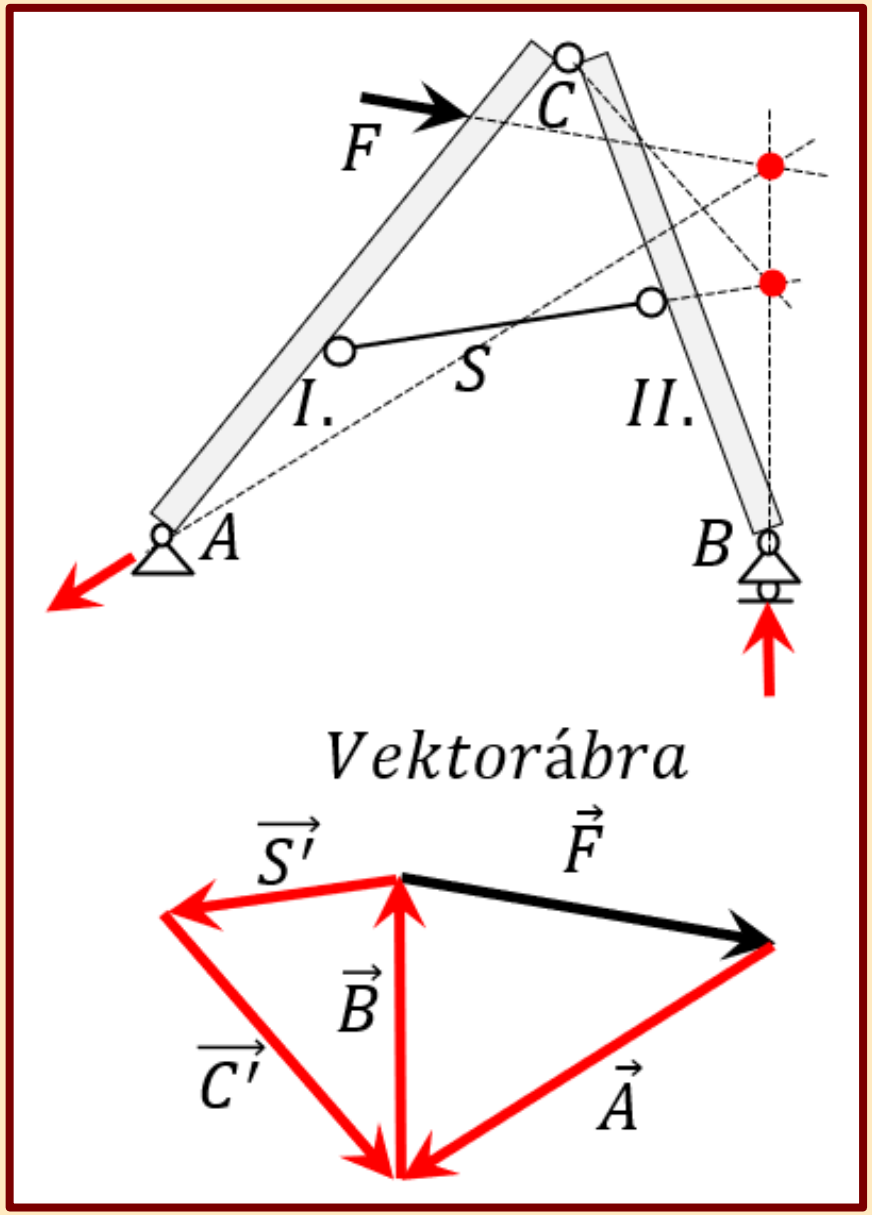
ÖSSZETETT TARTÓ KÉNYSZERERŐI SZERKESZTÉSSEL

- Az egyes egyensúlyi kijelentésekben szereplő erőknek zárt nyílfolytonos vektorábrát kell szolgáltatnia.

  $E(F;A;B) \doteq 0$

  $I.(F;A;S;C) \doteq 0 \qquad II.(B;S';C') \doteq 0$

- Amely egyensúlyi kijelentésben három erő szerepel, ott érvényesíthető a három erő egyensúlyára vonatkozó (II.) axióma. Ennek megfelelően a három erő hatásvonalának közös metszésponton kell áthaladnia, majd a vektoraikból nyílfolytonos zárt háromszög szerkeszthető.
- Az egyes erők hatásvonala előre nem ismert (pl. „A” támaszerő), de a közös metszéspont feltétel teljesítése miatt így meghatározhatóvá válik. Valamennyi kérdéses erő nagysága a vektorábra segítségével leolvasható.



Tartószerkezetek mechanikája I.

5.

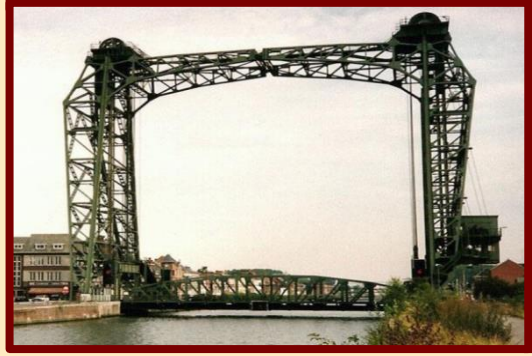
Síkbeli tartószerkezetek:

háromcsuklós tartó, Gerber-tartó

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

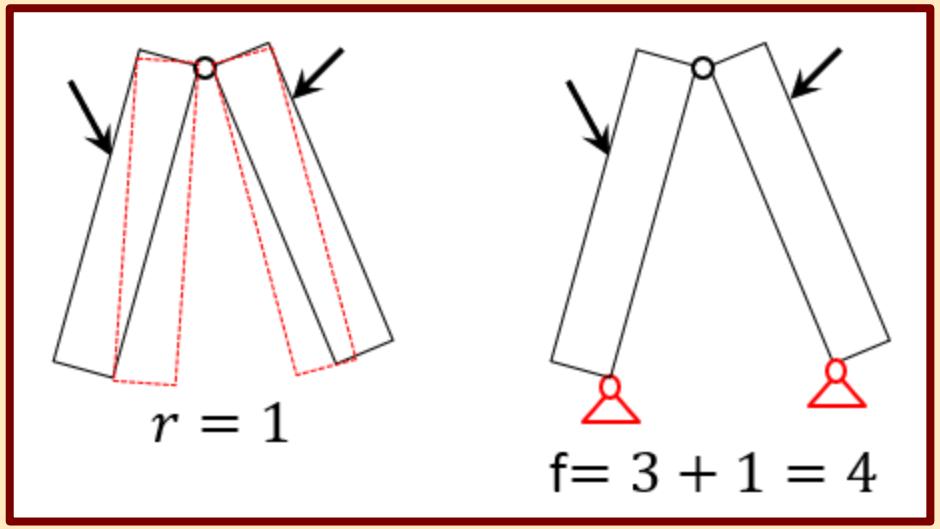
HÁROMCSUKLÓS TARTÓK MEGHATÁROZÁSA

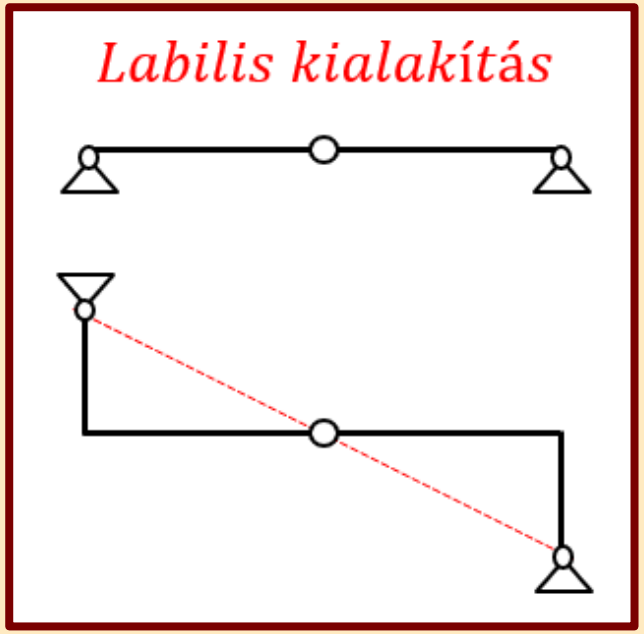
- Ha két merev testet egymáshoz egy csuklóval, valamint a talajhoz két csuklóval rögzítünk, akkor a kialakított tartószerkezetet háromcsuklós tartónak nevezzük.
- A háromcsuklós tartó egy összetett tartó. Általában csarnokszerkezeteknél és hidaknál alkalmazzák. Kinematikai terhekre (pl. hőmérséklet-változás) nem érzékeny, egyszerűen alapozható, könnyen szállítható.
- Alakjuk alapján beszélhetünk háromcsuklós keretről és háromcsuklós ívről.



HÁROMCSUKLÓS TARTÓK KIALAKÍTÁSA

- Két merev test egy csuklóval történő összekötése belsőleg labilis kapcsolatot eredményez, ahol a merevségi hiány egy lesz. A csukló a két test közötti eltolódásokat megakadályozza, de a relatív elfordulásukat nem.
- A merevségi hiányt (r=1) kívülről kompenzáljuk a külső megtámasztások összfokszámát a merevségi hiány értékével növelve (f=4). Az ennek alapján alkalmazott két csuklós támasz egy egészében merev és statikailag határozott tartót hoz létre.
- A merev kialakításhoz még szükséges a három csuklóra vonatkozó azon feltételt is biztosítani, mely szerint azok nem eshetnek egy egyenesbe, mert abban az esetben labilissá válik a tartó.





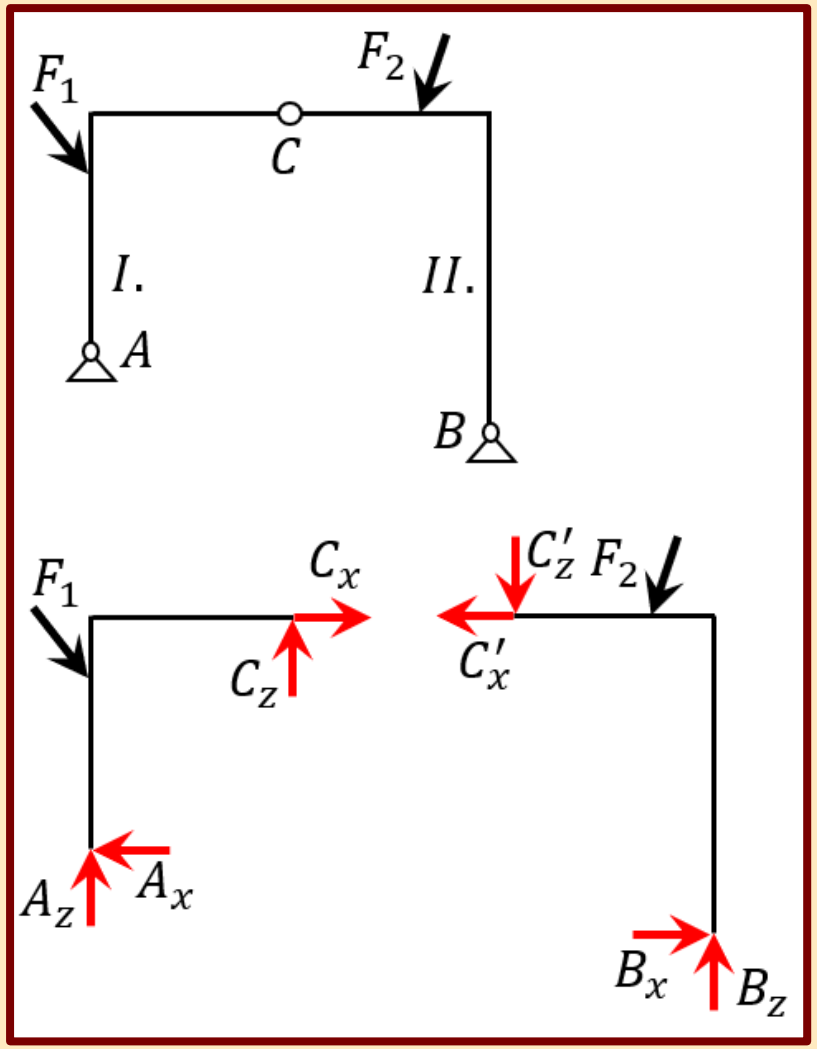
HÁROMCSUKLÓS TARTÓK KÉNYSZERERŐI
A TÁMASZOK ELTÉRŐ MAGASSÁGA ESETÉN

- Eltérő támaszmagasságú tartó esetén nem tudunk egyismeretlenes egyenletet felírni, csak egyenletrendszer felírásával kezdhetjük a megoldást.
- Egyensúlyi kijelentések:

$$E\,(F_1; F_2; A_x; A_z; B_x; B_z) \doteq 0$$
$$I.\,(F_1; A_x; A_z; C_x; C_z) \doteq 0$$
$$II.\,(F_2; B_x; B_z; C_x'; C_z') \doteq 0$$

- Egyensúlyi egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} E&: \sum M_i^B = 0 \\ I.&: \sum M_i^C = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_x; A_z \text{ (egyenletrendszerből)}$$
$$I.: \sum F_{ix} = 0 \rightarrow C_x$$
$$I.: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow C_z$$
$$E: \sum F_{ix} = 0 \rightarrow B_x$$
$$E: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow B_z$$



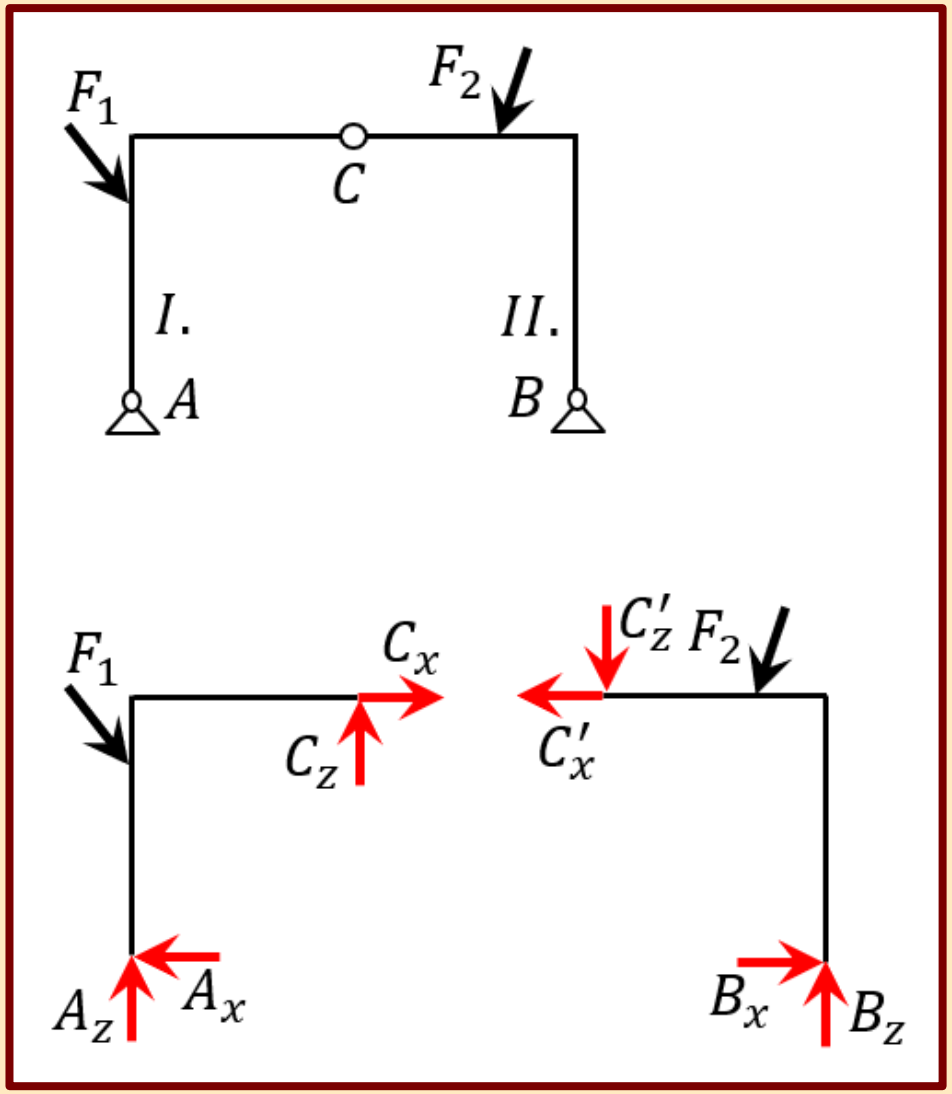
A TÁMASZOK AZONOS MAGASSÁGA ESETÉN

- Azonos támaszmagasságú tartó esetén a kétismeretlenes egyenletekből álló egyenletrendszer egyismeretlenes egyenletekké esik szét.
- Egyensúlyi kijelentések:

$$E\,(F_1; F_2; A_x; A_z; B_x; B_z) \doteq 0$$
$$I.\,(F_1; A_x; A_z; C_x; C_z) \doteq 0$$
$$II.\,(F_2; B_x; B_z; C_x'; C_z') \doteq 0$$

- Egyensúlyi egyenletek: valamennyi ismeretlen egyismeretlenes egyenletből meghatározható.

$$E: \sum M_i^B = 0 \rightarrow A_z$$
$$I.: \sum M_i^C = 0 \rightarrow A_x$$
$$I.: \sum F_{ix} = 0 \rightarrow C_x$$
$$I.: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow C_z$$
$$E: \sum F_{ix} = 0 \rightarrow B_x$$
$$E: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow B_z$$



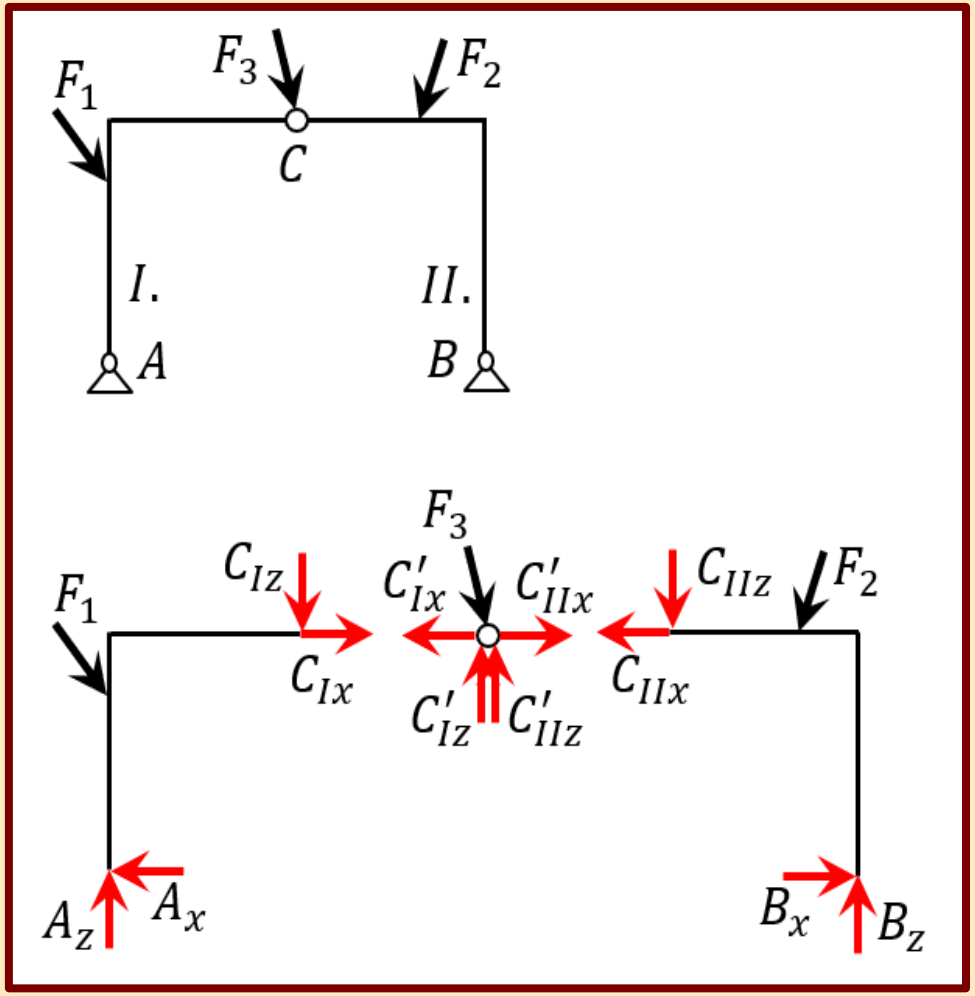
ERŐVEL TERHELT CSUKLÓ ESETÉN

- Ha a csuklón terhelő erő működik, akkor a csukló egyensúlyát külön vizsgáljuk. Nem két, hanem három erő egyensúlya érvényesül, a két testről átadódó erő nem egymás ellentettje lesz.
- Egyensúlyi kijelentések:

$$E\,(F_1; F_2; F_3; A_x; A_z; B_x; B_z) \doteq 0$$
$$I.\,(F_1; A_x; A_z; C_{Ix}; C_{Iz}) \doteq 0$$
$$II.\,(F_2; B_x; B_z; C_{IIx}; C_{IIz}) \doteq 0$$
$$C.\,(F_3; C'_{Ix}; C'_{Iz} C'_{IIx}; C'_{IIz}) \doteq 0$$

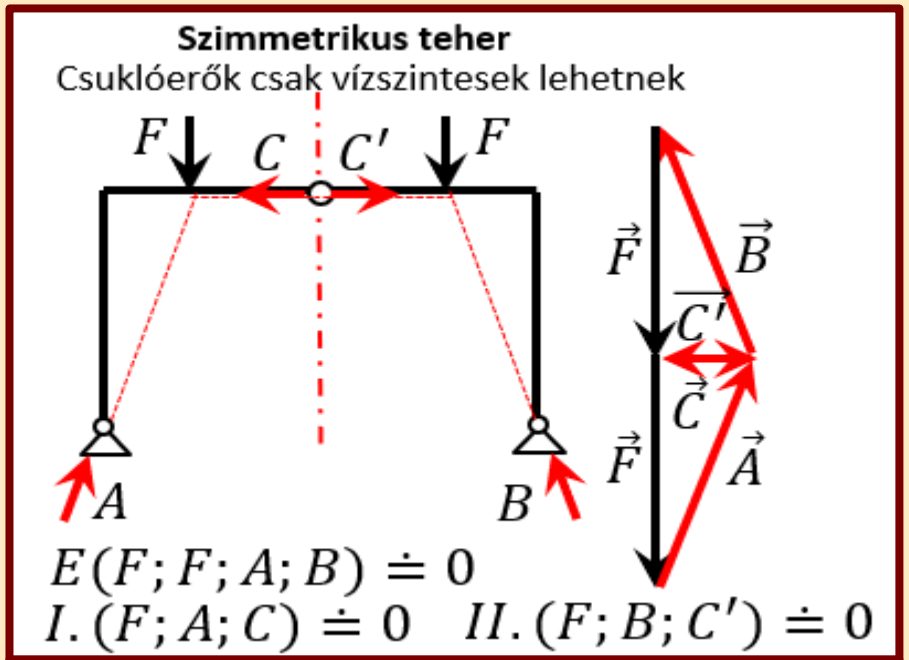
- Egyensúlyi egyenletek:

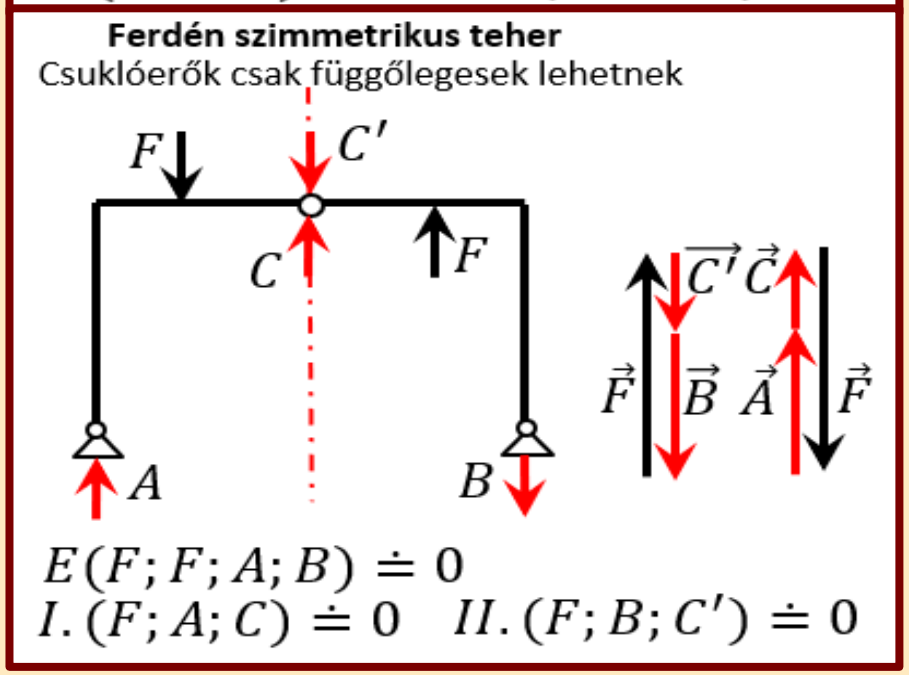
$$E: \sum M_i^B = 0 \rightarrow A_z$$
$$E: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow B_z$$
$$I.: \sum M_i^C = 0 \rightarrow A_x \qquad II.: \sum M_i^C = 0 \rightarrow B_x$$
$$I.: \sum F_{ix} = 0 \rightarrow C_{Ix} \qquad II.: \sum F_{ix} = 0 \rightarrow C_{IIx}$$
$$I.: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow C_{zI} \qquad II.: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow C_{IIz}$$



A SZIMMETRIATULAJDONÁGOK ÉS A KÉNYSZERERŐK

- A tartó szimmetriatulajdonságai és a velük kapcsolatos megállapítások felismerése és alkalmazása a kényszererők meghatározását leegyszerűsítheti.
- Ha a tartó geometriája, valamint megtámasztása szimmetrikus, és ezenkívül a terhelés is szimmetrikus, akkor a külső és belső kényszererők is szimmetrikusan alakulnak.
- Ha a tartó geometriája, valamint megtámasztása szimmetrikus, és ezenkívül a terhelés ferdén szimmetrikus, akkor a külső és belső kényszererők is ferdén szimmetrikusan alakulnak.
- A szimmetriával kapcsolatos összefüggések nemcsak a háromcsuklós tartónál, hanem valamennyi tartótípusnál alkalmazhatóak.

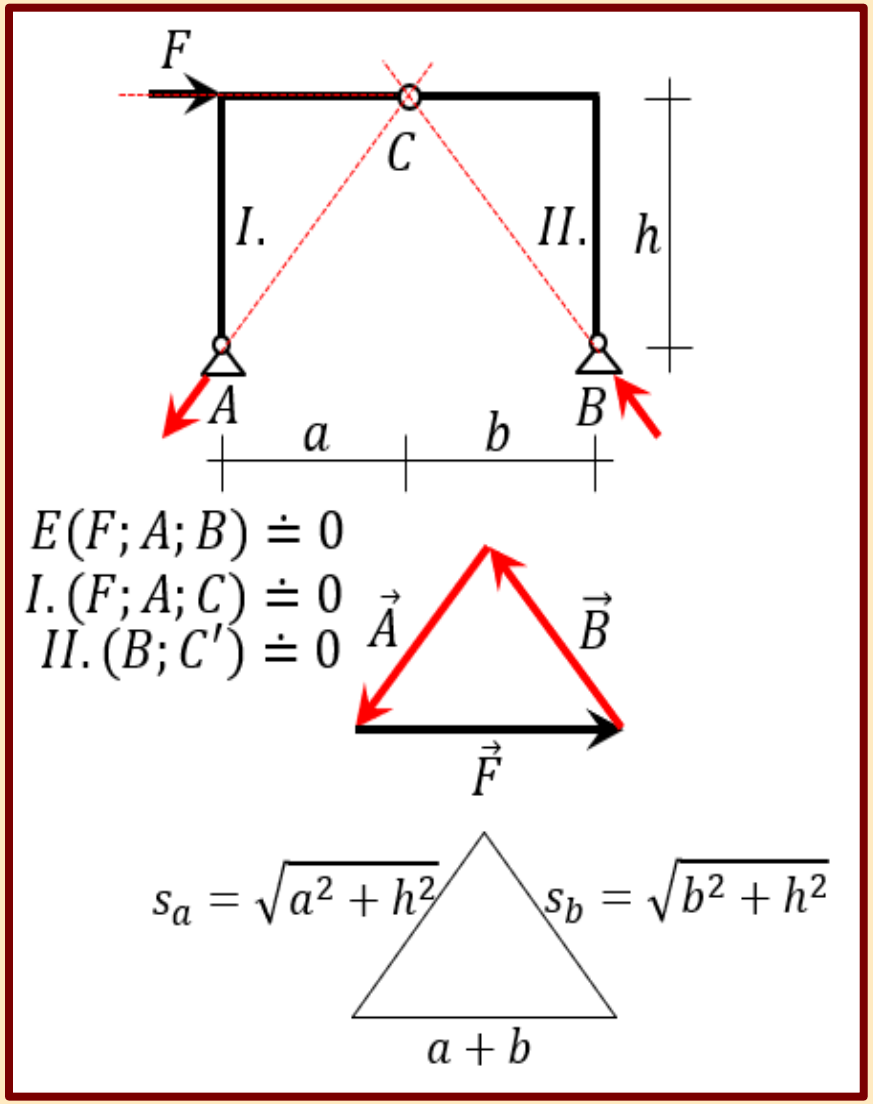




KÉNYSZERERŐK HÁROM ERŐ EGYENSÚLYÁVAL

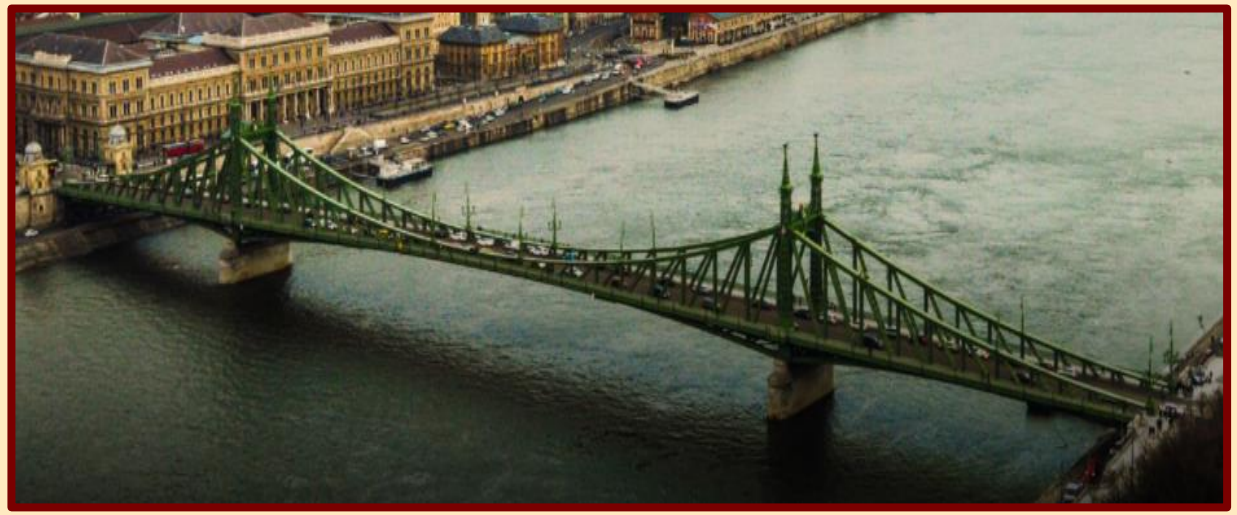
- Egyszerűbb terhelési esetekben a három erő egyensúlyán alapuló grafoanalítikus megoldás segítségével könnyen meghatározhatjuk a kényszererők irányát és akár nagyságát is.
- A terheletlen tartórészen (II.) a belső és a külső csuklóerő tart egyensúlyt, vagyis két erő egyensúlya érvényesül, amely alapján az erők a két csuklót összekötő hatásvonalban működnek. Ezután érvényesíthetjük a tartó egészére vonatkozó három erő egyensúlyát. A közös metszéspont és a zárt, nyílfolytonos háromszög segítségével, számítás útján (aránypárokkal) a kényszererők nagyságát meghatározhatjuk:

$$B = F \cdot \frac{s_b}{a+b} \qquad A = F \cdot \frac{s_a}{a+b}$$



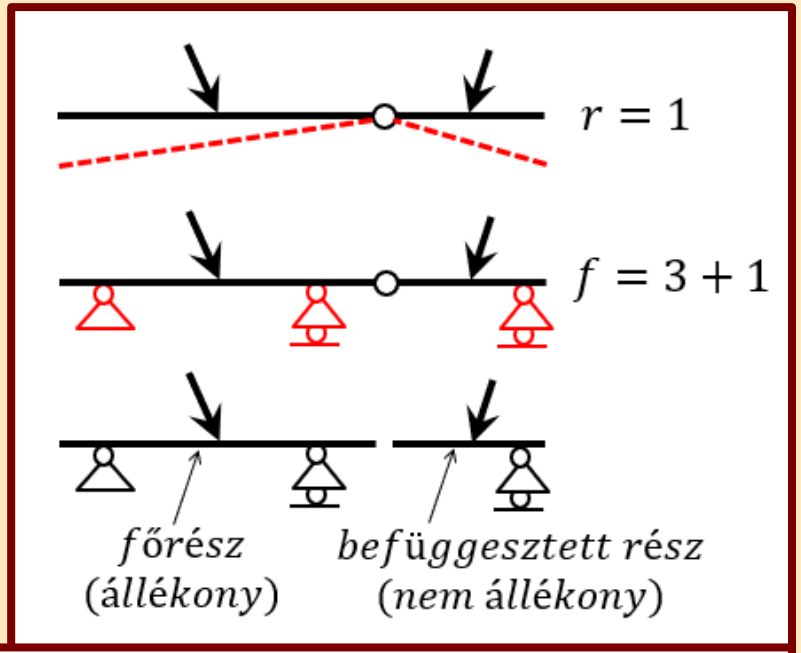
GERBER-TARTÓK MEGHATÁROZÁSA

- Ha kettő vagy több merev testet egymáshoz csuklóval, valamint a talajhoz a megfelelő kényszerekkel rögzítünk, akkor a kialakított tartószerkezetet Gerber-tartónak, vagy csuklós többtámaszú tartónak nevezzük.
- A Gerber-tartó mindig statikailag határozott és merev megtámasztású összetett tartó. Működési rendszeréből adódóan bármennyi test összekapcsolására alkalmas, nagy fesztávok áthidalását teszi lehetővé statikailag határozott módon.
- Alkalmazása akkor indokolt, ha a statikai határozottság fenntartása számítási vagy szerkezeti szempontok miatt szükséges.

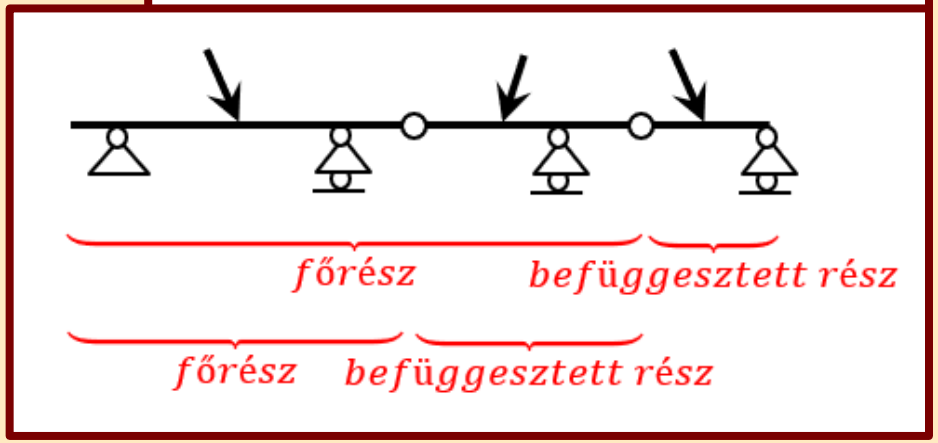


GERBER-TARTÓK KIALAKÍTÁSA

- Csuklóval összekapcsolt két merev test belsőleg labilis kapcsolatot hoz létre. A kialakuló belső merevségi hiányt külső merevségi többlettel kompenzáljuk, vagyis az külső kényszerek összfokszámát ezzel az értékkel növeljük a statikailag határozott kialakításhoz. A kialakult tartónak merevnek is kell lennie, amelyet szemléletből ellenőrzünk.



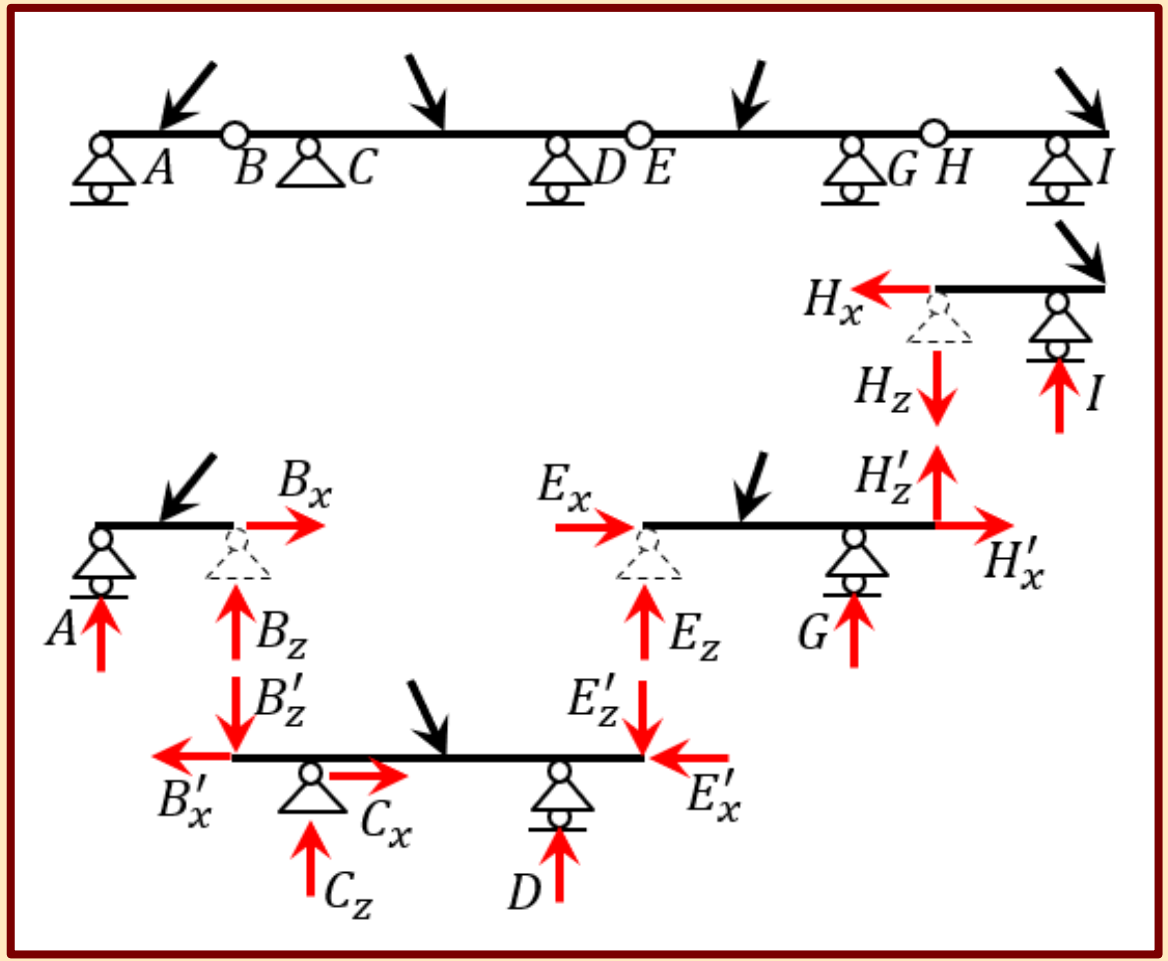
- A két rész közül az egyik önmagában is állékony, ezt főrésznek nevezzük.
- A másik részt, amely önmagában nem állékony, befüggesztett résznek hívjuk. Egyensúlya a főrész megtámasztó hatásával biztosított.



- A befüggesztett rész – főrész viszony, vagyis a megtámasztott – megtámasztó szerepkör mindig elempáronként (kapcsolatonként) vizsgálandó.

GERBER-TARTÓK KÉNYSZERERŐI

- A tartórészek befüggesztett rész – főrész kapcsolatokba sorolása megadja a tartó támaszkodási hierarchiáját és egyúttal a kapcsolati erők számítási sorrendjét.
- A számítást mindig a befüggesztett rész vizsgálatával kezdjük, több részből álló tartó esetén pedig azzal a résszel, amelyre egyetlen másik rész sem támaszkodik. Ezen részeken van a felírható egyenleteknek megfelelő számú ismeretlen.
- A befüggesztett részen kapott, a főrész megtámasztó jellegéből adódó csuklóerőt a főrész vizsgálatakor ellentettjeként, a befüggesztett részről adódó terhelő erőként vesszük figyelembe.



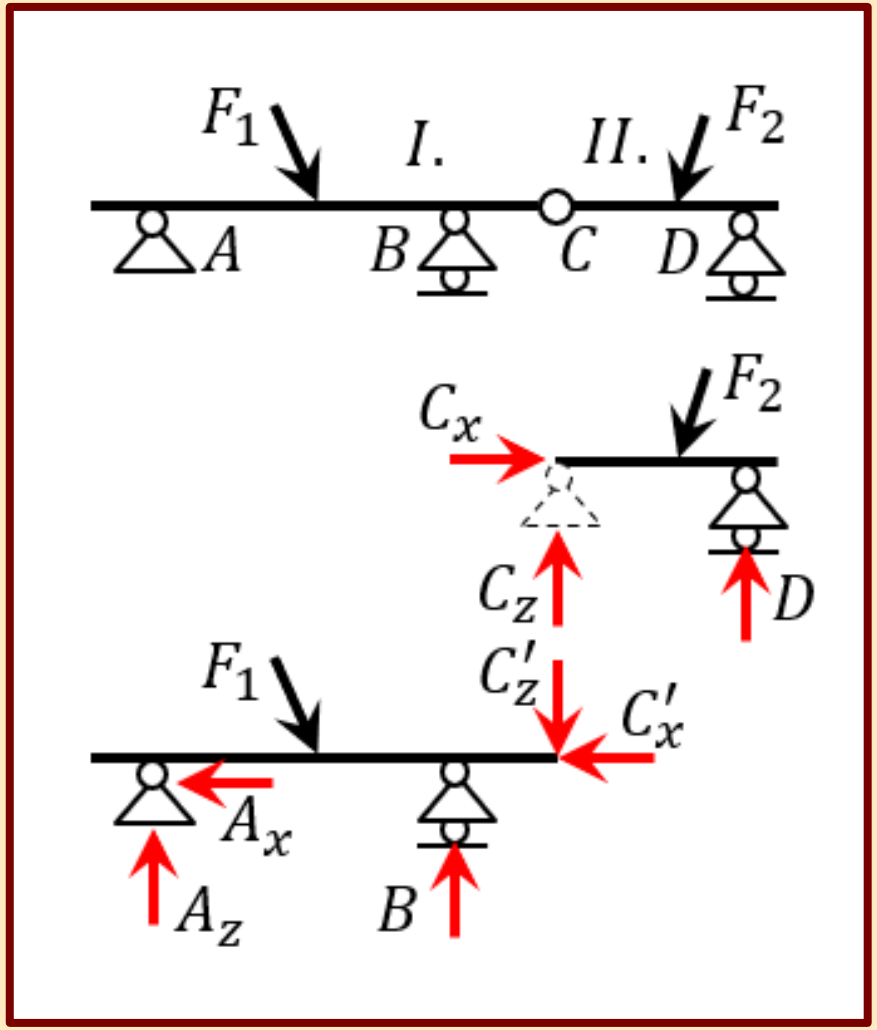
KÉNYSZERERŐK KÉT TESTBŐL ÁLLÓ TARTÓ ESETÉN

- Mindkét tartórész kapcsolatai a kéttámaszú tartóénak felelnek meg. A számítást csak a II. részről tudjuk kezdeni, ott van az egyenleteknek megfelelő számú három darab ismeretlen.
- Egyensúlyi kijelentések:

$$E(F_1; F_2; A_x; A_z; B; D) \doteq 0 \quad \rightarrow 4\ ism.$$
$$I.(F_1; A_x; A_z; B; C_x'; C_z') \doteq 0 \quad \rightarrow 5\ ism.$$
$$II.(F_2; C_x; C_z; D) \doteq 0 \quad \rightarrow 3\ ism.$$

- Egyensúlyi egyenletek:

$$II.: \sum M_i^C = 0 \quad \rightarrow D$$
$$II.: \sum F_{ix} = 0 \quad \rightarrow C_x$$
$$II.: \sum F_{iz} = 0 \quad \rightarrow C_z$$
$$I.: \sum M_i^A = 0 \quad \rightarrow B$$
$$I.: \sum F_{ix} = 0 \quad \rightarrow A_x$$
$$I.: \sum F_{iz} = 0 \quad \rightarrow A_z$$



KÉNYSZERERŐK TÖBB TESTBŐL ÁLLÓ TARTÓ ESETÉN

- A számítást csak a III. részről tudjuk kezdeni, ott van az egyenleteknek megfelelő számú három ismeretlen. Az E csukló csak függőleges erőt közvetít a IV. részre.
- Egyensúlyi kijelentések:

$$E\,(F_1; F_2; A_x; A_z; M_A; C; G; H) \doteq 0 \qquad I.\,(F_1; A_x; A_z; M_A; B'_x; B'_z) \doteq 0$$

$$II.\,(B_x; B_z; C; D'_z; D'_x) \doteq 0 \qquad III.\,(F_2; D_x; D_z; E) \doteq 0$$

$$IV.\,(E'; G; H) \doteq 0$$

- Egyensúlyi egyenletek:

$$III.: \sum M_i^D = 0 \rightarrow E$$

$$III.: \sum F_{ix} = 0 \rightarrow D_x$$

$$III.: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow D_z$$

$$II.: \sum M_i^B = 0 \rightarrow C \qquad IV.: \sum M_i^G = 0 \rightarrow H$$

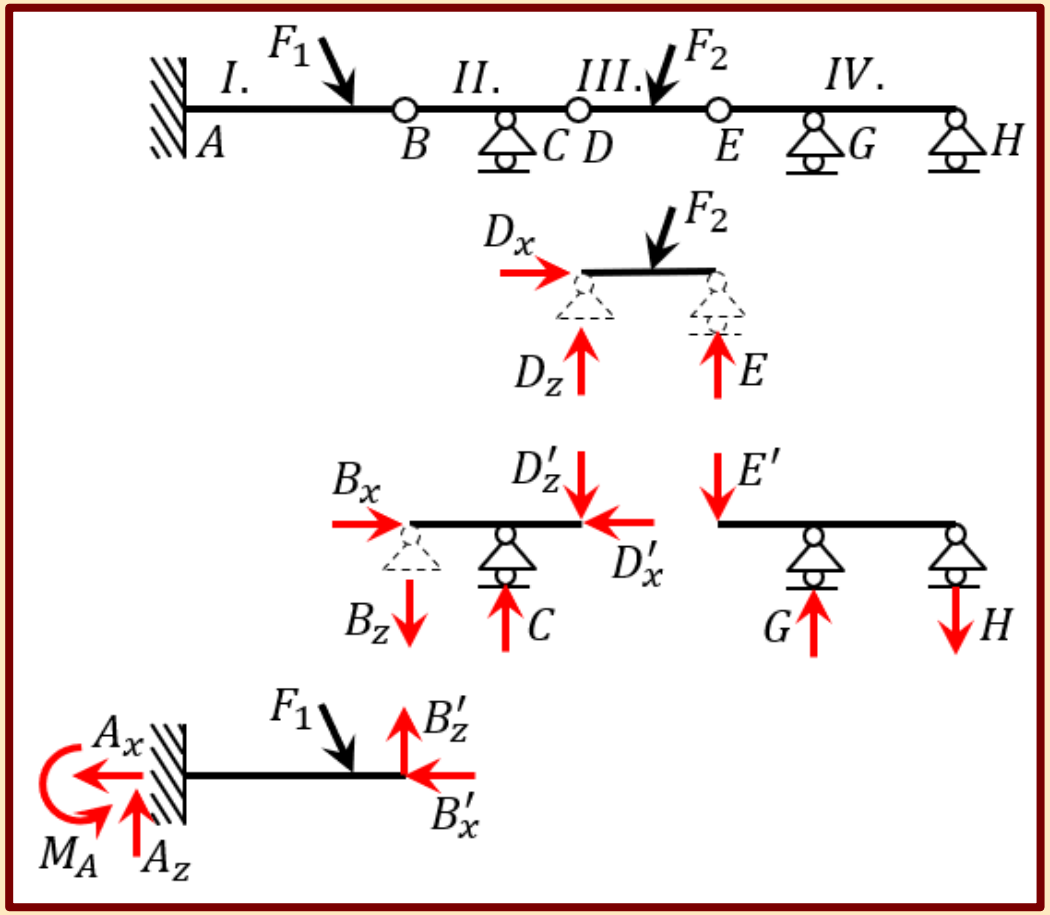
$$II.: \sum F_{ix} = 0 \rightarrow B_x \qquad IV.: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow G$$

$$II.: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow B_z$$

$$I.: \sum M_i^A = 0 \rightarrow M_A$$

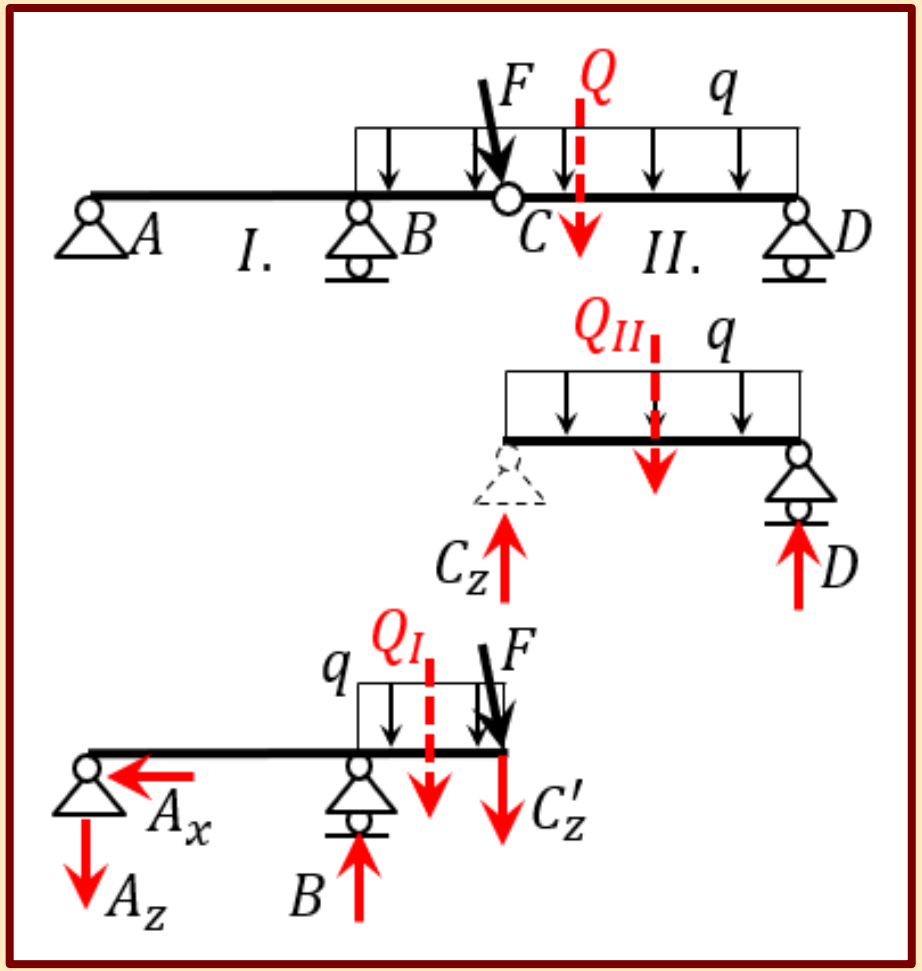
$$I.: \sum F_{ix} = 0 \rightarrow A_x$$

$$I.: \sum F_{iz} = 0 \rightarrow A_z$$



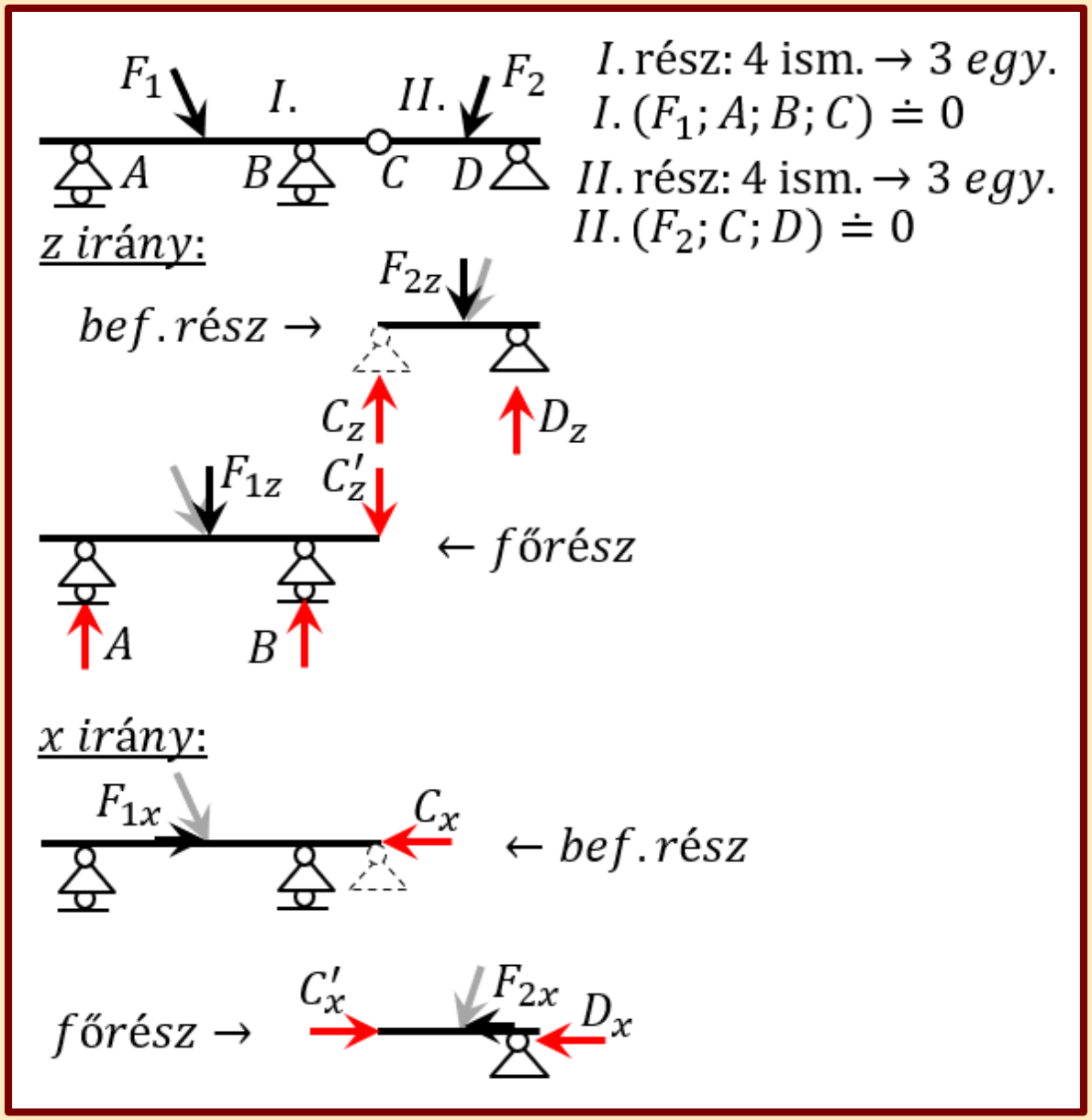
MEGOSZLÓ TEHER ÉS CSUKLÓT TERHELŐ KONCENTRÁLT ERŐ

- A megoszló terhet, ha áthalad a belső csukló felett, az egyes tartórészeken külön-külön vesszük figyelembe a csuklónál történő kettéválasztással. Az eredőiket az így kapott egyes szakaszokon állítjuk elő.
- Ha egy csuklót koncentrált erő terhel, akkor az eddigiek alapján a csukló egyensúlyát külön kell vizsgálni. Gerber – tartónál egyszerűsítésként a csuklót és a rajta működő erőt a főrészhez csatolhatjuk, vagyis ezt az erőt csak a főrész egyensúlyában résztvevőnek minősíthetjük. Természetesen szükség esetén a csukló egyensúlya külön is vizsgálható.



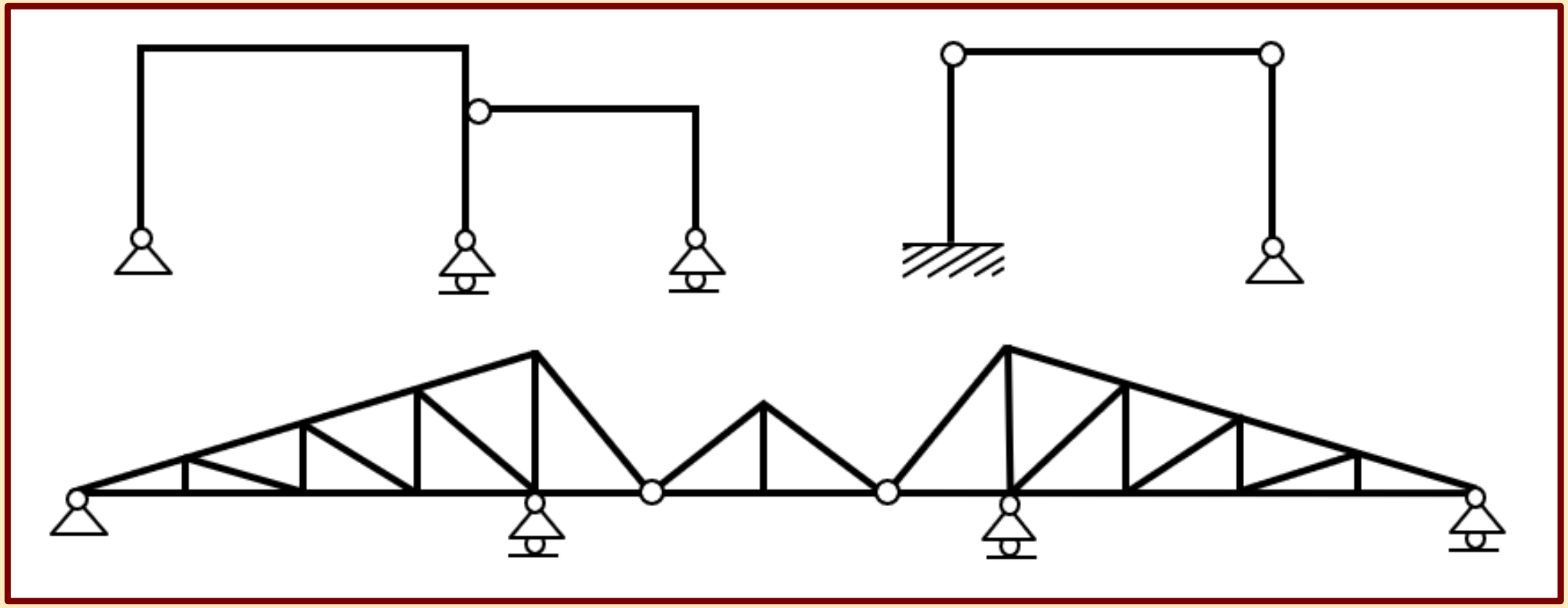
FÜGGŐLEGES ÉS VÍZSZINTES TERHEK KÜLÖNVÁLASZTÁSA

- Lehetséges olyan megtámasztása a Gerber-tartónak, amely esetén a függőleges és vízszintes erőkkel kapcsolatos támaszkodási hierarchia nem azonos, az erőátadódás iránya nem egyezik meg, vagyis a tartórészek főrész-befüggesztett rész viszonya eltér egymástól.
- Ebben az esetben a függőleges és vízszintes erők egyensúlyát egymástól külön tudjuk csak vizsgálni.
- Ha a tartó egyetlen elemén sem találunk az egyenletekkel megegyező számú ismeretlent, akkor általában erről az esetről van szó.



GERBER RENDSZERŰ TARTÓK

- Azokat a tartókat sorolhatjuk ide, amelyek nem vízszintes tengelyű gerenda elemekből épülnek fel, tehát Gerber-tartónak nem nevezhetőek, de működési rendszerük tekintetében viszont megegyeznek vele.



Tartószerkezetek mechanikája I.

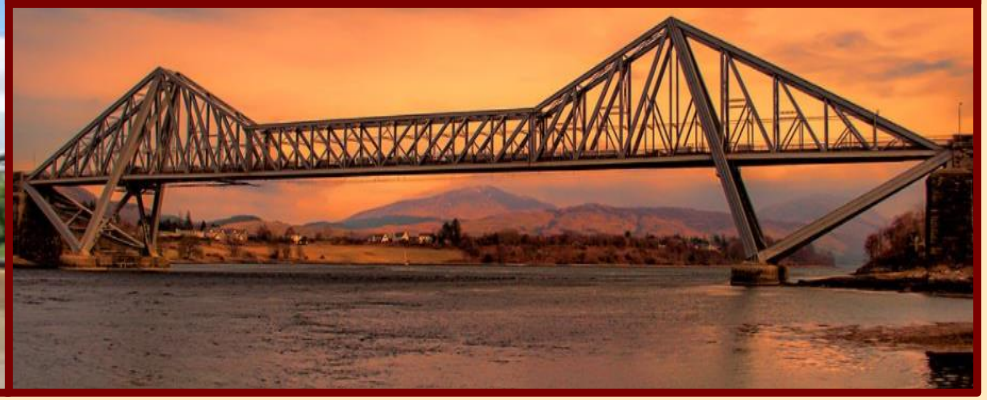
6.

Síkbeli tartószerkezetek: rácsostartók

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

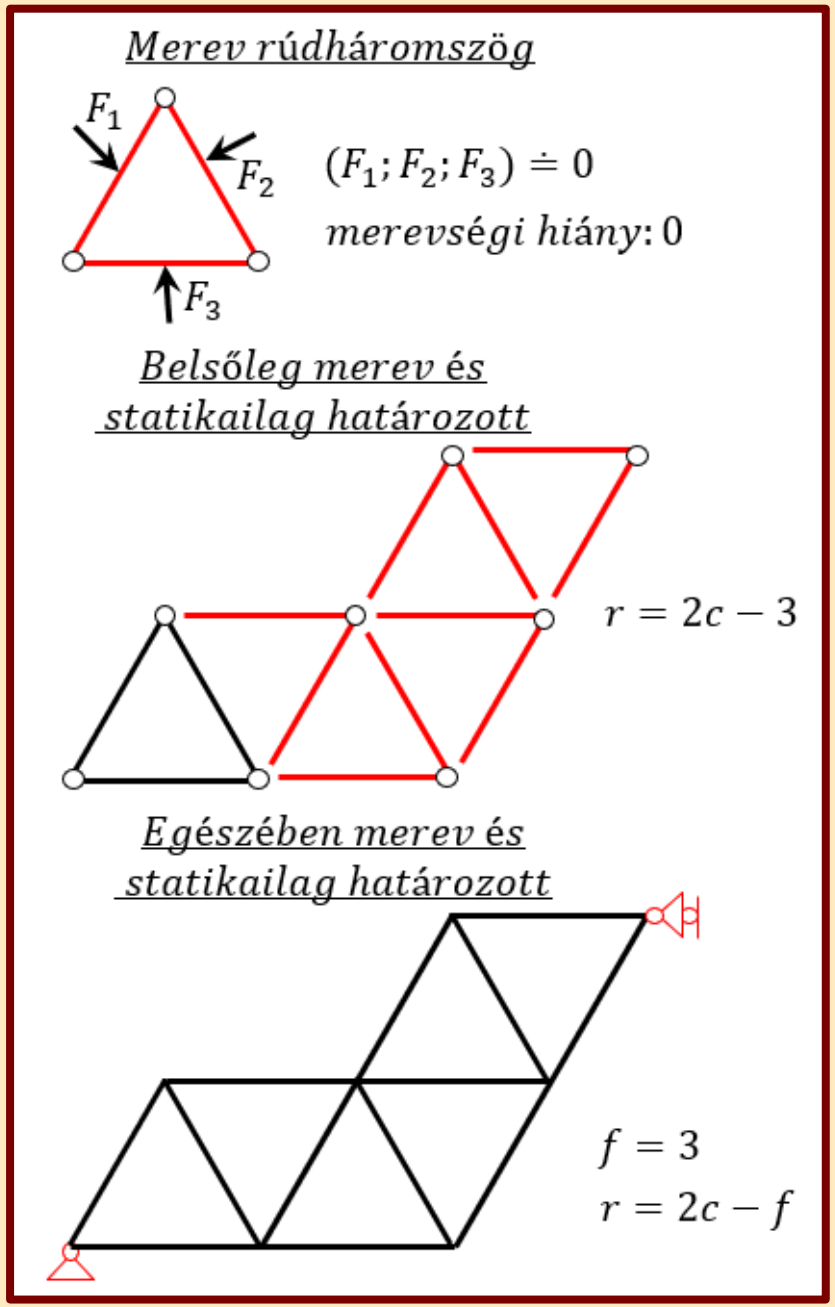
RÁCSOSTARTÓK MEGHATÁROZÁSA

- Ha egyenes tengelyű rúd elemeket csuklóval a rúdvégeiken egymáshoz kapcsolunk, úgy hogy azok merev rúdháromszögek sorozatát hozzák létre és az így kialakuló testet külső kényszerekkel megfelelően a talajhoz rögzítjük, akkor a kialakult tartószerkezetet rácsostartónak nevezzük.
- A rácsos szerkezetek alkalmazása sokrétű, például hidak, tetőszerkezetek, daruk kialakításánál használják.



RÁCSOSTARTÓK KIALAKÍTÁSA

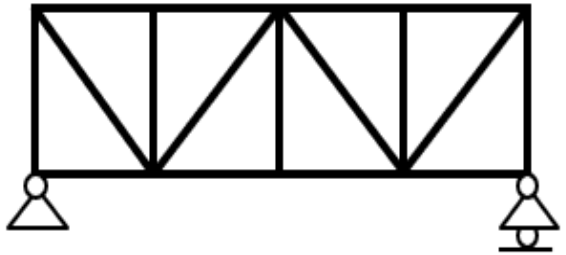
- Ha három rúdelemet csuklókkal összekapcsolva egy háromszöggé alakítunk, akkor az merev alakzatot hoz létre, vagyis az egyes elemek elmozdulásmentesek lesznek egymáshoz viszonyítva.
- Rácsos szerkezetet kialakíthatunk merev háromszögek lineáris egymásután kapcsolásával. Ennek a hálózatfejlesztési elvnek az érvényesüléséhez minden további csomópontot két rúddal kell az eddigiekhez kötnünk. A határozott és merev kialakítás szükséges feltétele: r=2c-3, ahol r a rudak, c a csomópontok száma.
- Az így kialakított merev testet az eddigieknek megfelelően kell a talajhoz rögzítenünk külső kényszerekkel (f=2c-r).



STATIKAI HATÁROZOTTSÁG ÉS MEREVSÉG

- A határozottság és merevség kérdése belsőleg és külsőleg is vizsgálható. A vizsgált hálózatfejlesztési elvtől eltérve kialakíthatunk belsőleg labilis szerkezetet is, ha a rudak száma eltér az r=2c-3 összefüggéstől, vagy a rudakat helytelenül, nem a lineáris sorolásnak megfelelően helyezzük el.
- Az összetett tartókhoz hasonlóan belsőleg labilis kialakítás esetén a belső merevségi hiányt a külső kényszerek fokszámával kompenzálva kialakíthatunk egészében statikailag határozott és merev tartót.

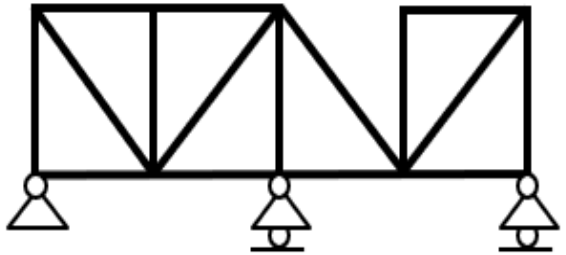
Belsőleg és egészében merev és statikailag határozott



$f + r = 2c$

$3 + 17 = 20$

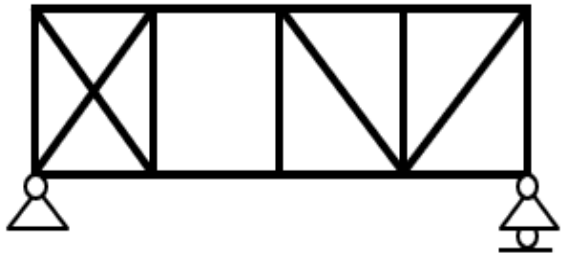
Belsőleg labilis, egészében merev és statikailag határozott



$f + r = 2c$

$4 + 16 = 20$

Belsőleg labilis (egy részen túlmerevített) és egészében labilis

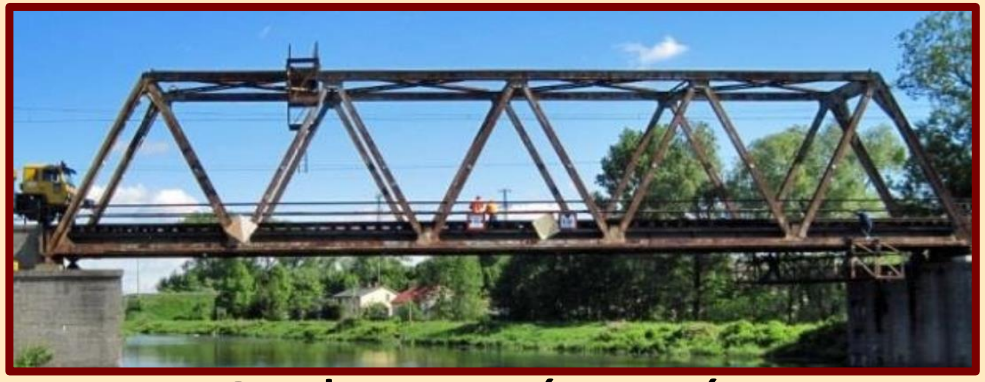


$f + r = 2c$

$3 + 17 = 20$

RÁCSOSTARTÓ HÁLÓZATI TÍPUSAI

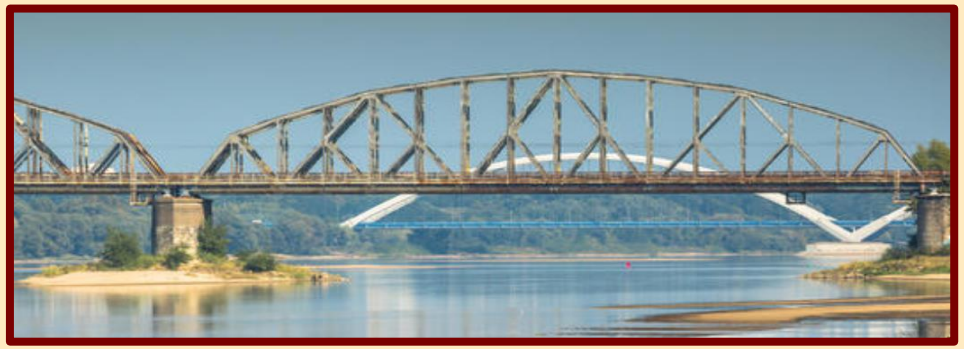
Szimmetrikus rácsozás



Szimmetrikus rácsozás oszlopokkal

Oszlopos rácsozás

Másodrendű rácsozás

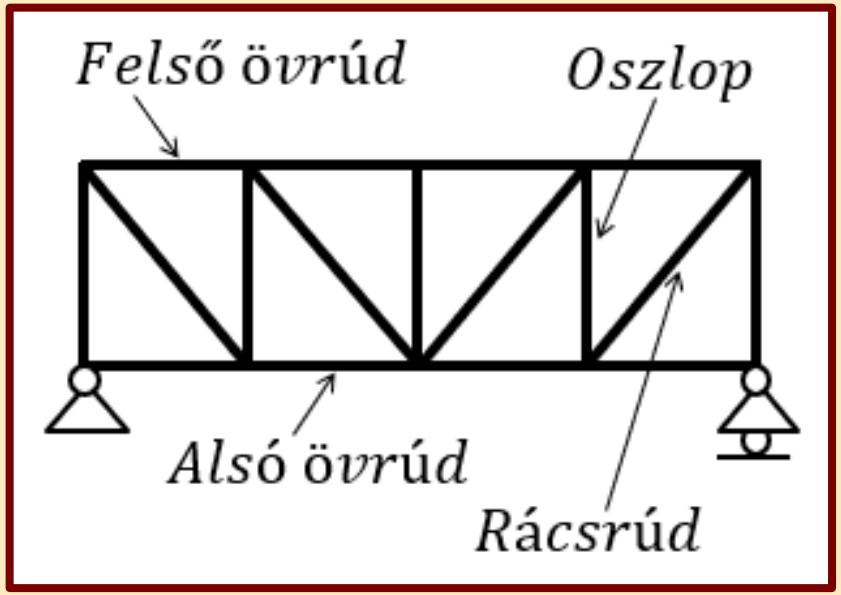


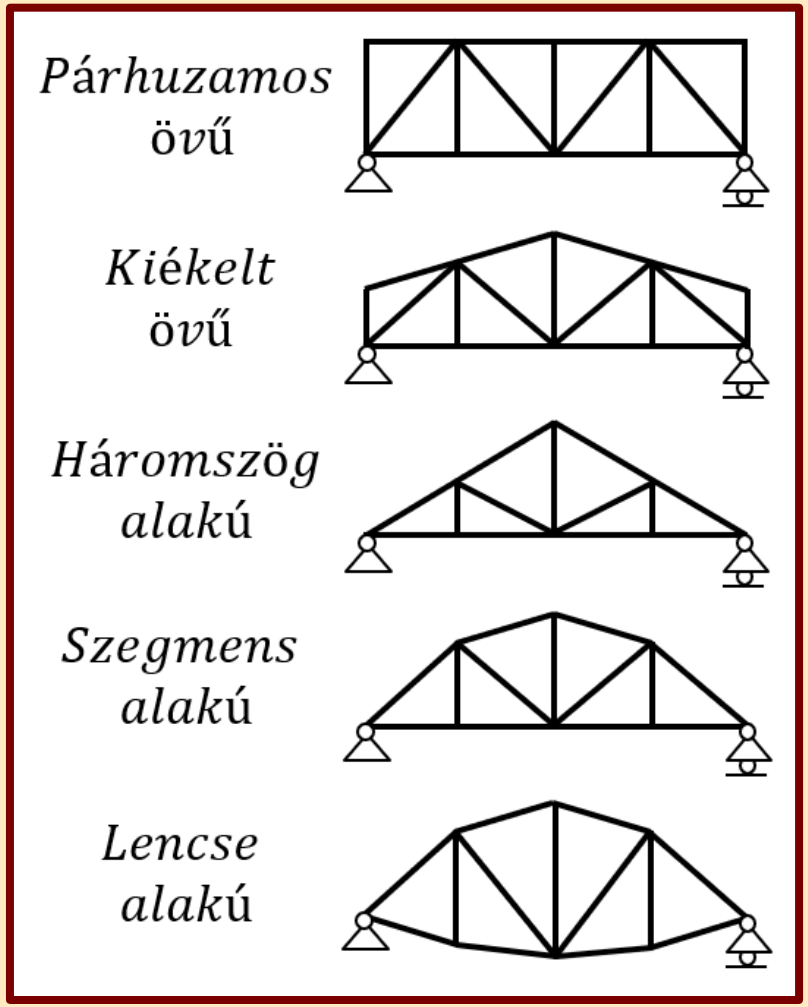
K rácsozás

X rácsozás

RÚDELNEVEZÉSEK ÉS TARTÓALAK

- A rácsostartó rúdjai a hálózatbeli elhelyezkedésük és ezáltal betöltött szerepük alapján külön elnevezéssel bírnak .





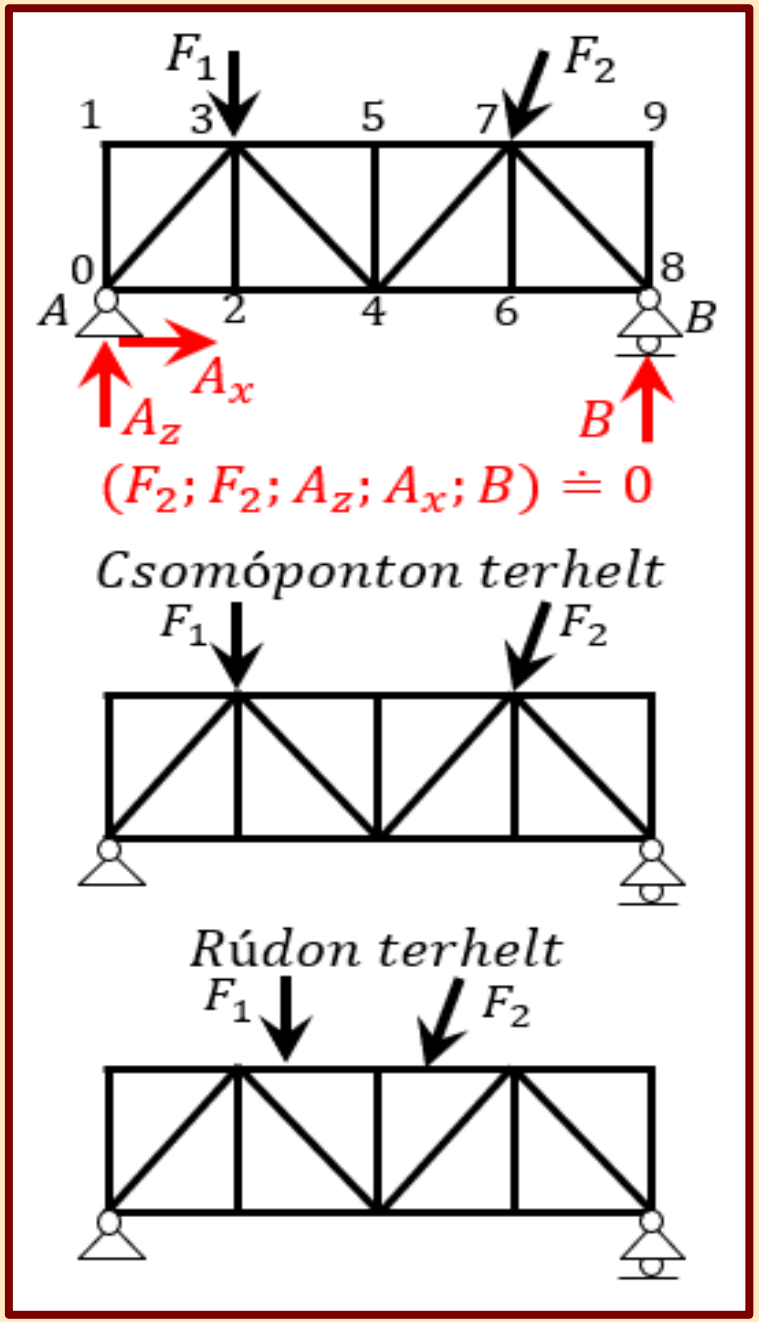
- A rácsostartó alakjának megválasztása a szerkezet működését nem, de a rúderők értékét valamennyire befolyásolni képes, ezen kívül az alaknak bizonyos funkcionális követelményeknek is meg kell felelnie (pl. tetőhajlás).

RÚDERŐK MEGHATÁROZÁSA

- A statikailag határozott és merev rácsostartók esetén a külső kényszererőket a szokásos módon felírt egyensúlyi egyenletekkel meghatározhatjuk:

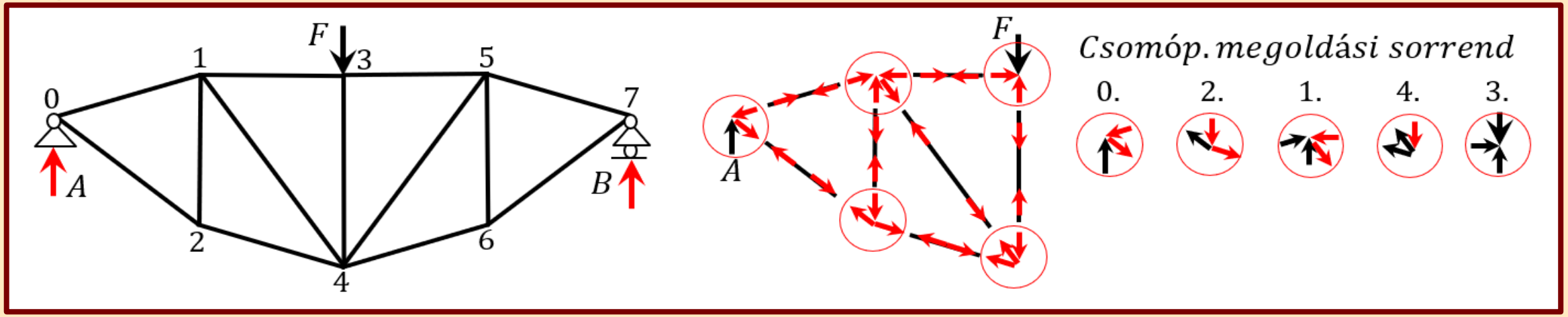
$$\sum M_i^A = 0; \ \sum F_{iz} = 0; \ \sum F_{ix} = 0$$

- A rúderőket kétféle megoldási módszer segítségével állíthatjuk elő: - csomóponti módszer
  - hármas átmetszés
- Az egyes módszerek alkalmazásakor használhatunk számító, szerkesztő és grafoanalítikus eljárást is.
- A rúderőket a rúdhoz a végein csatlakozó csomópontok számozása alapján jelöljük: S_{ij}
- A legtöbb esetben a rácsostartók csomóponton terheltek, de a megoldás szempontjából meg kell különböztetnünk rúdon terhelt rácsostartókat is.



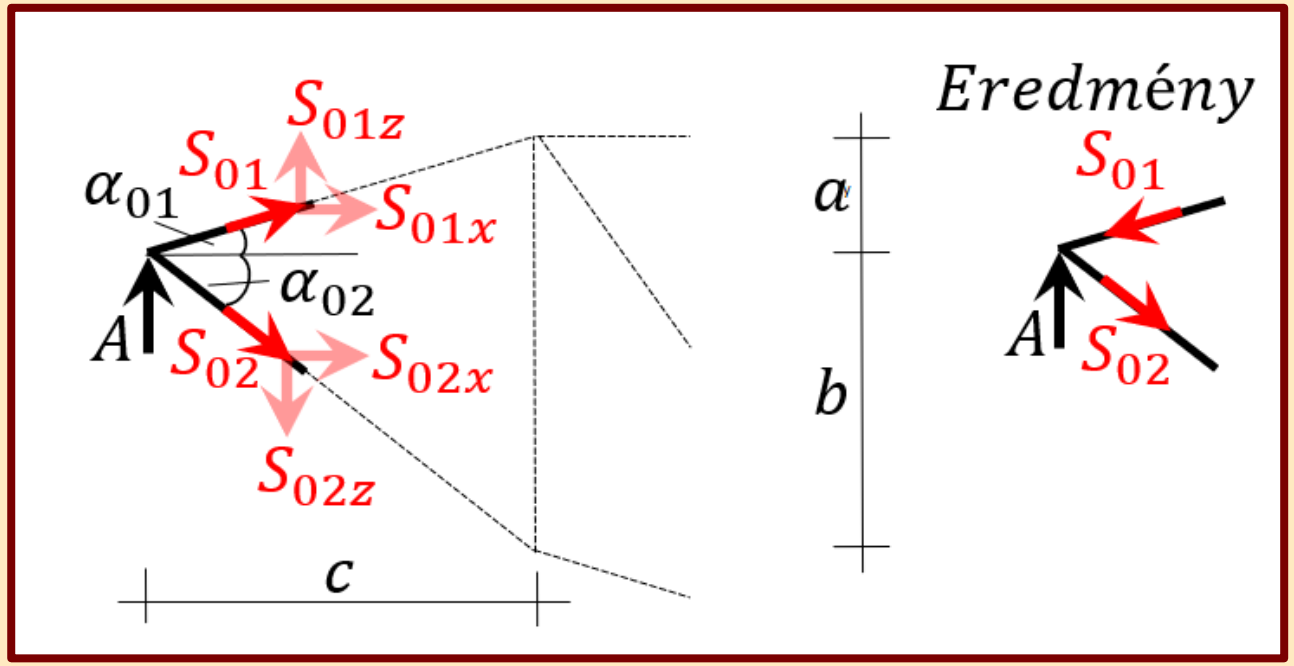
CSOMÓPONTI MÓDSZER

- Az egyes csomópontok egyensúlyát elkülönítve vizsgálhatjuk. A csomópontokat a biztonság javára közelítve csuklóként képzeljük el a valós befogott kapcsolat helyett.
- A csuklókra közös metszéspontú erők hatnak. Ez alapján két egyensúlyi egyenletet írhatunk fel. Emiatt csak olyan csomópont vizsgálható, amelyre maximum két ismeretlen rúderő működik, vagyis a csomópontok megoldási sorrendje ennek megfelelően kötötté válik.
- A csomóponti módszerrel a rácsos tartó valamennyi rúdereje meghatározható, viszont fennáll a hibahordozás veszélye a csomópontok egymásra épülő megoldása miatt.



CSOMÓPONTI MÓDSZER
VETÜLETI EGYENLETEKKEL

- Két ferde ismeretlen rúderőt tartalmazó csomópont: a rúderőket a vetületi egyenletek egyenletrendszerként történő megoldásával kapjuk. Az ismeretlen rúderőket húzottnak feltételezzük.



$$\sum F_{ix} = S_{01x} + S_{02x} = 0$$

$$\sum F_{iz} = A + S_{01z} - S_{02z} = 0$$

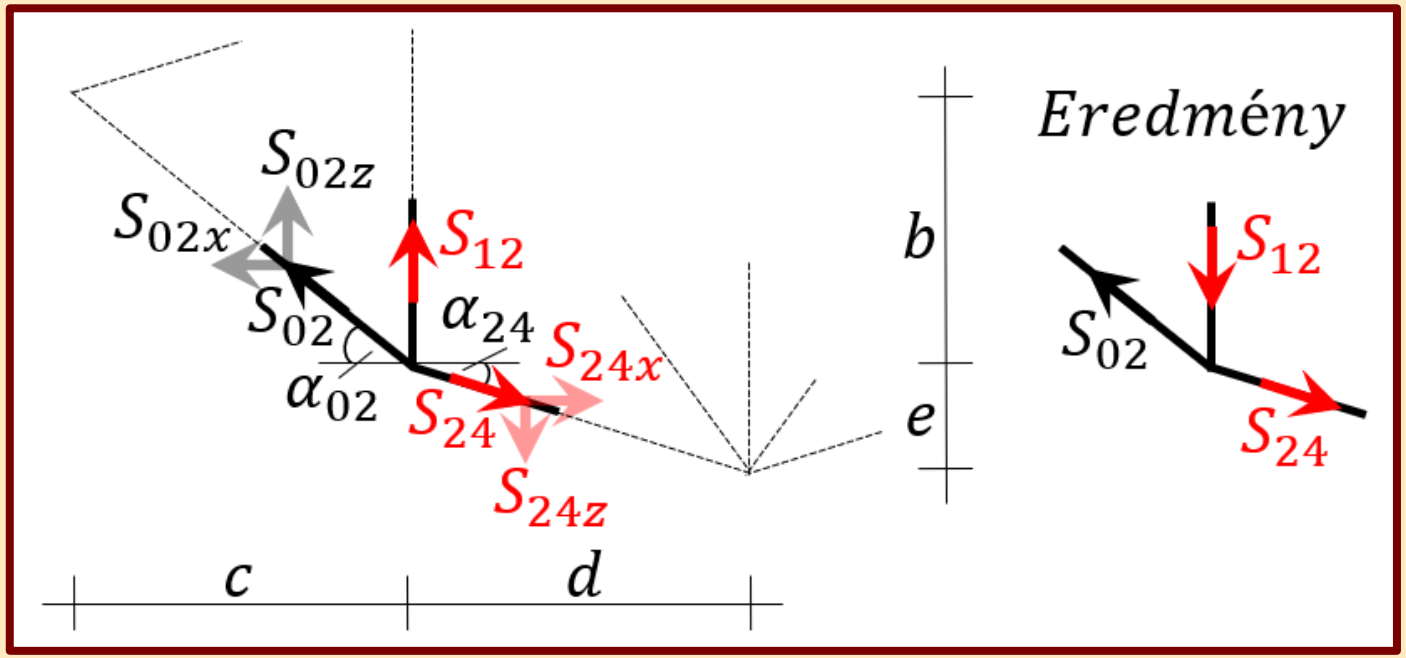
$$\sum F_{ix} = S_{01} \cdot \cos\alpha_{01} + S_{02} \cdot \cos\alpha_{02} = 0$$

$$\sum F_{iz} = A + S_{01} \cdot \sin\alpha_{01} - S_{02} \cdot \sin\alpha_{02} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \sum F_{ix} &= S_{01} \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} + S_{02} \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2+b^2}} = 0 \\ \sum F_{iz} &= A + S_{01} \cdot \frac{a}{\sqrt{c^2+a^2}} - S_{02} \cdot \frac{b}{\sqrt{c^2+b^2}} = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{matrix} S_{01}\ (-) \\ S_{02}\ (+) \end{matrix}$$

VETÜLETI EGYENLETEKKEL

- Egy ferde ismeretlen rúderőt tartalmazó csomópont: a rúderők egyismeretlenes vetületi egyenletekkel előállíthatóak.



$$\sum F_{ix} = -S_{02x} + S_{24x} = 0$$

$$\sum F_{ix} = -S_{02} \cdot \cos\alpha_{02} + S_{24} \cdot \cos\alpha_{24} = 0$$

$$\sum F_{ix} = -S_{02} \cdot \frac{c}{\sqrt{c^2+b^2}} + S_{24} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2+e^2}} = 0 \qquad \rightarrow S_{24}(+)$$

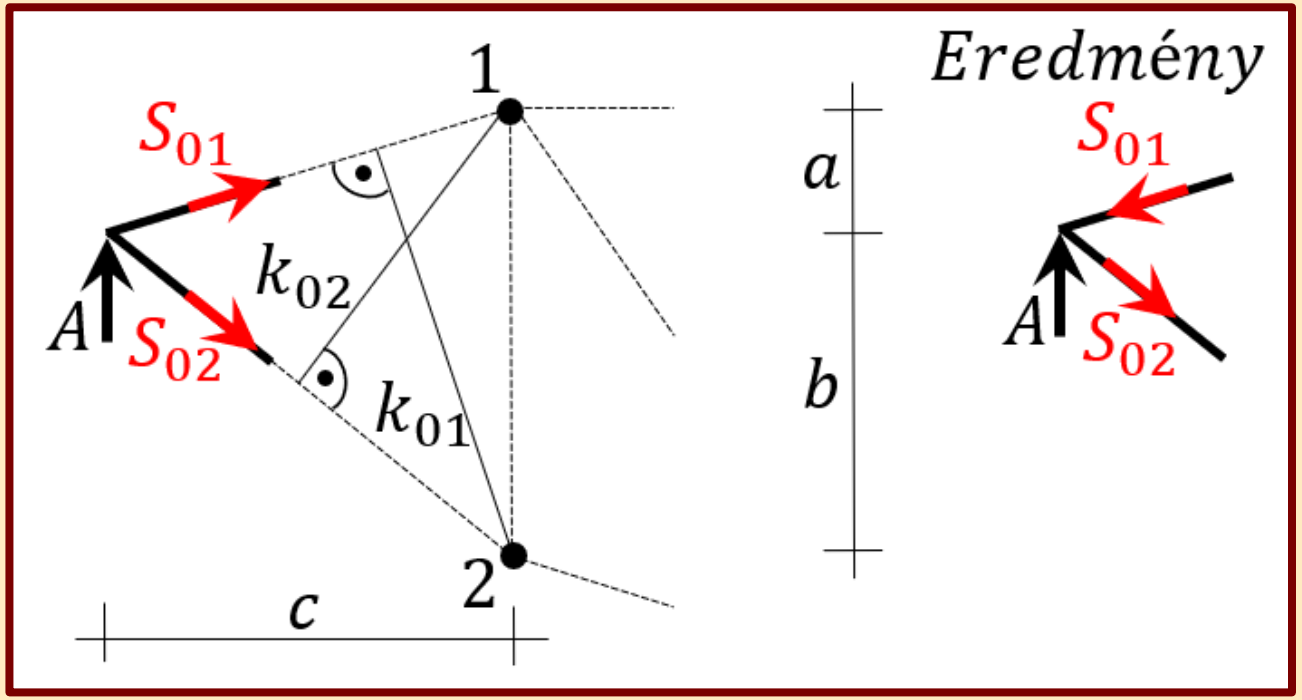
$$\sum F_{iz} = S_{02z} + S_{12} - S_{24z} = 0$$

$$\sum F_{iz} = S_{02} \cdot \sin\alpha_{02} + S_{12} - S_{24} \cdot \sin\alpha_{24} = 0$$

$$\sum F_{iz} = S_{02} \cdot \frac{b}{\sqrt{c^2+b^2}} + S_{12} - S_{24} \cdot \frac{e}{\sqrt{d^2+e^2}} = 0 \qquad \rightarrow S_{12}(-)$$

NYOMATÉKI EGYENLETEKKEL

- A rúderők nyomatéki egyenletekkel is kiszámíthatóak. Az egyenleteket az egyes rudak hatásvonalának egy ismert pontjára írjuk, hogy egyismeretlenessé váljanak. A rúderők nyomatékát közvetlenül a pontig mért karjukkal szorozva írjuk fel.

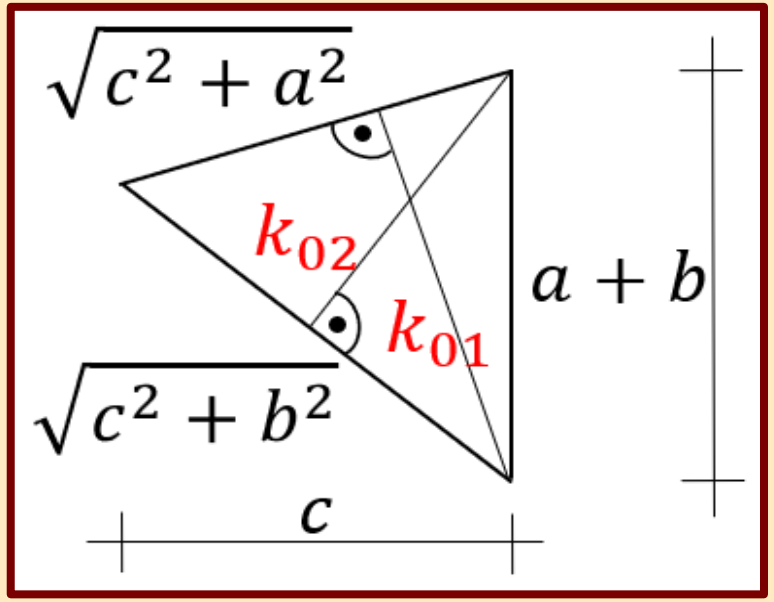


$$T_\triangle = \frac{(a+b)\cdot c}{2} = \frac{\sqrt{c^2+a^2}\cdot k_{01}}{2} \quad \rightarrow k_{01}$$

$$T_\triangle = \frac{(a+b)\cdot c}{2} = \frac{\sqrt{c^2+b^2}\cdot k_{02}}{2} \quad \rightarrow k_{02}$$

$$\sum M_i^2 = A\cdot c + S_{01}\cdot k_{01} = 0 \quad \rightarrow S_{01}(-)$$

$$\sum M_i^1 = A\cdot c - S_{02}\cdot k_{02} = 0 \quad \rightarrow S_{02}(+)$$

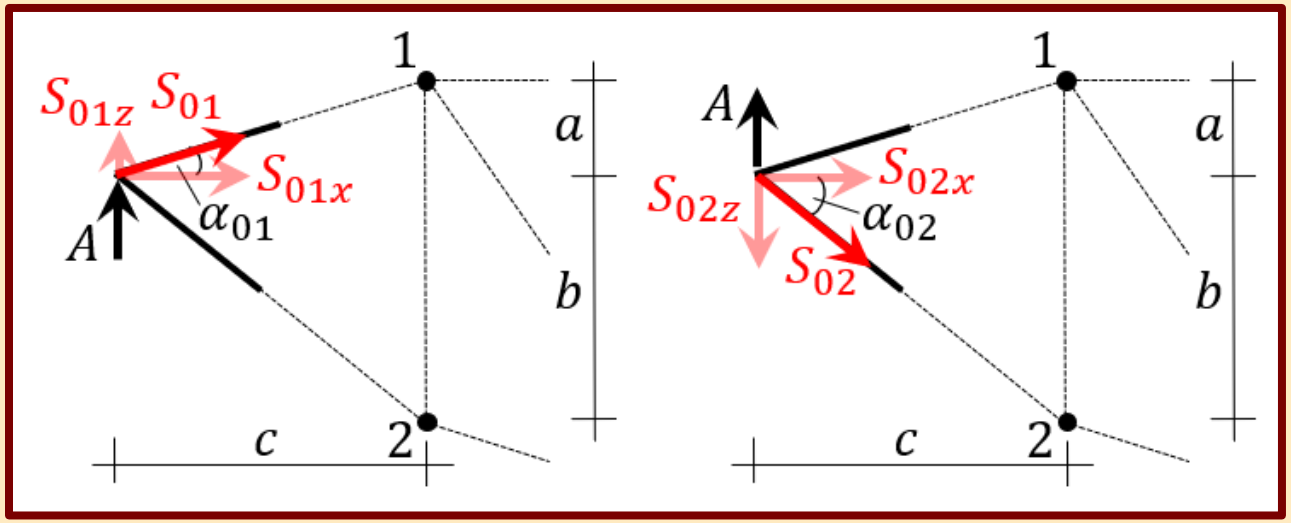


NYOMATÉKI EGYENLETEKKEL

- A rúderők nyomatékát az összetevőik nyomatékával helyettesítve is felírhatjuk. Az összetevőkre bontást a vizsgált csomópontban is elvégezhetjük, vagy hatásvonalának egy olyan pontjában, ahol az egyik összetevő kiesik.

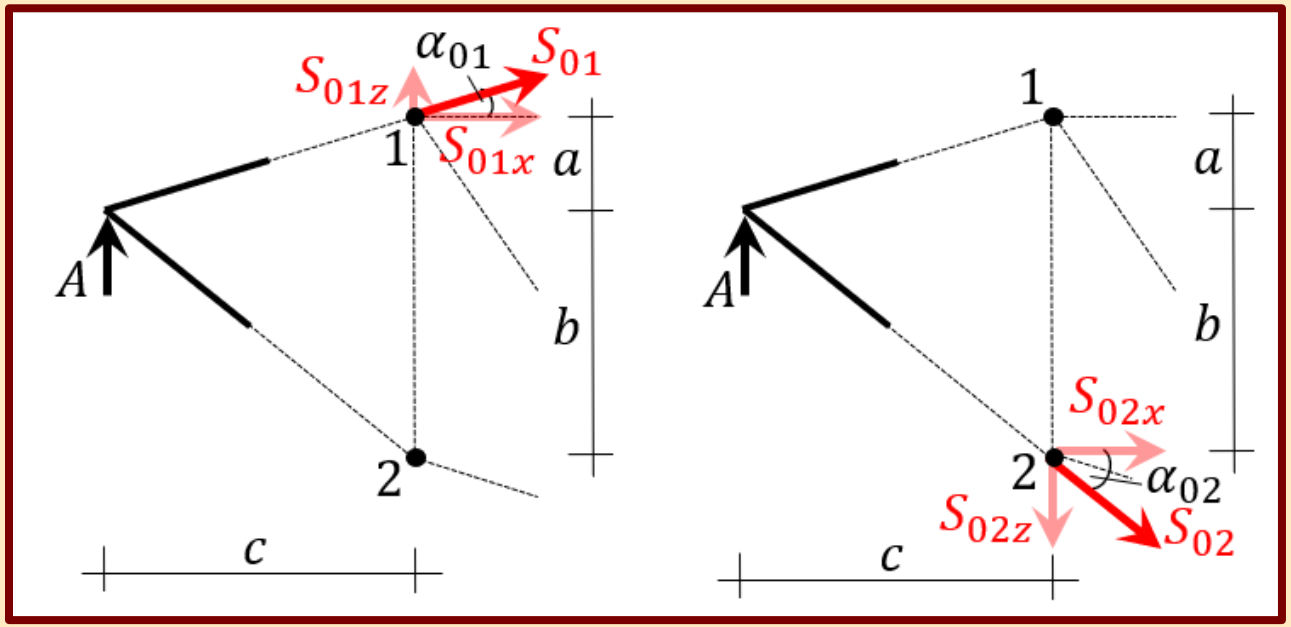
$$\sum M_i^2 = A \cdot c + S_{01x} \cdot b + \\ + S_{01z} \cdot c = 0 \quad \rightarrow S_{01}(-)$$

$$\sum M_i^1 = A \cdot c - S_{02x} \cdot a - \\ - S_{02z} \cdot c = 0 \quad \rightarrow S_{02}(+)$$



$$\sum M_i^2 = A \cdot c + S_{01x} \cdot (a + b) = 0 \\ \rightarrow S_{01}(-)$$

$$\sum M_i^1 = A \cdot c - S_{02x} \cdot (a + b) = 0 \\ \rightarrow S_{02}(+)$$

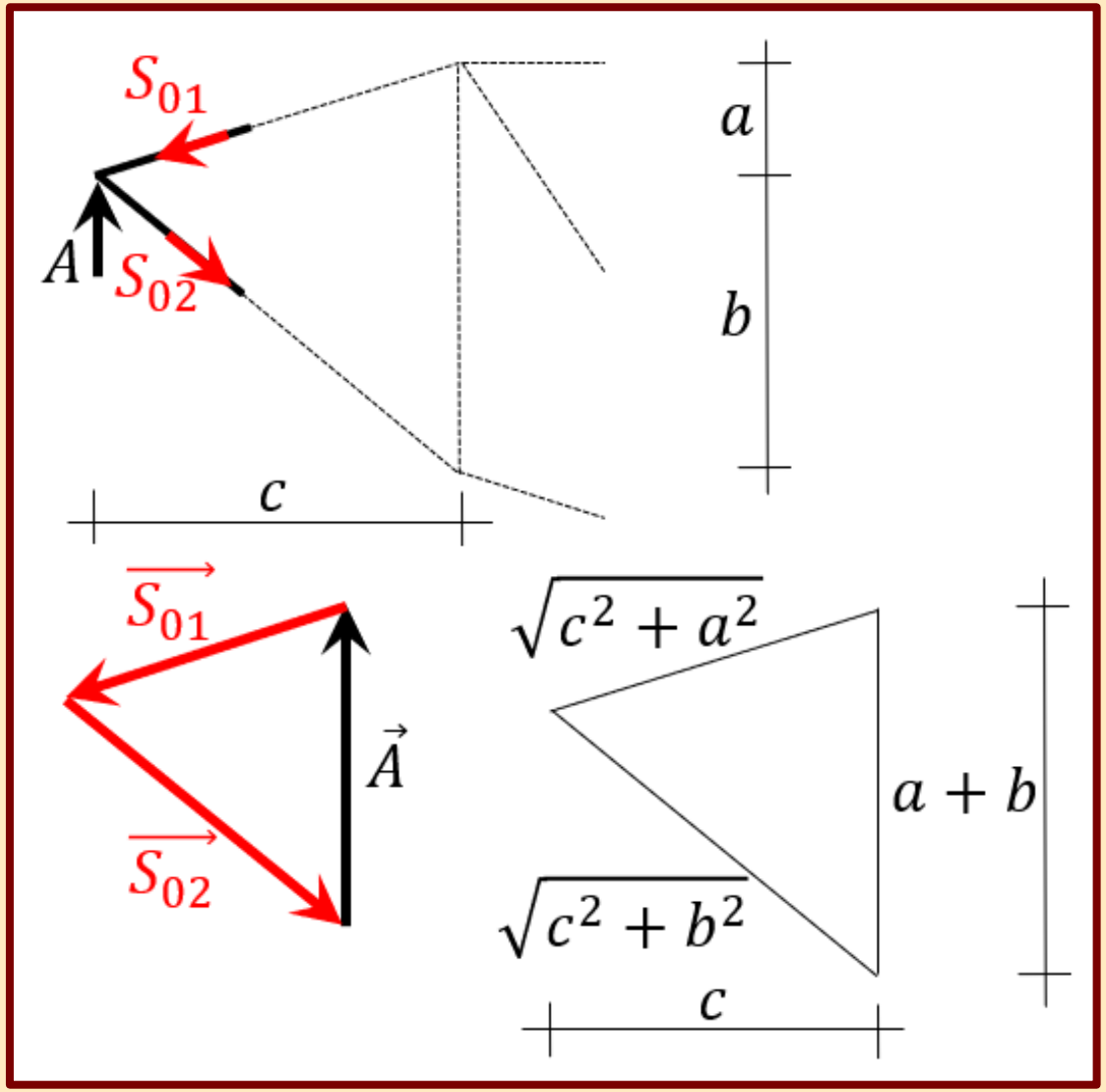


GRAFOANALÍTIKUS ELJÁRÁSSAL

- Ha a csomóponton három erő egyensúlya érvényesül, akkor a velük felrajzolt vektorháromszög és a hálózati geometriából vett háromszög közötti hasonlóság alapján felírt aránypárok segítségével is meghatározhatóak a rúderők. Ha a vetületi egyenletek felírása egyenletrendszer megoldásához vezet, akkor ez az eljárás nagyon praktikussá válik.

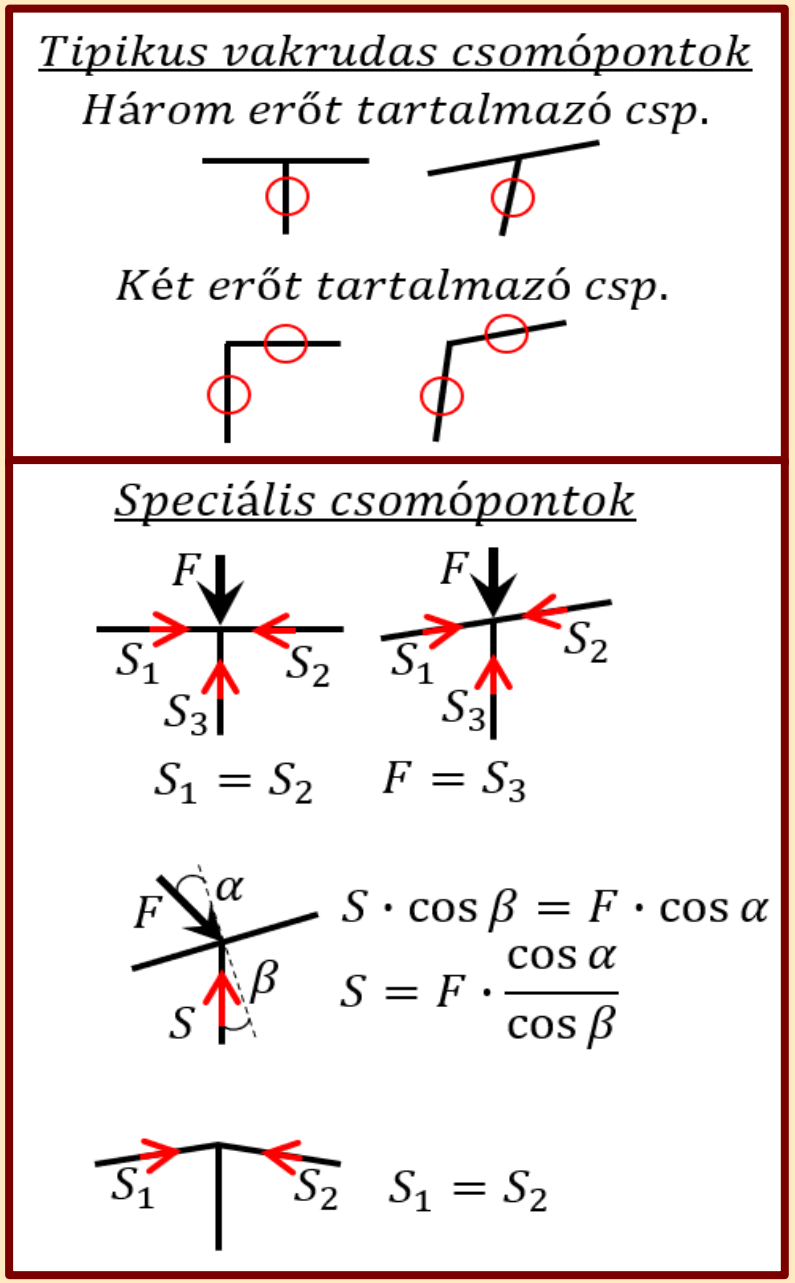
$$\frac{S_{01}}{A} = \frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{a + b} \rightarrow S_{01} = A \cdot \frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{a + b}$$

$$\frac{S_{02}}{A} = \frac{\sqrt{c^2 + b^2}}{a + b} \rightarrow S_{02} = A \cdot \frac{\sqrt{c^2 + b^2}}{a + b}$$



SPECIÁLIS CSOMÓPONTOK ÉS VAKRUDAK

- Azokat a rudakat, amelyekben nem keletkezik erő az adott terhelés hatására, vakrudaknak hívjuk. Tehát ez a minősítés adott teheresetre vonatkoztatható, vagyis a teher helyzetének megváltozásával a rúdban keletkezhet erő. Egyes csomópontok esetén, a rá ható erők száma és állása alapján könnyen kijelenthető, hogy vakrudat tartalmaznak.
- Bizonyos kialakítású csomópontok egyensúlya és a rá ható rúderők nagysága számítás nélkül, egyszerű következtetésekkel meghatározható.
- A speciális csomópontok és a vakrudak felismerésével a rúderők számítását egyszerűsíthetjük.



Tartószerkezetek mechanikája I.

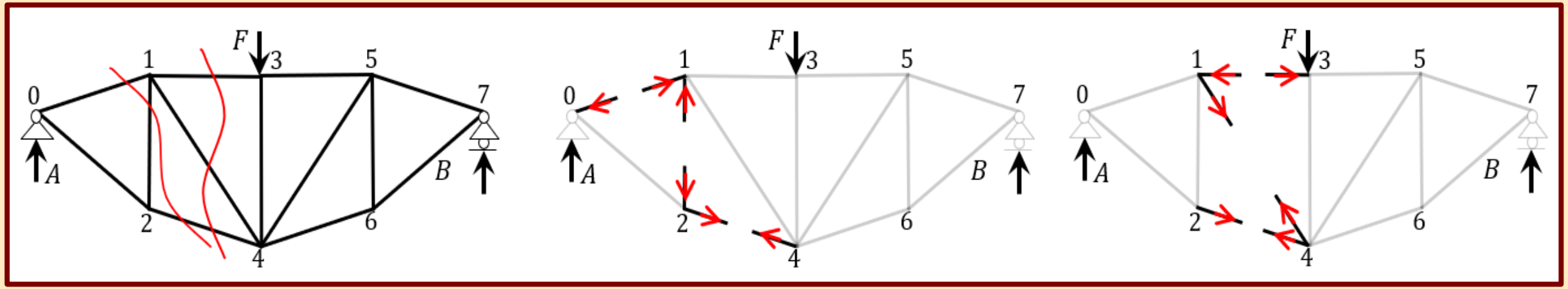
7.

Síkbeli tartószerkezetek: rácsostartók 2

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

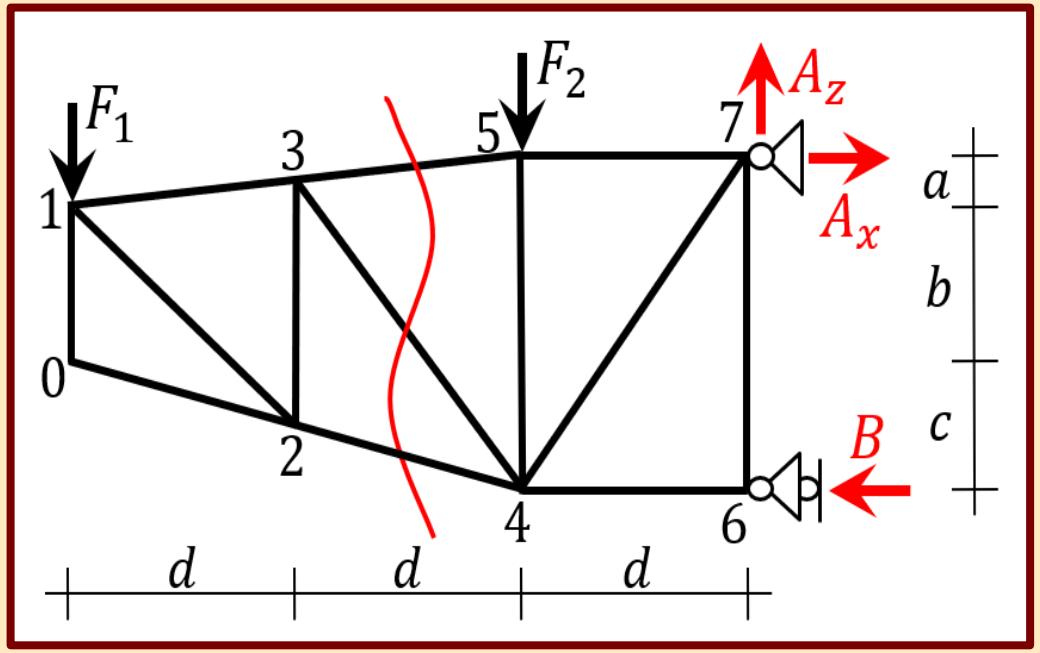
HÁRMAS ÁTMETSZÉS

- Három rúd átvágásával a tartót két különálló részre bontjuk. Az összetett tartóknál alkalmazottakhoz hasonlóan az egyes tartórészek is egyensúlyban lesznek.
- A kialakított tartórészekre síkban szétszórt erőrendszerekként a rájuk eső külső terhelő- és kényszererők, valamint az átvágott rúderők működnek, így azok egyensúlyát vizsgálva, három statikai egyenletet írhatunk fel.
- A hármas átmetszés segítségével csak azon rúderők számíthatóak, amelyek valamely átmetszésben átvágott rúdként szerepelnek. Az egyes átvágások egymástól független számításokat eredményeznek, így a hibahordozás veszélye itt kevéssé áll fenn.



HÁRMAS ÁTMETSZÉS
NYOMATÉKI EGYENLETEKKEL

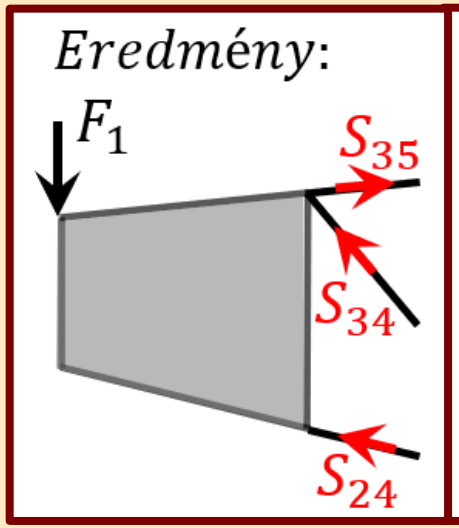
- Nem párhuzamos övrudak esetén: a három átvágott rúd ismeretlen rúderői közül kettő hatásvonalának metszéspontjára (főpont) írunk fel nyomatéki egyenletet (főponti vagy Ritter-módszer). A három főpontra írt nyomatéki egyenlettel a három rúderő egymástól függetlenül meghatározható. Az ismeretlen rúderőket húzottnak feltételezzük.

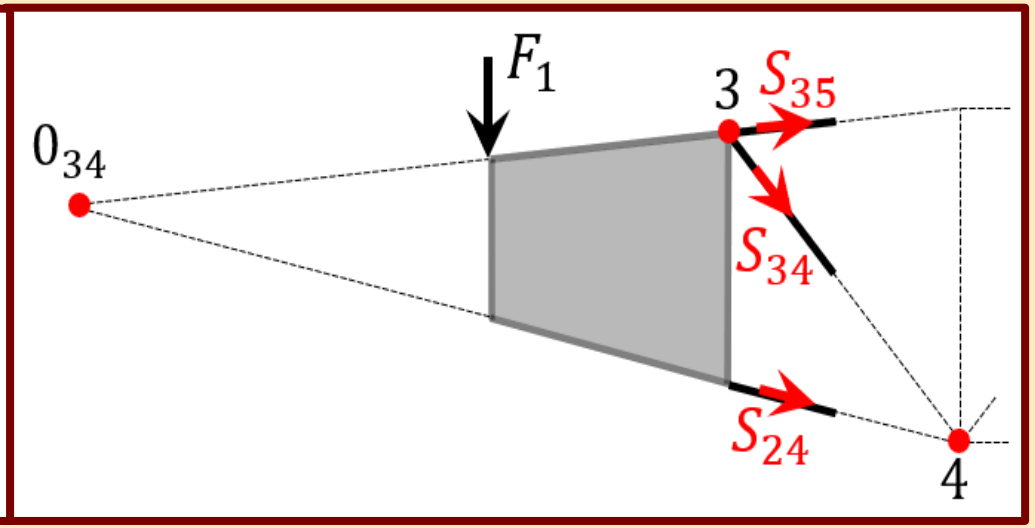


$$\sum M_i^{\,3} = 0 \qquad \rightarrow S_{24}(-)$$

$$\sum M_i^{\,4} = 0 \qquad \rightarrow S_{35}(+)$$

$$\sum M_i^{\,0_{34}} = 0 \qquad \rightarrow S_{34}(-)$$





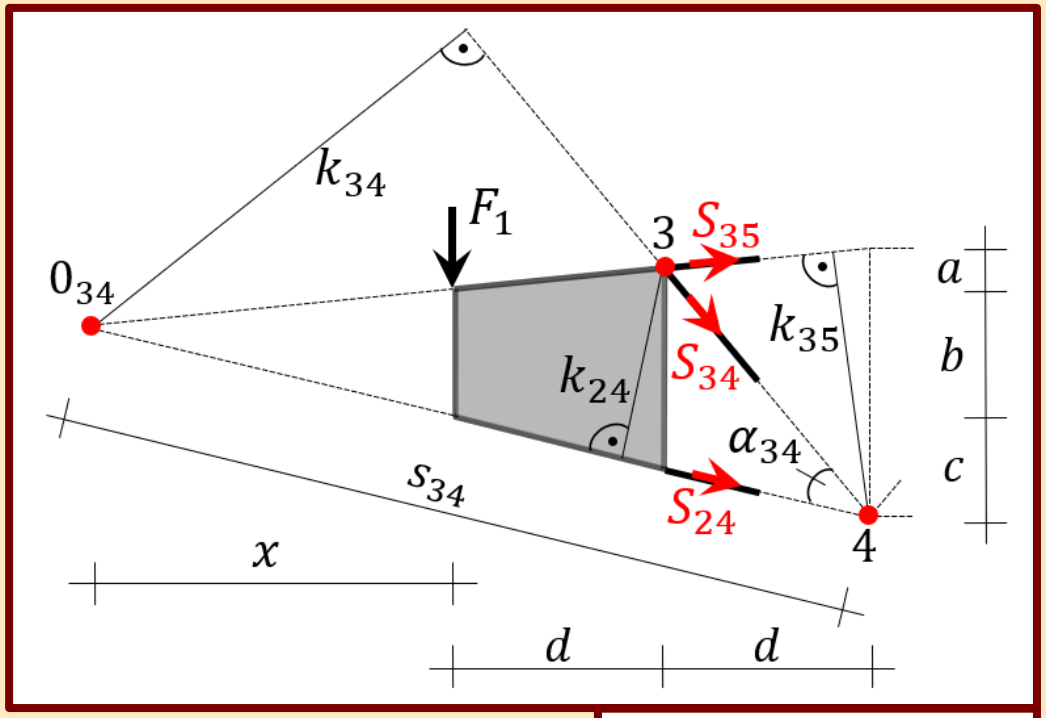
NYOMATÉKI EGYENLETEKKEL

- A rúderők nyomatékát közvetlenül a főpontig mért karjukkal szorozva is felírhatjuk:

$$\sum M_i^{\,4} = -F_1 \cdot 2 \cdot d + S_{35} \cdot k_{35} = 0 \;\rightarrow S_{35}$$

$$\sum M_i^{\,3} = -F_1 \cdot d - S_{24} \cdot k_{24} = 0 \;\rightarrow S_{24}$$

$$\sum M_i^{\,0_{34}} = F_1 \cdot x + S_{34} \cdot k_{34} = 0 \;\rightarrow S_{34}$$

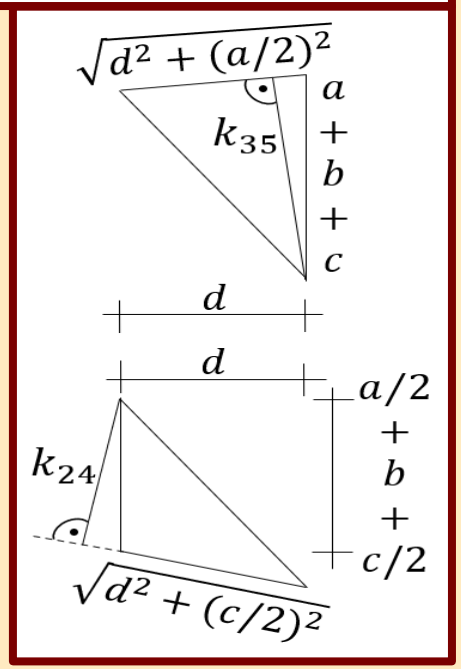


- A karok számítása:

$$T_\triangle = \frac{(a+b+c)\cdot d}{2} = \frac{\sqrt{d^2 + (a/2)^2}\cdot k_{35}}{2} \;\rightarrow k_{35}$$

$$T_\triangle = \frac{(a/2+b+c/2)\cdot d}{2} = \frac{\sqrt{d^2 + (c/2)^2}\cdot k_{24}}{2} \;\rightarrow k_{24}$$

$$k_{34} = s_{34}\cdot \sin\alpha_{34} = s_{34}\cdot \frac{k_{24}}{\sqrt{d^2 + (a/2+b+c/2)^2}}$$

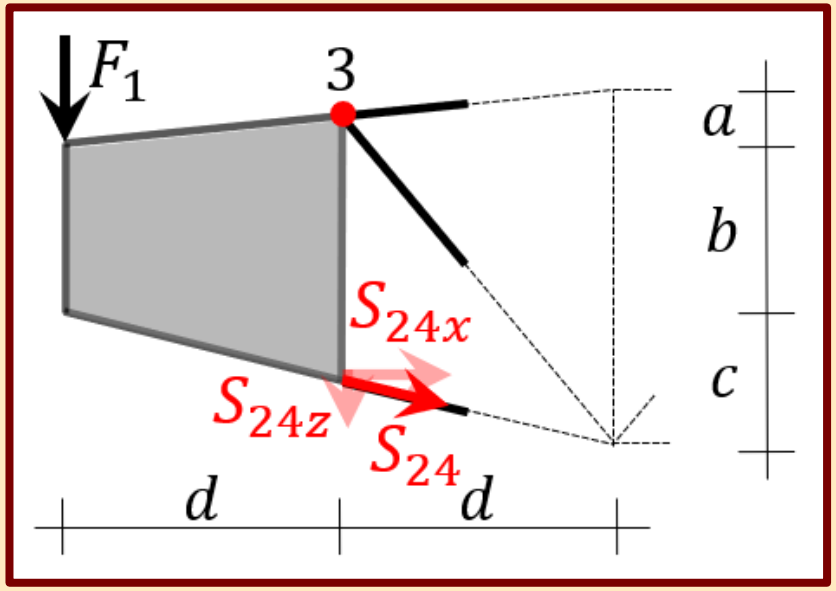


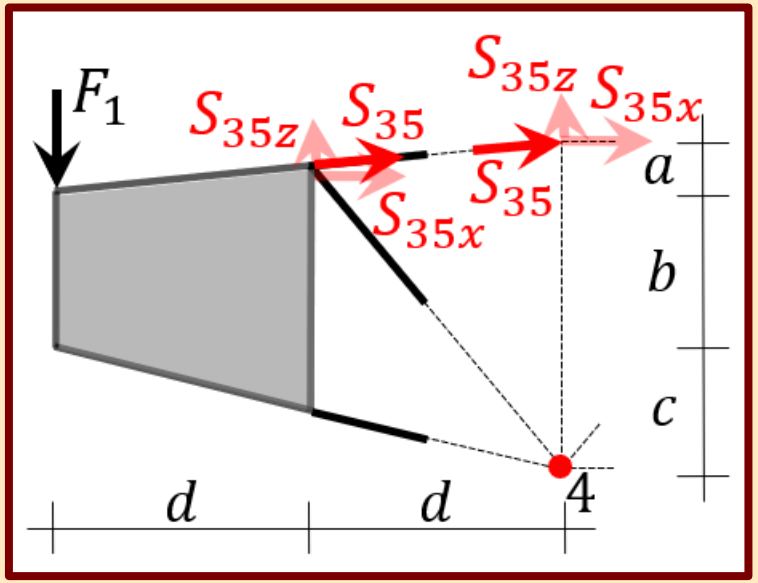
NYOMATÉKI EGYENLETEKKEL

- A rúderők nyomatékát összetevőik nyomatékával is felírhatjuk:

$$\sum M_i^{3} = -F_1 \cdot d - S_{24x} \cdot (a/2 + b + c/2) = 0$$

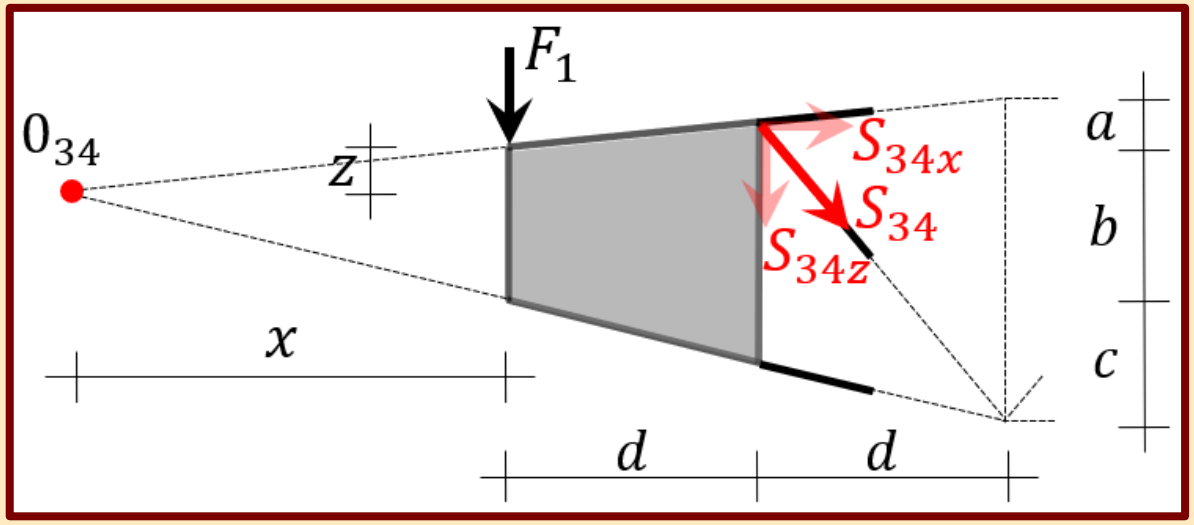
$$\rightarrow S_{24}$$





$$\sum M_i^{4} = -F_1 \cdot 2 \cdot d + S_{35x} \cdot (a/2 + b + c) + S_{35z} \cdot d = 0$$

$$\sum M_i^{4} = -F_1 \cdot 2 \cdot d + S_{35x} \cdot (a + b + c) = 0 \quad \rightarrow S_{35}$$



$$\sum M_i^{0_{34}} = F_1 \cdot x + S_{34x} \cdot (a/2 + z) +$$

$$+S_{34z} \cdot (d + x) = 0 \quad \rightarrow S_{34}$$

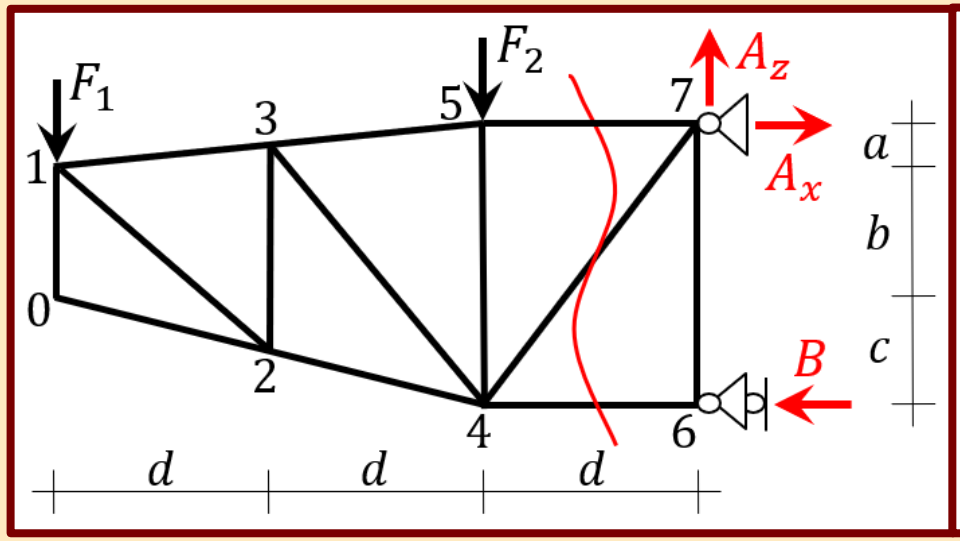
NYOMATÉKI ÉS VETÜLETI EGYENLETEKKEL

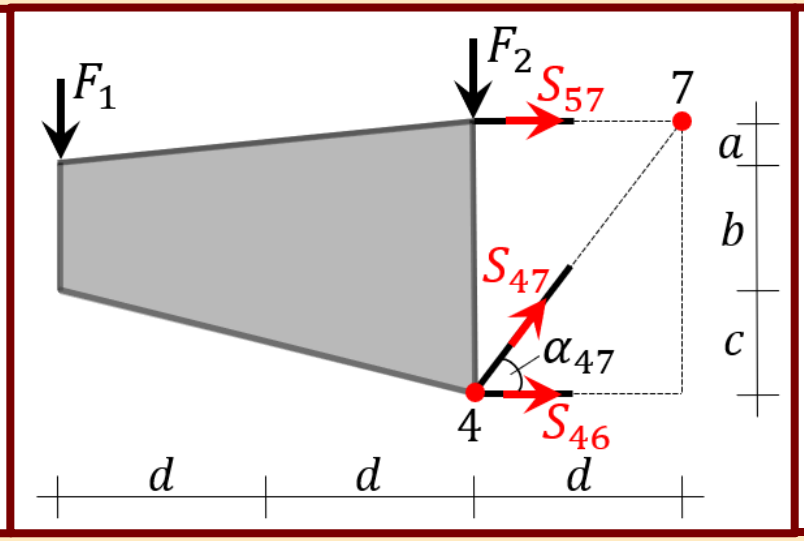
- Párhuzamos övrudak esetén: az övrudak tengelyvonalai nem metszik egymást, ezért a főpontjukra vett nyomatéki egyenlet helyett a tengelyvonalukra merőleges irányban felírt vetületi egyenletet egyismeretlenesként használhatjuk. Az övrudak rúderőit továbbra is főponti nyomatéki egyenletekkel határozzuk meg.

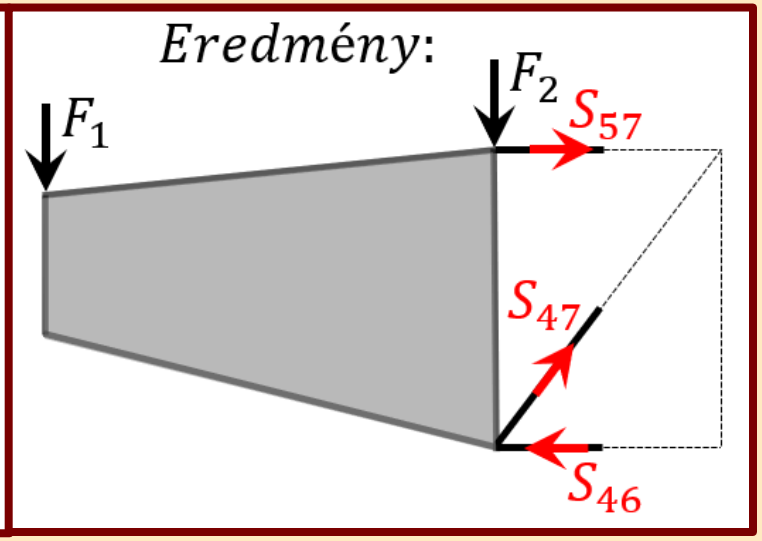
$$\sum M_i^{\,4} = -F_1 \cdot 2 \cdot d + S_{57} \cdot (a+b+c) = 0 \quad \rightarrow S_{57}$$

$$\sum M_i^{\,7} = -F_1 \cdot 3 \cdot d - F_2 \cdot d - S_{46} \cdot (a+b+c) = 0 \quad \rightarrow S_{46}$$

$$\sum F_{iz} = -F_1 - F_2 + S_{47} \cdot \sin\alpha_{47} = -F_1 - F_2 + S_{47} \cdot \frac{a+b+c}{\sqrt{(a+b+c)^2+d^2}} = 0 \rightarrow S_{47}$$







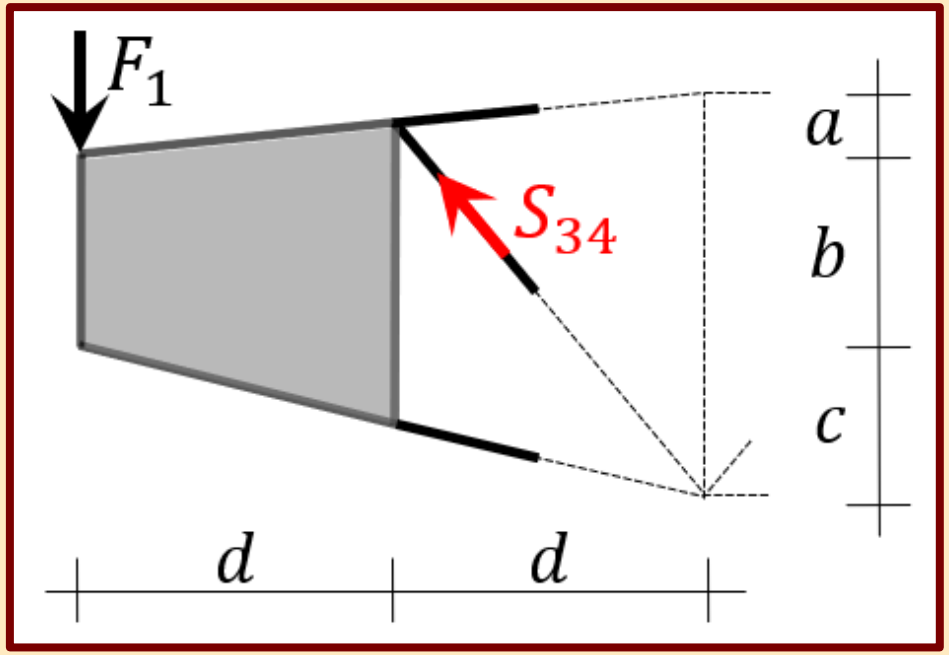
HASONLÓSÁGI MÓDSZERREL

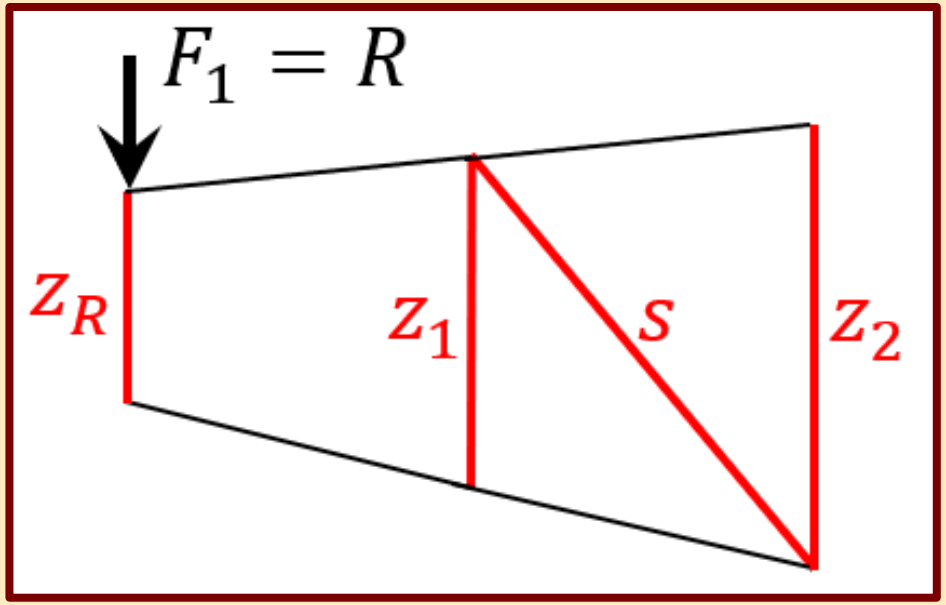
- A rácsrudak és oszlopok hasonlósági módszerrel is számíthatóak:

$$S = R \cdot \frac{z_R \cdot s}{z_1 \cdot z_2}$$

$$S_{34} = F_1 \cdot \frac{z_{F_1} \cdot s}{z_1 \cdot z_2}$$

- Az R a vizsgált tartórészen a külső erők eredője.
- A tört geometriai paraméterekből áll, amelyek a nem vizsgált másik két rúderő hatásvonalai által kivágott metszékek. A három „z” metszék az eredővel párhuzamos, az „s” pedig a vizsgált rúd irányába eső.
- A kérdéses rúderő előjelét csak a főpont körüli forgatási irányok egyensúlya alapján határozhatjuk meg.

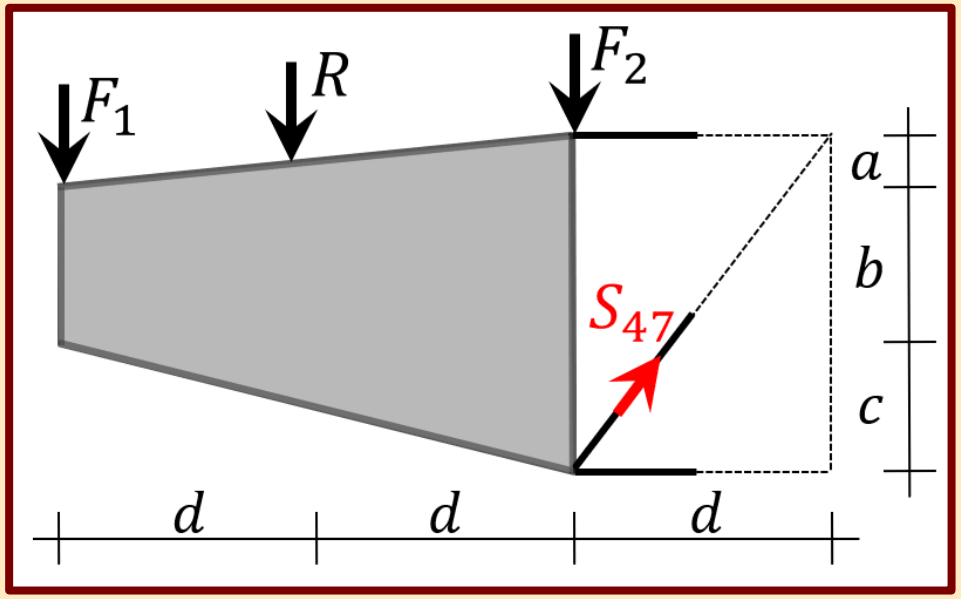




HASONLÓSÁGI MÓDSZERREL

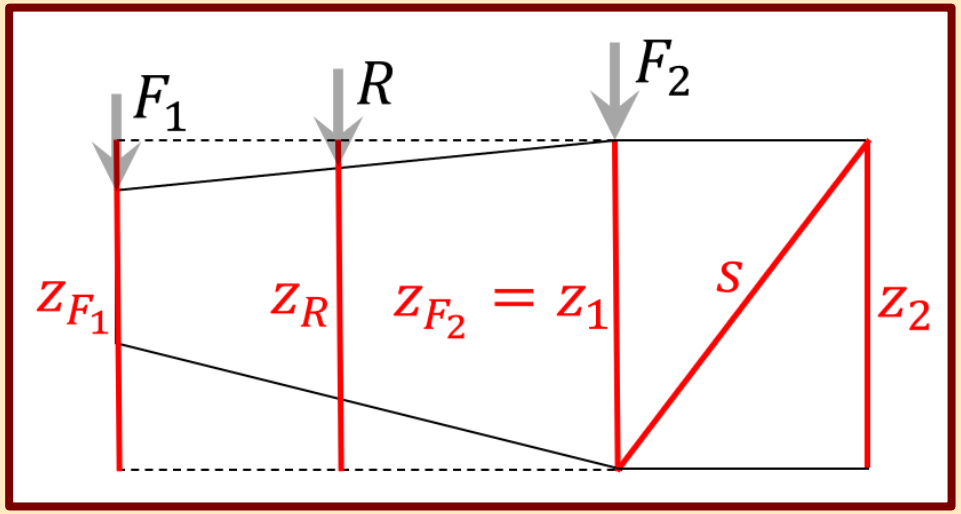
- A vizsgált tartórészre eső több külső erő esetén az erőket egyenként, megoldásuk egymásrahalmozásával vagy eredőjükkel is figyelembe vehetjük. Mindkét esetben az esetnek megfelelő geometriai paramétereket kell az összefüggésbe helyettesíteni.

$$S_{47} = F_1 \cdot \frac{z_{F_1} \cdot s}{z_1 \cdot z_2} + F_2 \cdot \frac{z_{F_2} \cdot s}{z_1 \cdot z_2} = R \cdot \frac{z_R \cdot s}{z_1 \cdot z_2}$$



- Párhuzamos övrudak esetén a hasonlósági módszer nagyon hatékonyan használható, hiszen a kimetszett geometriai paraméterek azonos értékűek lesznek, az összefüggés ezáltal könnyen felírható és egyszerűsíthető.

$$S_{47} = R \cdot \frac{z_R \cdot s}{z_1 \cdot z_2} = R \cdot \frac{s}{z_2} \; ; \; z_R = z_1 = z_2$$



K RÁCSOZÁSÚ TARTÓ

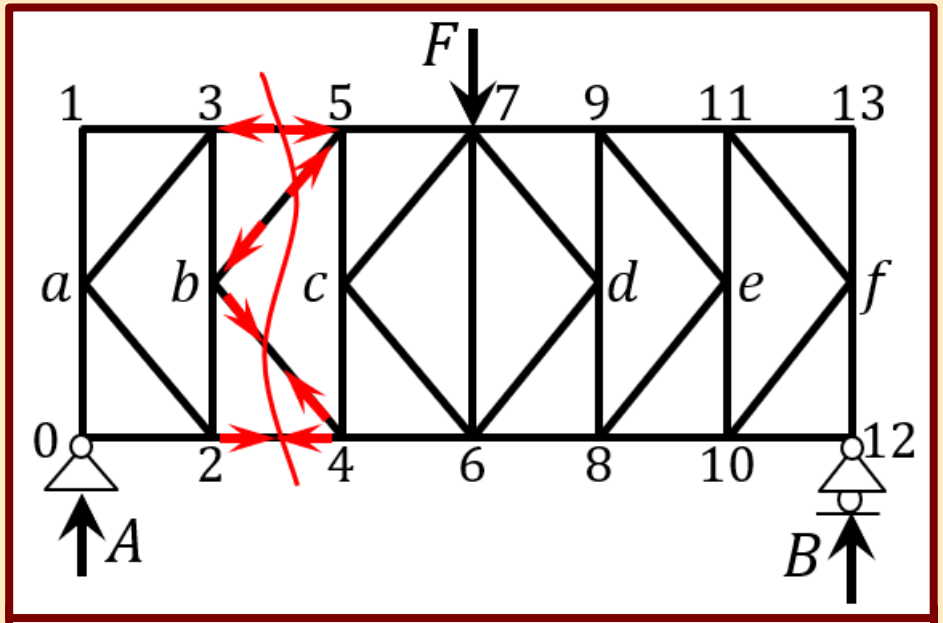
- A K rácsozású tartó rúderői négyes átmetszéssel is számíthatóak. A közbenső (b) csomópont egyensúlya alapján a két rácsrúdban azonos rúderő ébred. A két rúderő egy függőleges erővel helyettesíthető, így a feladat hármas átmetszéssé egyszerűsödik. Az övrudak főponti nyomatéki egyenletekkel számíthatóak, a rácsrudak eredője pedig vetületi egyenlettel. A rácsrudak rúderői az eredőjük ismeretében meghatározhatóak:

$$(A; S_{24}; S_{35}; S_{b4}; S_{b5}) = 0: \quad \sum M_i^{\,3} = 0 \quad \rightarrow S_{24}$$

$$\sum M_i^{\,2} = 0 \quad \rightarrow S_{35}$$

$$\sum F_{iz} = 0 \quad \rightarrow R_b$$

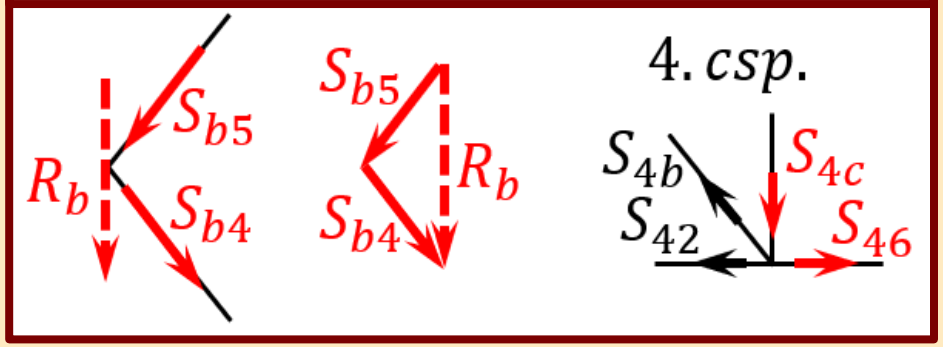
$$(S_{b5}; S_{b4}) \doteq R_b: \; S_{b5z} + S_{b4z} = R_b \rightarrow S_{b5} = S_{b4}$$



- A függőleges oszlopok rúderői a (b vagy 4. és 5.) csp.-ok egyensúlya alapján kiszámíthatóak:

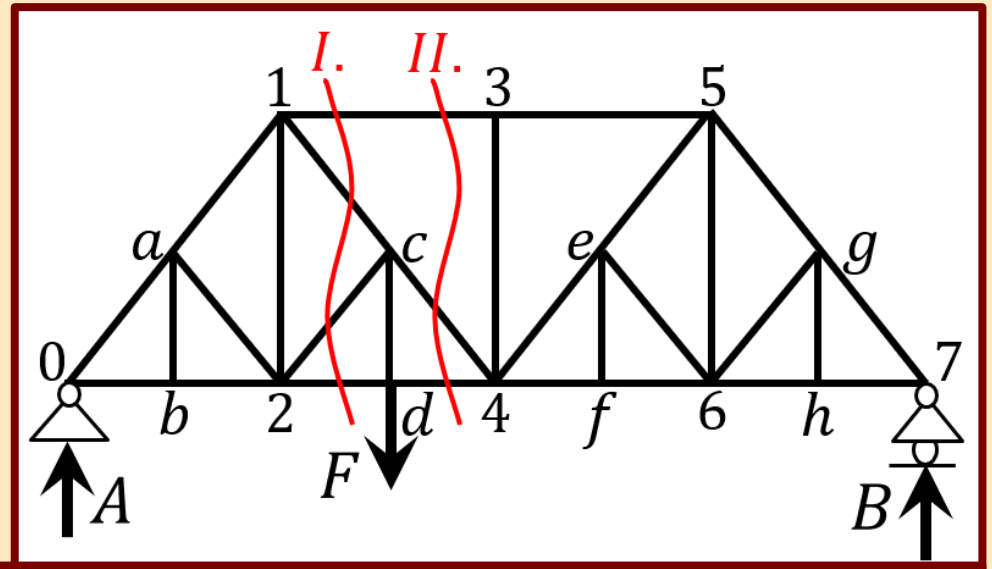
$$b\ csp.: \sum F_{iz} = 0 \quad \rightarrow S_{b2}; S_{b3}$$

$$4.\ és\ 5.\ csp.: \sum F_{iz} = 0 \quad \rightarrow S_{4c}; S_{5c}$$



MÁSODRENDŰ RÁCSOZÁSÚ TARTÓ

- A másodrendű rácsozású tartó egyes rúderői négyes átmetszéssel, egyes rúderői pedig hármas átmetszéssel számíthatóak. A megoldást a hármas átmetszéssel kell kezdeni, így a négyes átmetszés vizsgálatánál a két övrúd rúdereje már ismert lesz, a két rácsrúd pedig egyensúlyi egyenletekkel meghatározható.



II. átmetszés:

$$\sum M_i^{\,4} = 0 \quad \rightarrow S_{13}$$

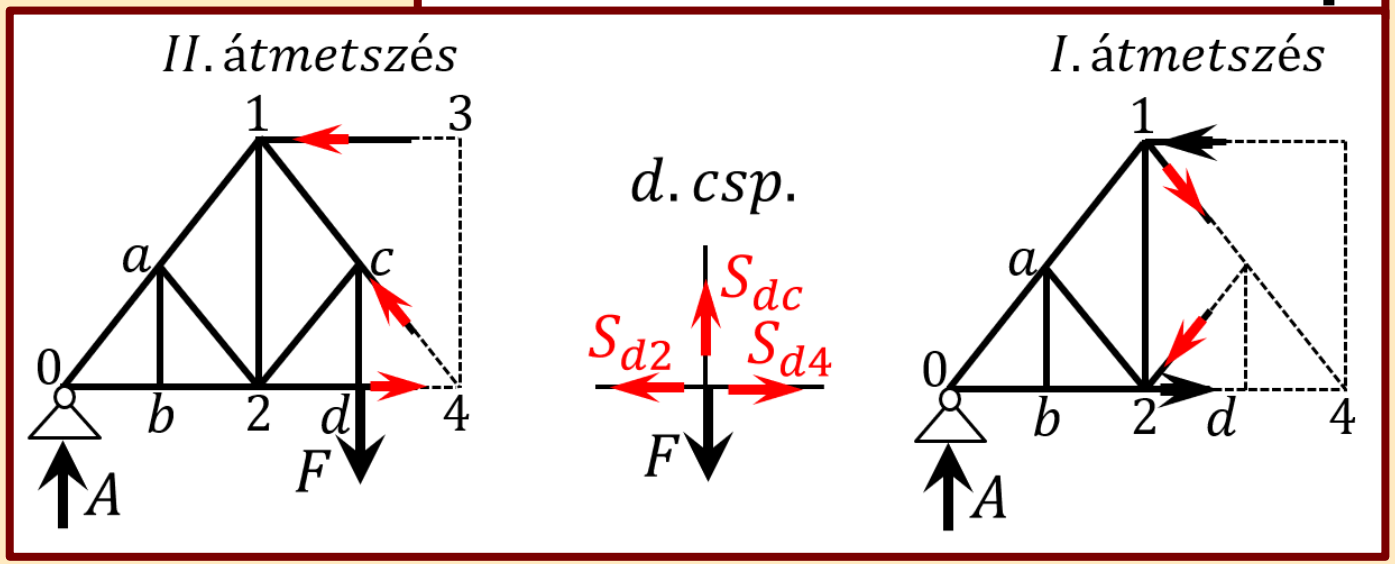
$$\sum M_i^{\,1} = 0 \quad \rightarrow S_{d4}$$

$$\sum F_{iz} = 0 \quad \rightarrow S_{c4}$$

I. átmetszés:

$$\sum M_i^{\,2} = 0 \quad \rightarrow S_{1c}$$

$$\sum M_i^{\,1} = 0 \quad \rightarrow S_{2c}$$



RÚDON TERHELT RÁCSOS TARTÓ

- A közvetlen terhelésű rúdelemet kéttámaszú tartóként egyensúlyozzuk a csatlakozó csomópontokban keletkező függőlegesnek választott reakcióerőkkel. Ezek a reakcióerők a csomópontokra ellentétesen terhelő erőként működnek.

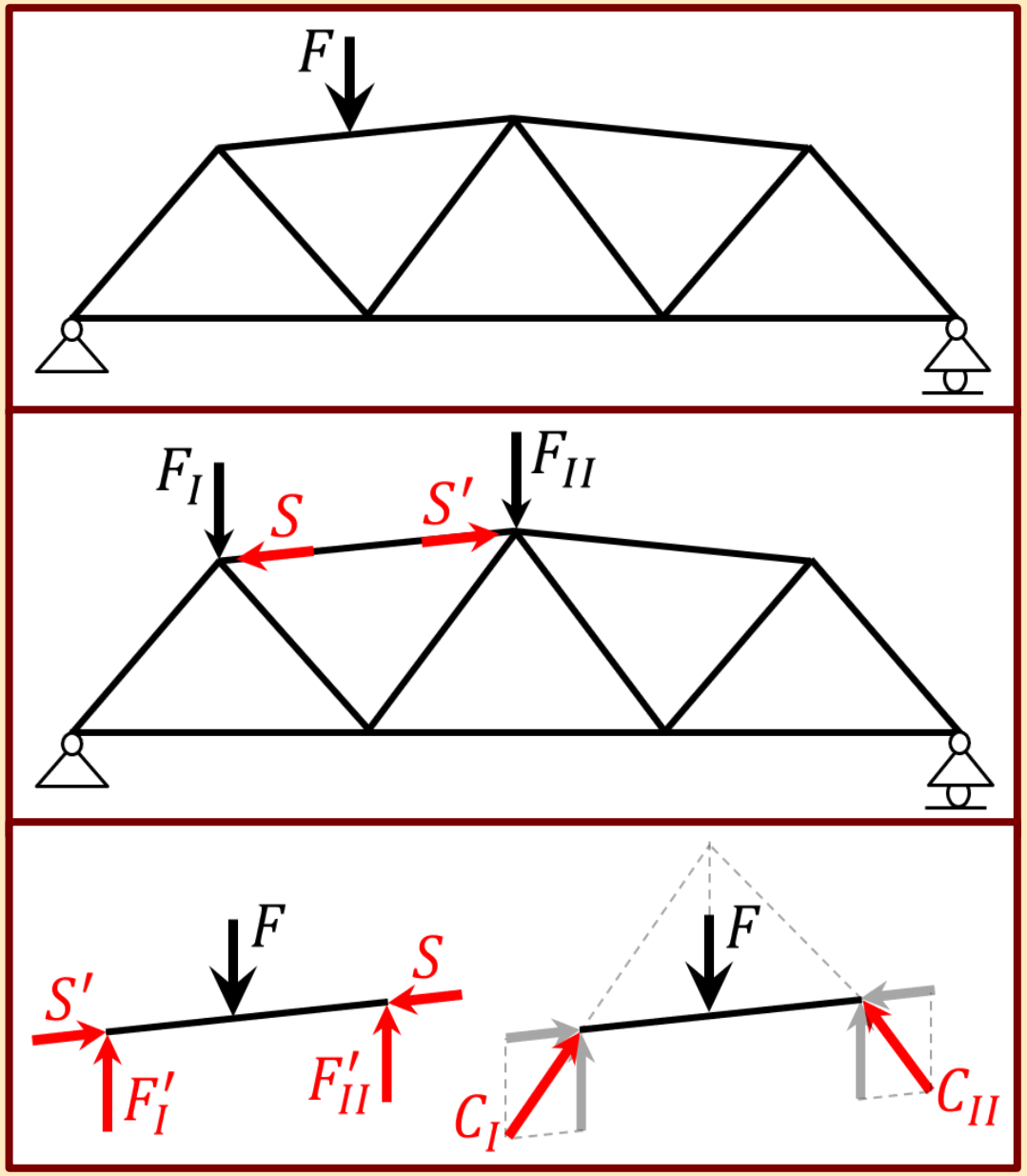
$$(F_I; F_{II}) = F;\ (F; F_I'; F_{II}') = 0$$

- A csomópontra redukált teher hatására a rúderők meghatározhatóak.

$$(F; F_I'; F_{II}'; S; S') = 0$$

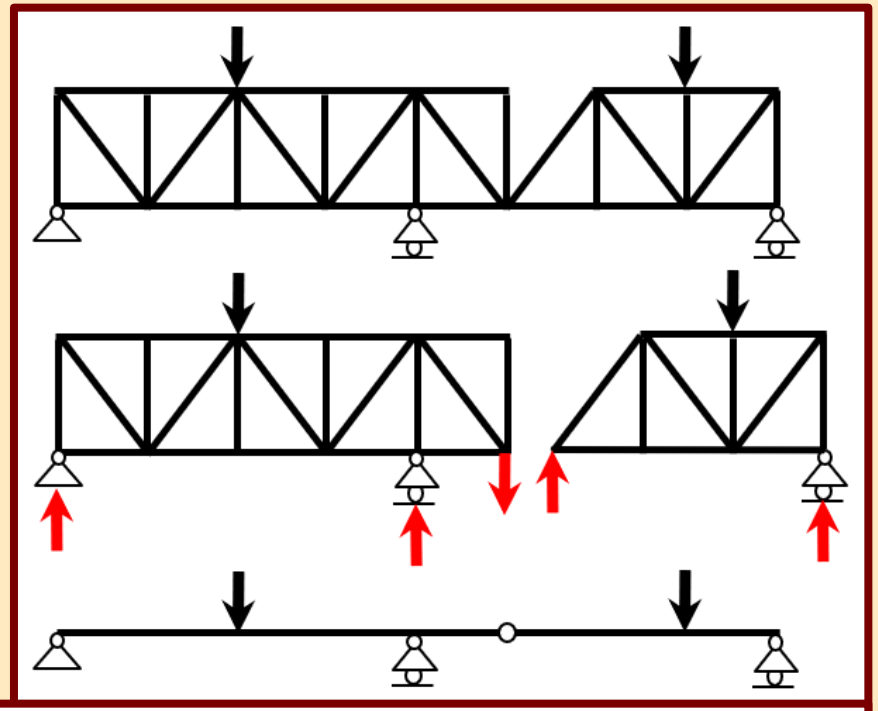
- A terhelt rúdelemre ható csuklóerőket megkaphatjuk a kiszámított rúderő és a kéttámaszú modellből előállított reakcióerők vektoriális összegzéséből.

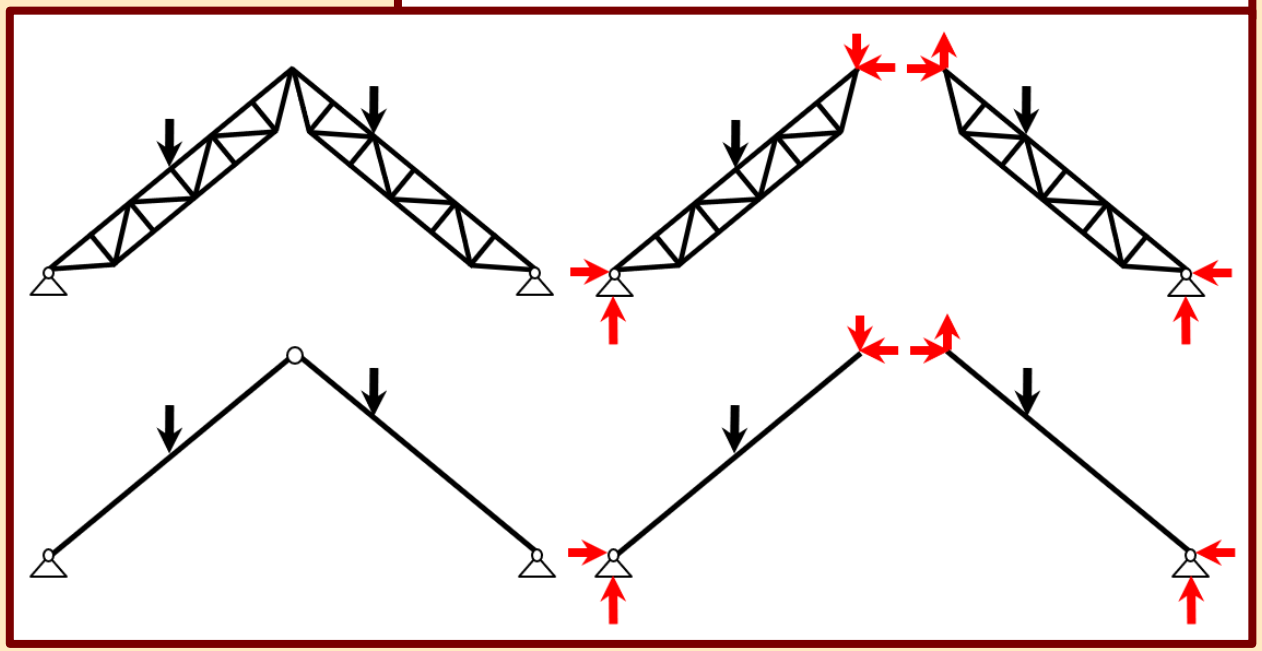
$$(S'; F_I') = C_I; (S; F_{II}') = C_{II}; (F; C_I; C_{II}) = 0$$



ÖSSZETETT RÁCSOS TARTÓK

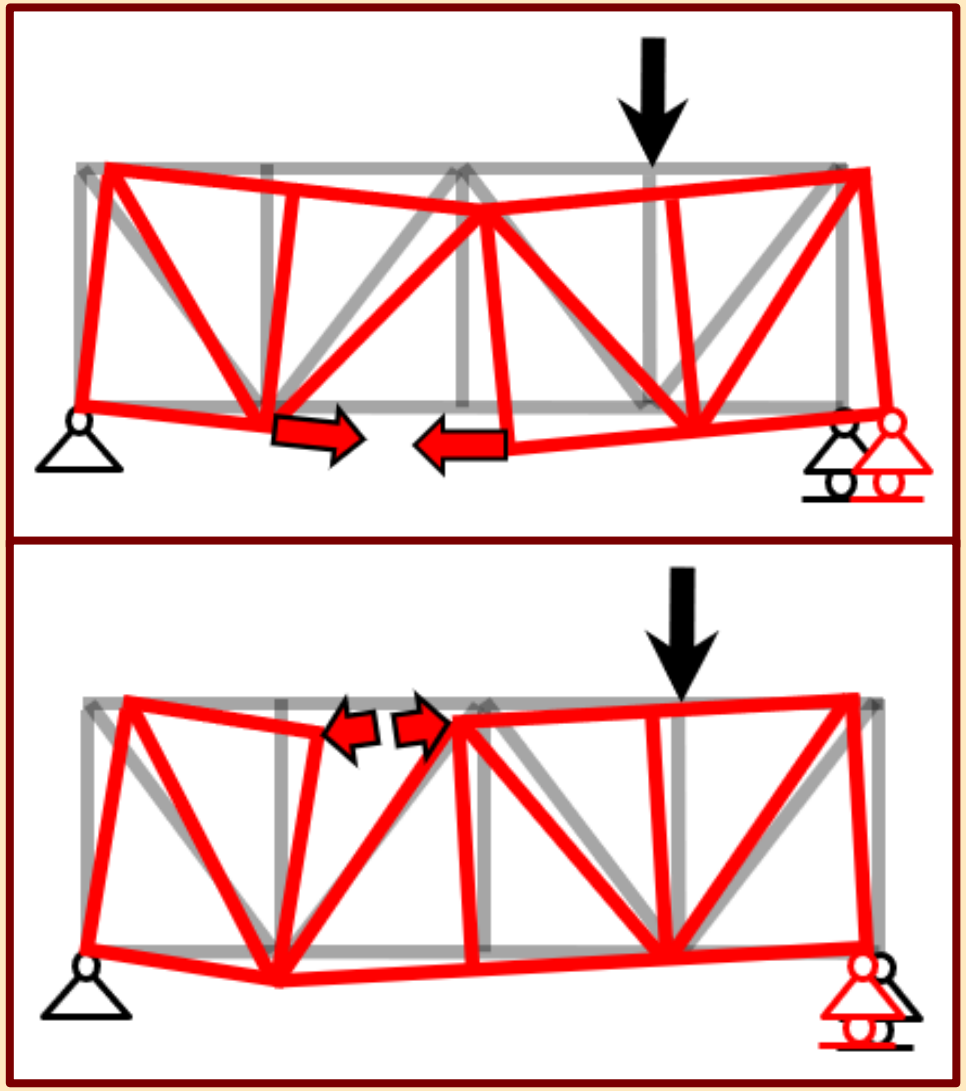
- Egy belsőleg merev szerkezetet egyes rudak eltávolításával belsőleg labilissá lehet tenni. A kialakult merevségi hiányt kívülről kompenzálva egészében merev tartót hozhatunk létre. Ezt a tartót kezelhetjük egy több elemből összeállított összetett szerkezetként. Leggyakrabban Gerber-tartó vagy háromcsuklós tartó kerül kialakításra összetett rácsos szerkezetként.
- A külső és belső kapcsolati erőket az összetett tartóknak megfelelően számíthatjuk a tartó egészének vagy az egyes tartórészek egyensúlya alapján. A rúderők ezután az eddigiek szerint meghatározhatóak.





RÚDERŐK SZEMLÉLETI VIZSGÁLATA

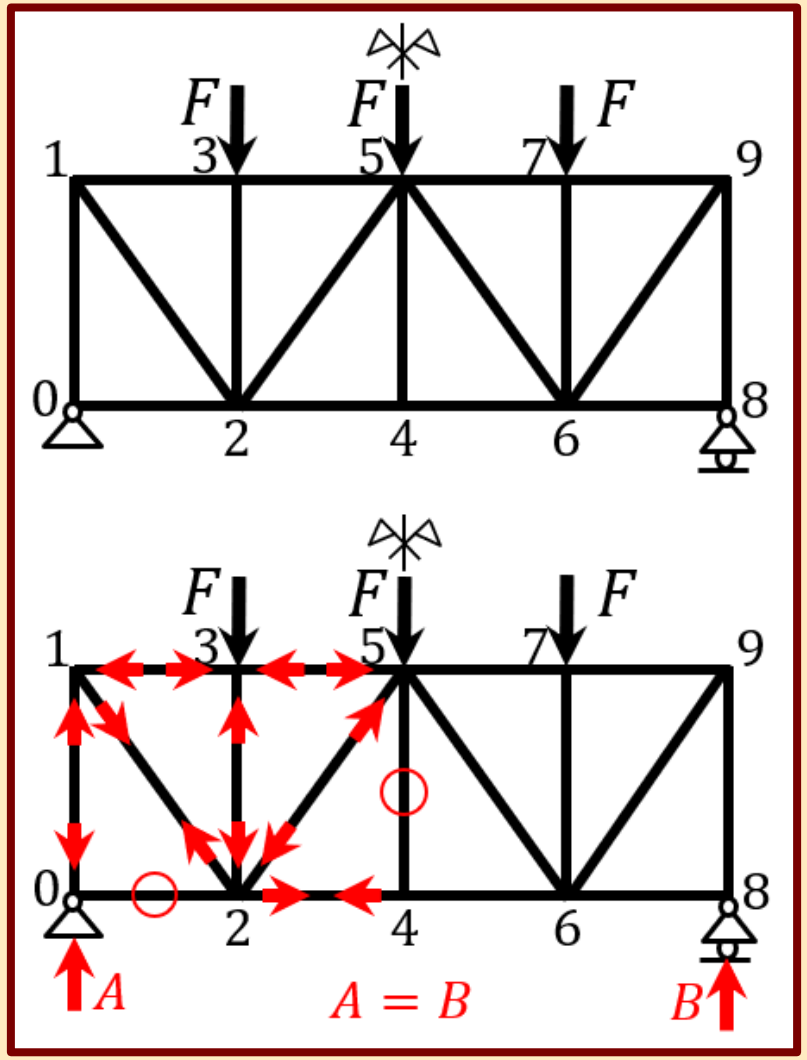
- A szemléleti vizsgálat alkalmazásával a rúderők szerepét és működését állapíthatjuk meg.
- A rácsos tartó egy rúdját eltávolítva labilis szerkezetet kapunk, amely a terhek hatására mozgási mechanizmussá alakul.
- A keletkező elmozdulásokat felmérve megállapíthatjuk, hogy az eltávolított rúd végcsomópontjai egymáshoz képest milyen mozgást végeznek.
- Ha közeledik a két csomópont egymáshoz, akkor nyomóerőre van szükség ennek megakadályozására, vagyis a hiányzó rúd, amely az elmozdulásmentességet biztosítja, nyomott lesz. A csomópontok távolodása esetén pedig húzott rúdra számíthatunk.



SZIMMETRIA TULAJDONSÁGOK, EREDMÉNYEK MEGADÁSA

- Ha a rácsos tartó alakja és megtámasztása mellett a terhelése is szimmetrikus, akkor a külső kényszererők és a rúderők is szimmetrikusan alakulnak. Ennek megfelelően a rúderőszámítást elegendő a szimmetriatengely egyik oldalán elvégezni.
- A kiszámított eredményeket érdemes egy áttekinthető rúderőtáblázatba foglalni, valamint a rúderőket a hálózati rajzban feltüntetni a könnyebb ellenőrizhetőség érdekében.

RÚDERŐTÁBLÁZAT			
RÚDJEL		RÚDERŐ	
		HÚZOTT	NYOMOTT
FELSŐ ÖV	1-3		
	3-5		
ALSÓ ÖV	0-2		
	2-4		
OSZLOPOK	0-1		
	2-3		
	4-5		
RÁCSRUDAK	1-2		
	2-5		



Tartószerkezetek mechanikája I.

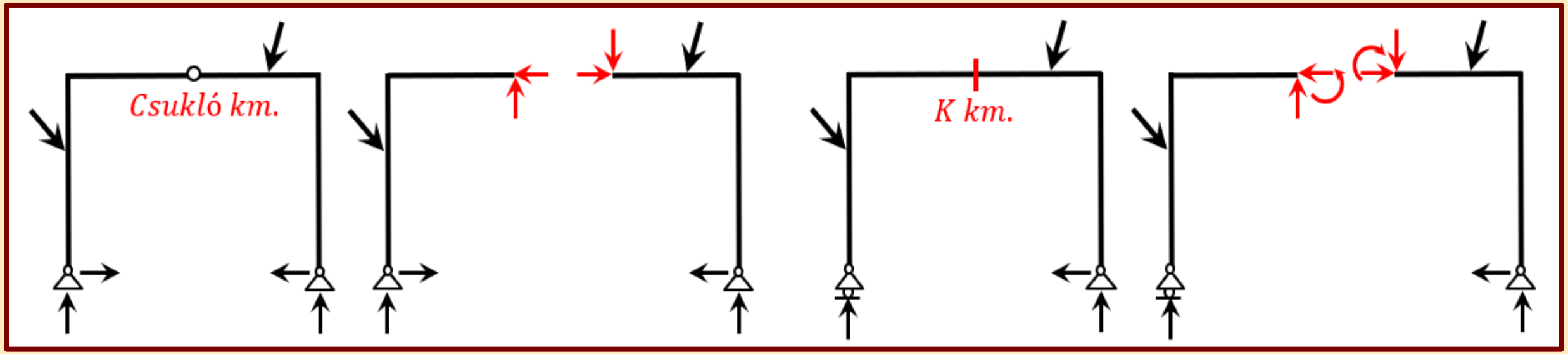
8.

Igénybevételek, igénybevételi ábrák

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

IGÉNYBEVÉTELEK ÉRTELMEZÉSE

- A külső erők hatására a tartó tengelyére merőleges metszeteiben belső erők ébrednek, amelyeket igénybevételeknek hívunk. Az igénybevételek tehát mindig a tartó keresztmetszeteihez hozzárendelt mennyiségek.
- A tartószerkezetek megfelelőségének igazolásánál, méretezésénél, ellenőrzésénél szükséges az igénybevételek ismerete.
- Az eddigiekben belső erőket az összetett tartók belső kapcsolatainak feloldásával kaptunk. Ugyanilyen módon bármilyen tartó bármely folytonos anyagi kapcsolattal kialakított keresztmetszete vizsgálható.



IGÉNYBEVÉTELEK MEGHATÁROZÁSA

- Az igénybevételek a vizsgált keresztmetszetnél kettéválasztott tartó egyik tartórészére működő dinámok a keresztmetszetben, amelyek a megszüntetett anyagi folytonosságot pótolják a tartórész egyensúlyának biztosításával.

$$(A; B; F_1; F_2) \doteq 0$$

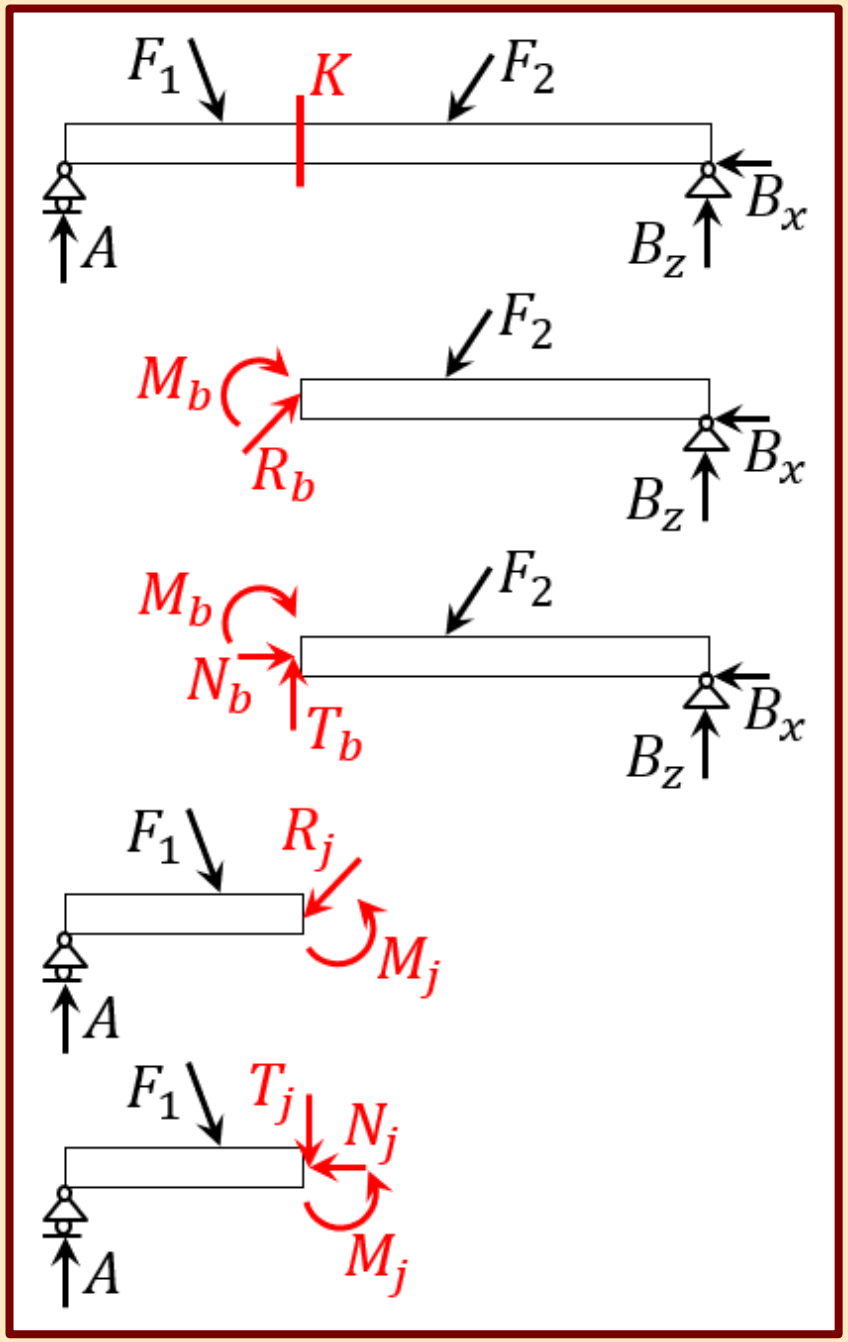
$$(R_b; M_b; B; F_2) \doteq 0 \qquad (A; F_1) \doteq (R_b; M_b)$$

$$(N_b; T_b; M_b; B; F_2) \doteq 0 \qquad (N_b; T_b) \doteq R_b$$

$$(R_j; M_j; A; F_1) \doteq 0 \qquad (B; F_2) \doteq (R_j; M_j)$$

$$(N_j; T_j; M_j; A; F_1) \doteq 0 \qquad (N_j; T_j) \doteq R_j$$

- Az igénybevételeket akár a bal, akár a jobb oldali megmaradt tartórészen értelmezzük, ugyanarra az eredményre jutunk .



IGÉNYBEVÉTELEK TÍPUSAI

- Az igénybevételeket egy lokális koordináta rendszerben határozzuk meg, amely az aktuális állású keresztmetszet síkjához illeszkedik, egyik tengelye a keresztmetszet síkjába, a másik a normálisába esik.
- A keresztmetszetet megelőző erők normálirányú vetületösszegét a keresztmetszet normáligénybevételének nevezzük.

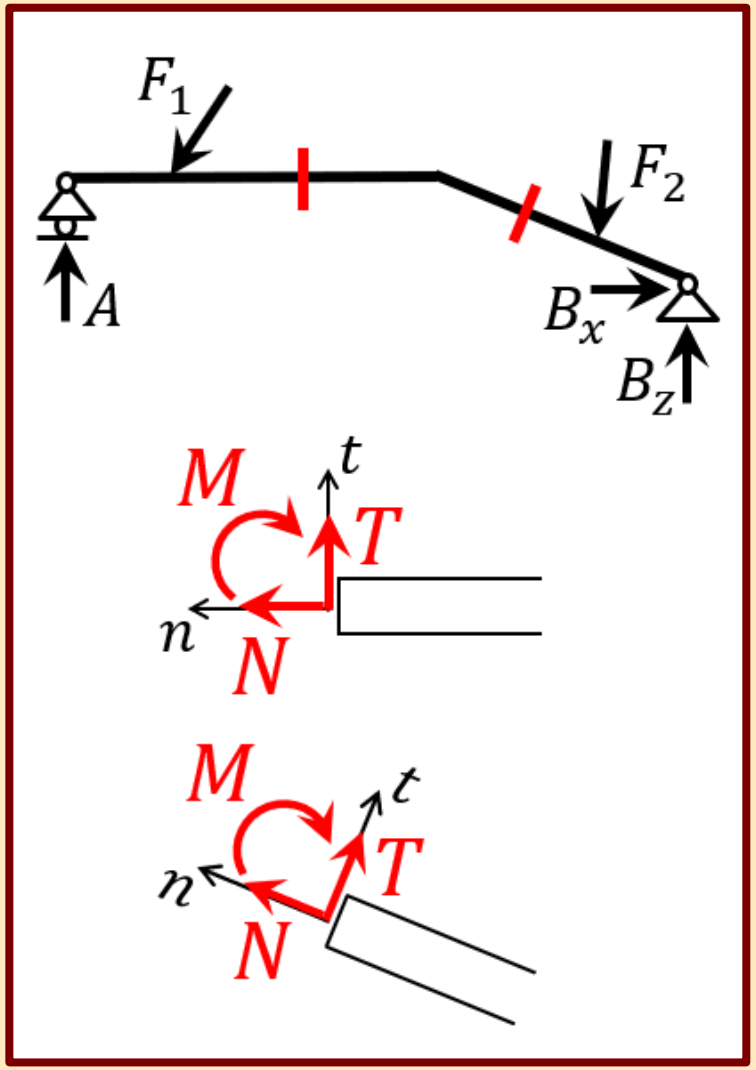
$$N_K = \sum_{bal} F_{in}$$

- A keresztmetszetet megelőző erők normálisra merőleges irányú vetületösszegét a keresztmetszet nyíróigénybevételének nevezzük.

$$T_K = \sum_{bal} F_{it}$$

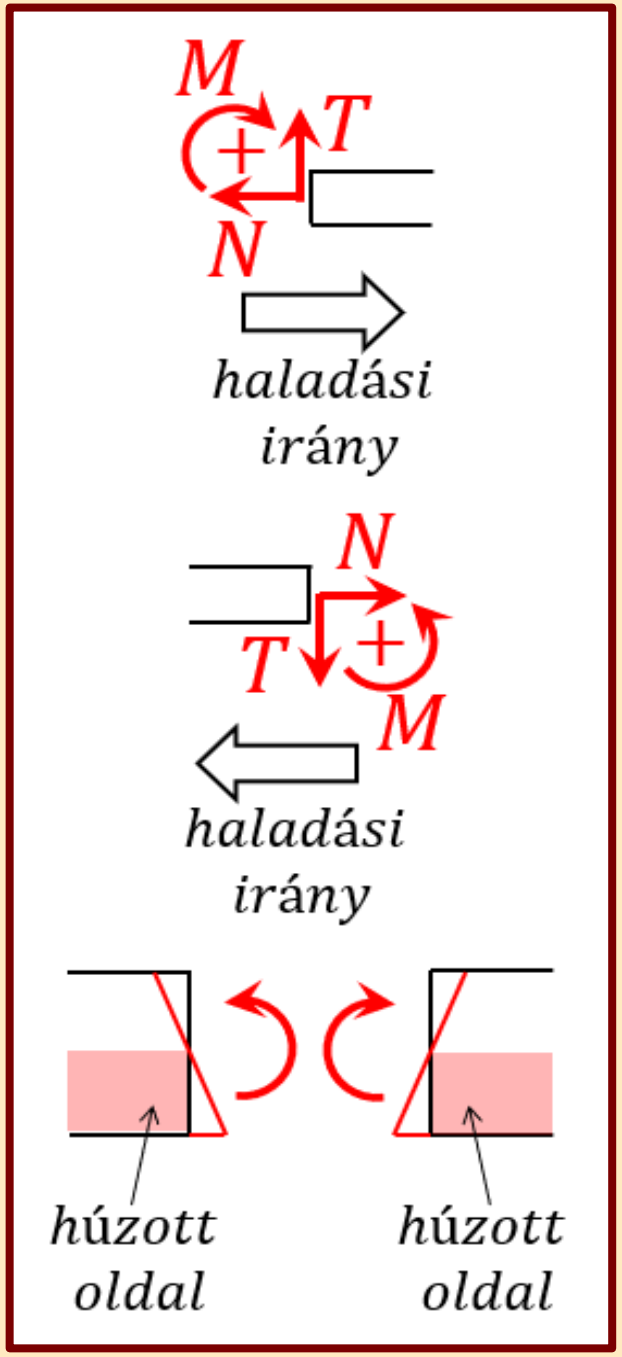
- A keresztmetszetet megelőző erőknek a keresztmetszet súlypontjára vett nyomatékösszegét a keresztmetszet nyomatéki igénybevételének nevezzük.

$$M_K = \sum_{bal} M_i^0$$



IGÉNYBEVÉTELEK ELŐJELSZABÁLYA

- A keresztmetszetet megelőző tartórészről balról jobbra haladva, a keresztmetszetet követő tartórészről pedig jobbról balra haladva kaphatjuk meg a kapcsolati erőket, amelyek egymás ellentettjei lesznek (hatás-ellenhatás). A kapcsolati erőket igénybevételekként értelmezve, az előjelezésüknek azonosnak kell lennie akármelyik irányból is határozzuk meg őket, ezért az előjelszabálynak ezt kell biztosítania.
- A normáligénybevétel pozitív, ha húzza a keresztmetszetet.
- A nyíróigénybevétel pozitív, ha a pozitív normálerő plusz 90°-kal elfordított irányába mutat.
- A nyomatéki igénybevétel pozitív, ha a keresztmetszet alsó felét húzza. Ez balról az órával megegyező, jobbról az órával ellentétes forgatás esetén teljesül.



IGÉNYBEVÉTELEK SZÁMÍTÁSA

- A koncentrált erő és nyomaték a nekik megfelelő igénybevételt ugrásszerűen változtatják meg.
- A K_1 keresztmetszet igénybevételei:

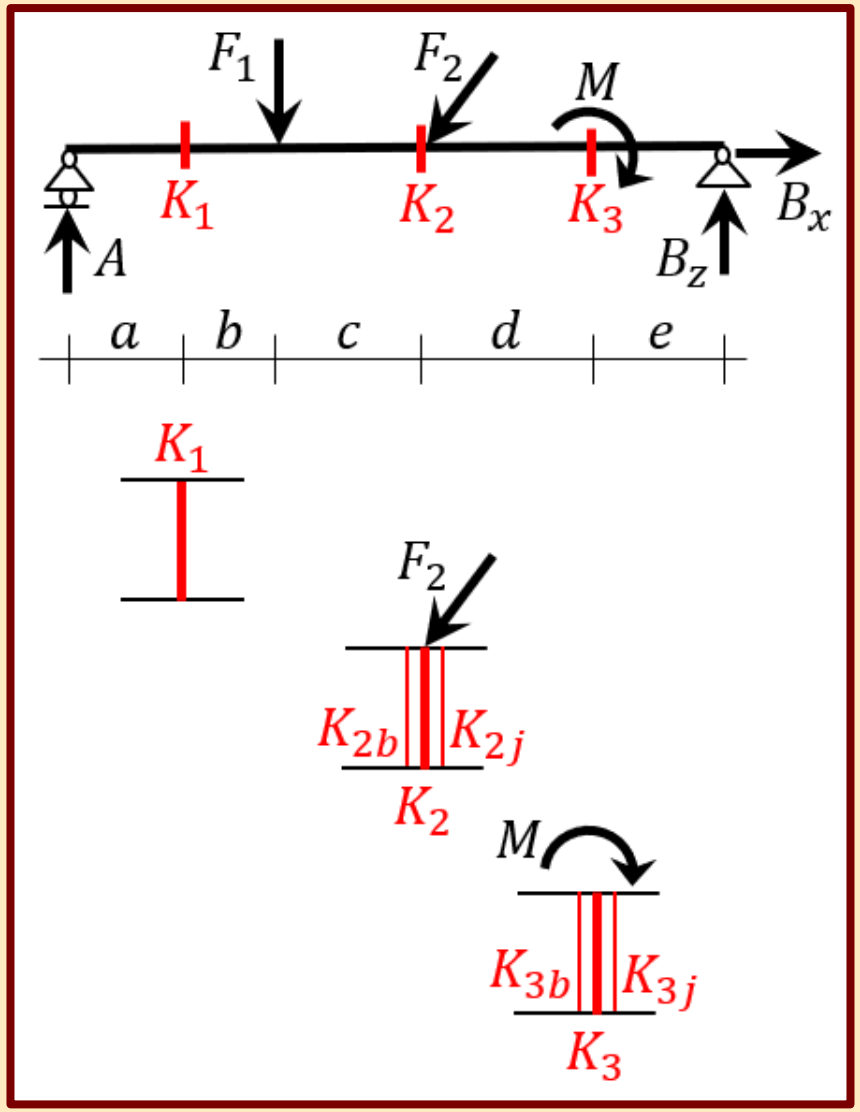
$$N_{K_1} = 0$$
$$T_{K_1} = A$$
$$M_{K_1} = A \cdot a$$

- A K_2 keresztmetszet igénybevételei:

$$N_{K_{2b}} = 0; \quad N_{K_{2j}} = F_{2x}; \quad \Delta N_{K_2} = F_{2x}$$
$$T_{K_2b} = A - F_1; T_{K_{2j}} = A - F_1 - F_{2z}; \Delta T_{K_2} = -F_{2z}$$
$$M_{K_2} = A \cdot (a + b + c) - F_1 \cdot c$$

- A K_3 keresztmetszet igénybevételei:

$$N_{K_3} = F_{2x}$$
$$T_{K_3} = A - F_1 - F_{2z}$$
$$M_{K_{3b}} = A \cdot (a + b + c + d) - F_1 \cdot (c + d) - F_{2z} \cdot d$$
$$M_{K_{3j}} = A \cdot (a + b + c + d) - F_1 \cdot (c + d) - F_{2z} \cdot d + M; \quad \Delta M_{K_3} = M$$



IGÉNYBEVÉTELI FÜGGVÉNYEK ÉS ÁBRÁK

- Ha a tartó valamennyi keresztmetszetéhez hozzárendeljük az igénybevételeit, akkor a kapott hozzárendeléseket a tartó igénybevételi függvényeinek hívjuk.

$$Ha\ x < a$$

$$N_{(x)} = -A_x$$

$$T_{(x)} = A_z$$

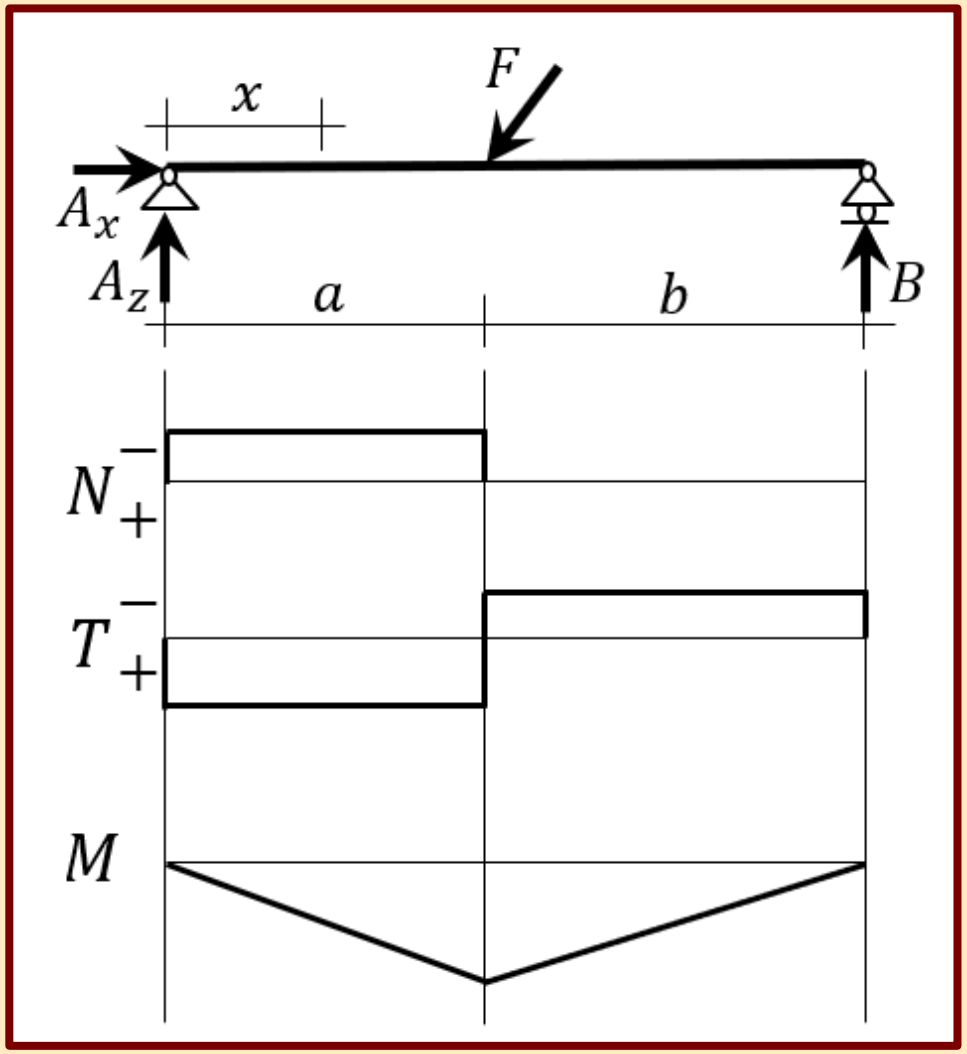
$$M_{(x)} = A_z \cdot x$$

$$Ha\ x > a$$

$$N_{(x)} = 0$$

$$T_{(x)} = A_z - F_z$$

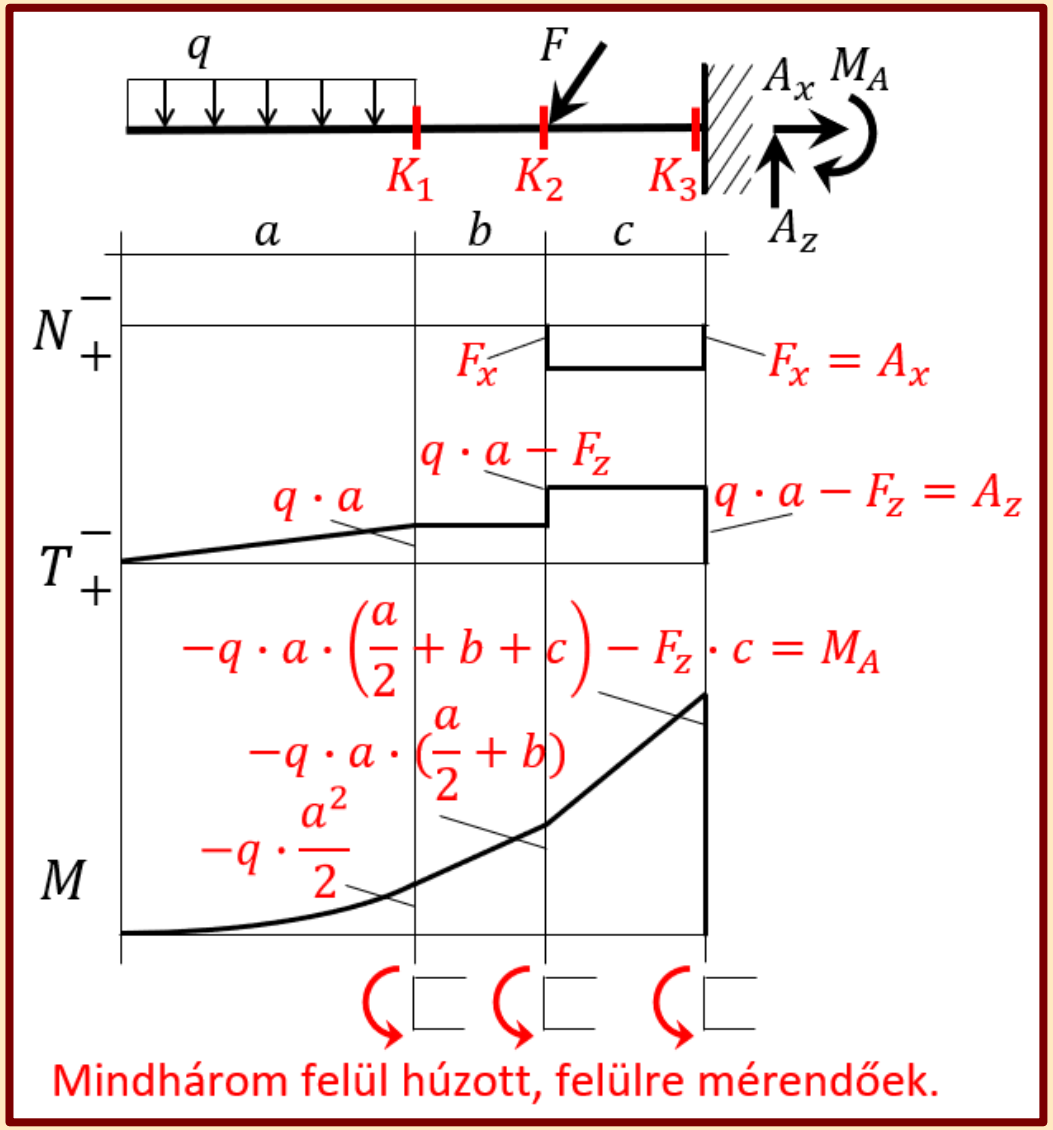
$$M_{(x)} = A_z \cdot x - F_z \cdot (x - a)$$



- Az igénybevételi függvények grafikus megjelenítését igénybevételi ábráknak nevezzük.

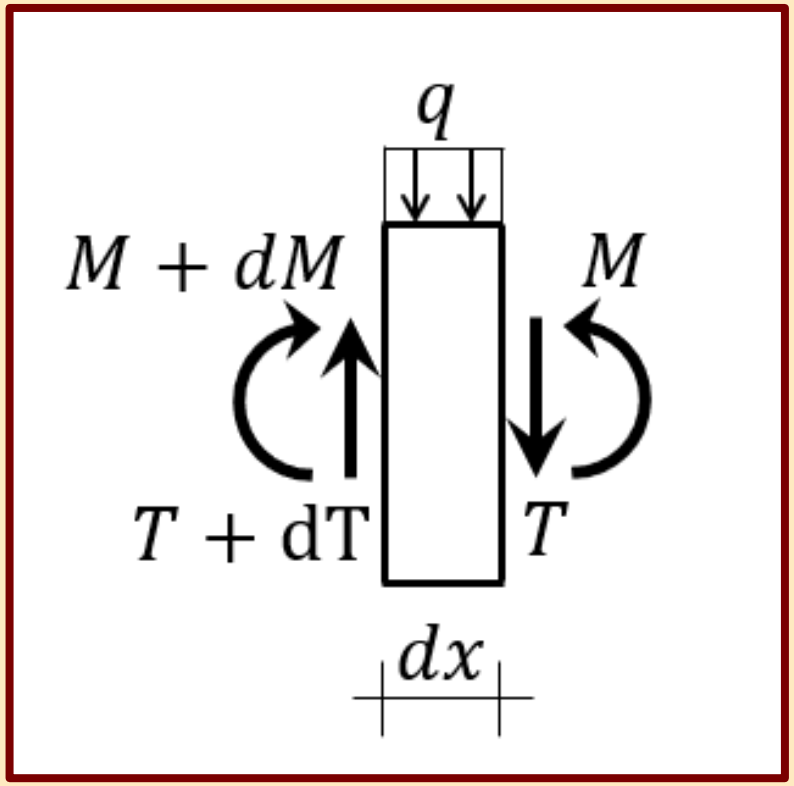
IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁK MEGHATÁROZÁSA

- Az igénybevételi ábrák a tartó tengelye mentén minden keresztmetszetben megadják a belső erők értékét.
- Az ábrákat az igénybevételek definíciója alapján megrajzolhatjuk. Az egyes függvényszakaszok végkeresztmetszeteiben meghatározzuk és felmérjük az értékeket, majd a függvénynek megfelelően ezeket összeköthetjük.
- Az ábrákat a tartó tengelyvonalával megegyező vonalra rajzoljuk, a pozitív értékeket a tengelytől lefelé, a negatívakat felfelé. A nyomatéki ábráknál az előjelek alapján történő ábrázolás helyett alkalmazhatjuk azt, hogy ez az ábra mindig a húzott oldalra kerül.



IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁK MATEMATIKAI ÖSSZEFÜGGÉSEI

- Az igénybevételi függvények között matematikai kapcsolat áll fenn. Ennek megállapításához vizsgáljuk meg egy tartó elemi hosszúságú darabját és annak egyensúlyát:



$$\sum F_{it} = T + dT - q \cdot dx - T = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = q$$

$$\sum M_i^0 = M + dM + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + T \cdot dx - M = 0$$

($q \cdot dx \cdot dx/2$ tag másodrendűen kicsiny, ezért elhanyagolható.)

$$\frac{dM}{dx} = -T$$

- A teherfüggvény a nyíróerőfüggvény meredekségfüggvénye (deriváltfüggvénye).
- A nyíróerőfüggvény a nyomatéki függvény negatív meredekségfüggvénye (deriváltfüggvénye).

AZ ÁBRÁK MATEMATIKAI ÖSSZEFÜGGÉSEINEK ALKALMAZÁSA

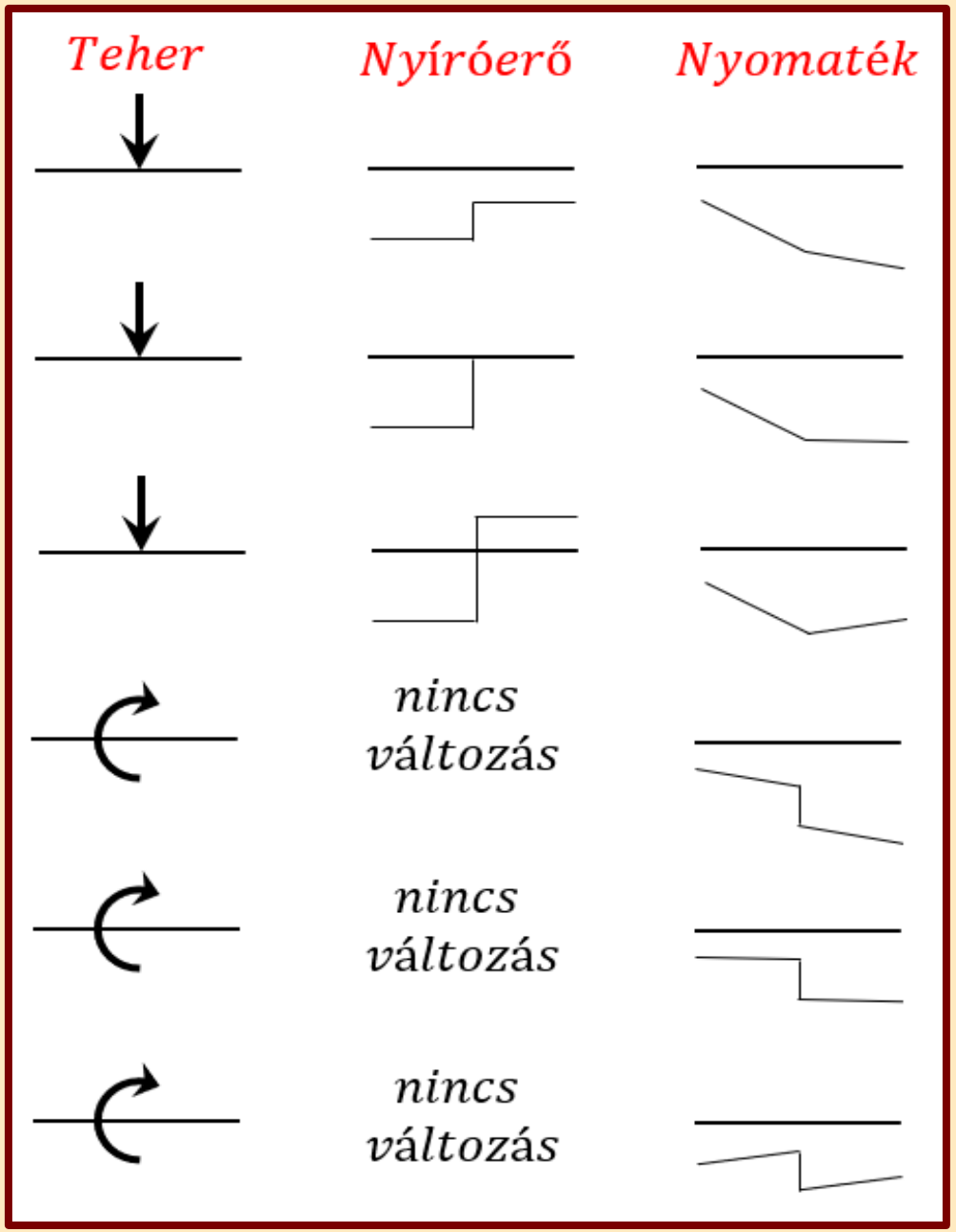
AZ ÁBRÁK ALAKJÁNAK MEGHATÁROZÁSA

- A igénybevételi függvények közötti matematikai kapcsolat a grafikus megjelenítésben is érvényesül, így az ábrák alakjában is.
- A differenciális összefüggés alapján a függvények fokszáma eggyel növekszik a teher-, a nyíróerő-, és a nyomatéki ábra között.
- A negatív nyíróerő ábra alatt a nyomatéki ábra felfelé tart, a pozitív alatt lefelé.

Teher	*Nyíróerő*	*Nyomaték*
$0\ fv.$	$konstans\ fv.$	$lineáris\ fv.$
$konstans\ fv.$	$lineáris\ fv.$	$másodf.p.fv.$
$lineáris\ fv.$	$másodf.p.fv.$	$harmadf.p.fv.$
	$-$	$felfelé\ tartó$
	$+$	$lefelé\ tartó$

AZ ÁBRÁK A KONCENTRÁLT ERŐ ÉS NYOMATÉK HELYÉN

- A koncentrált hatások helye szinguláris, a velük összefüggő igénybevételi ábráknak szakadási helyük van itt.
- Ez rajzilag azt jelenti, hogy a koncentrál erő helyén a normál és/vagy nyíróerő ábrában az erő értékének megfelelő ugrás alakul ki. A nyomatéki ábrában a differenciális kapcsolatból adódóan törés jön létre, hiszen a meredeksége és annak változása a nyíróerő értékének és annak változásának felel meg.
- A koncentrált nyomaték helyén pedig a nyomatéki ábrában alakul ki az értékének megfelelő ugrás a nyíróerő ábra változatlansága mellett.



A NYOMATÉKI ÁBRÁK SZÉLSŐ ÉRTÉKE

- A nyíróerő ábra előjelváltásánál a nyomatéki ábrának lokális szélső értéke alakul ki.

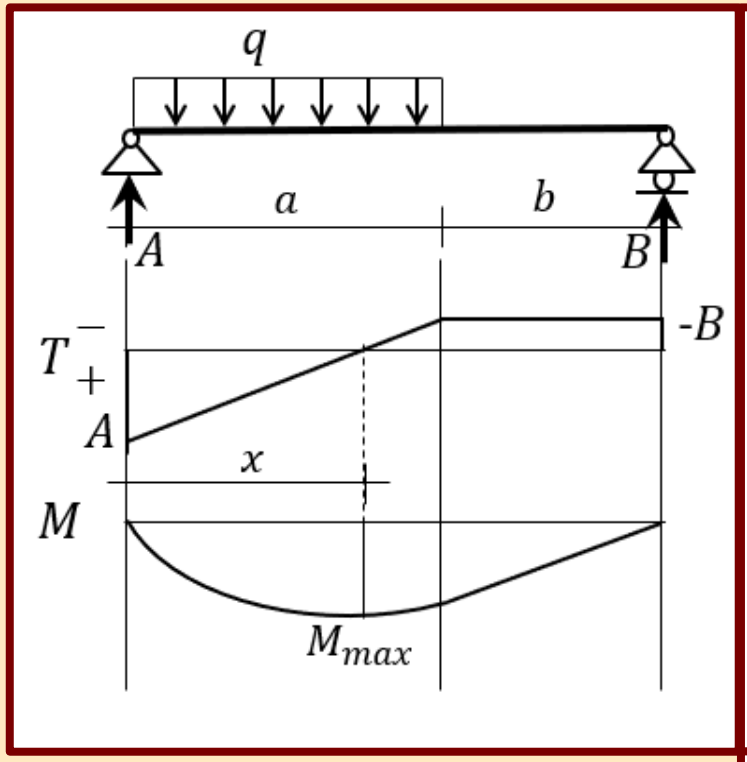
  Megoszló teher esetén:

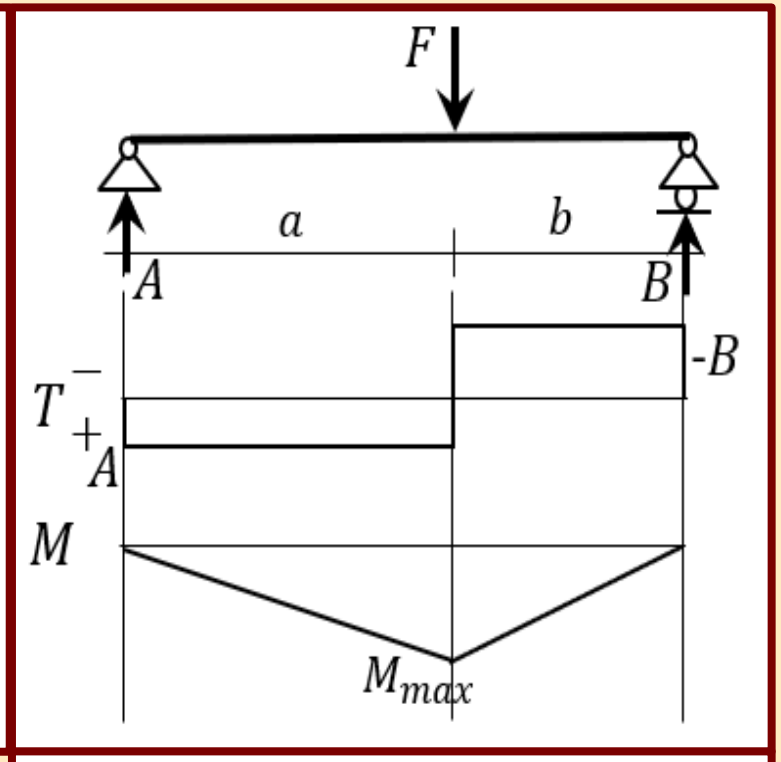
$$T_{(x)} = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{A}{q}$$

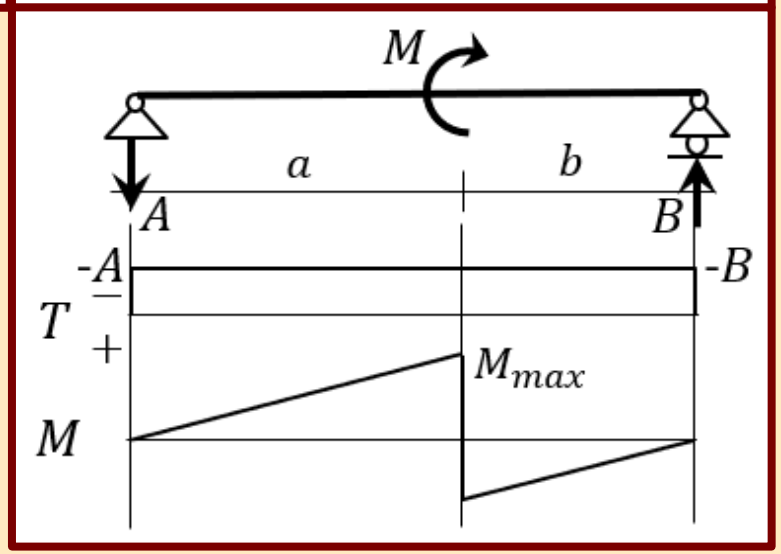
$$M_{max} = A \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

  Koncentrált teher esetén:

$$M_{max} = A \cdot a$$







- A koncentrált nyomaték helyénél is kialakulhat szélső érték a nyomatéki ábrában, de ebben az esetben a nyíróerő ábrában nem történik változás.

MEREDEKSÉG- ÉS TERÜLETSZÁMÍTÁS AZ ÁBRÁK KÖZÖTT

- Lineáris nyomatéki ábra egyes függvényszakaszainak meredekségét kiszámolva az ugyanezen szakaszokon kialakuló nyíróerő értékét kapjuk vissza:

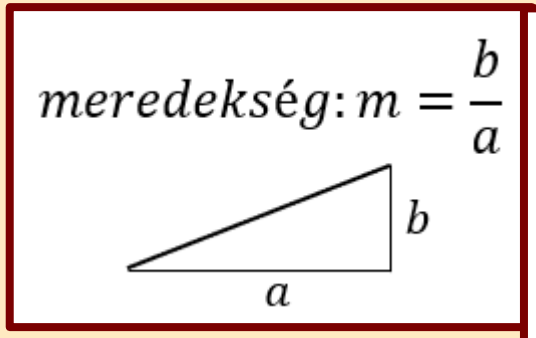
$$m_1 = \frac{M_1}{a} = F_1; \quad m_2 = \frac{M_2 - M_1}{b} = F_1 + F_2$$

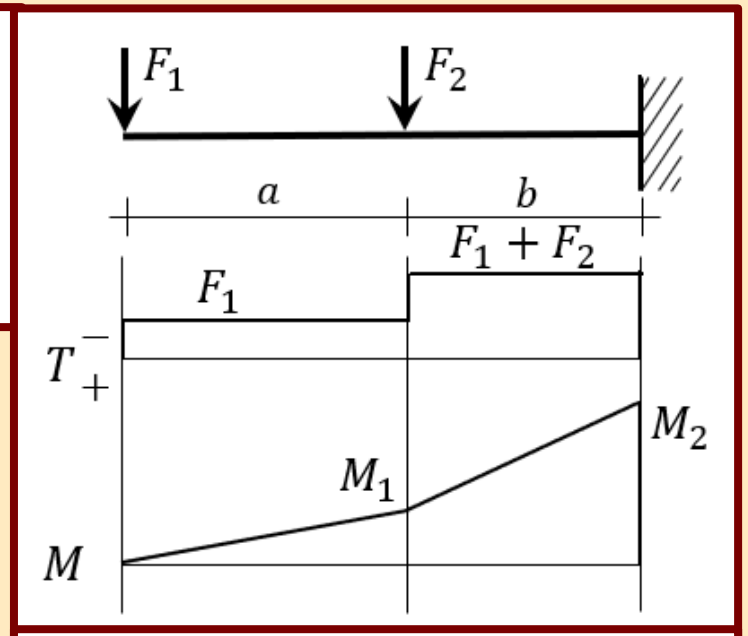
- A nyíróerő ábra egyes szakaszain az ábra területe megegyezik ugyanezen szakaszok végnyomatékainak különbségével:

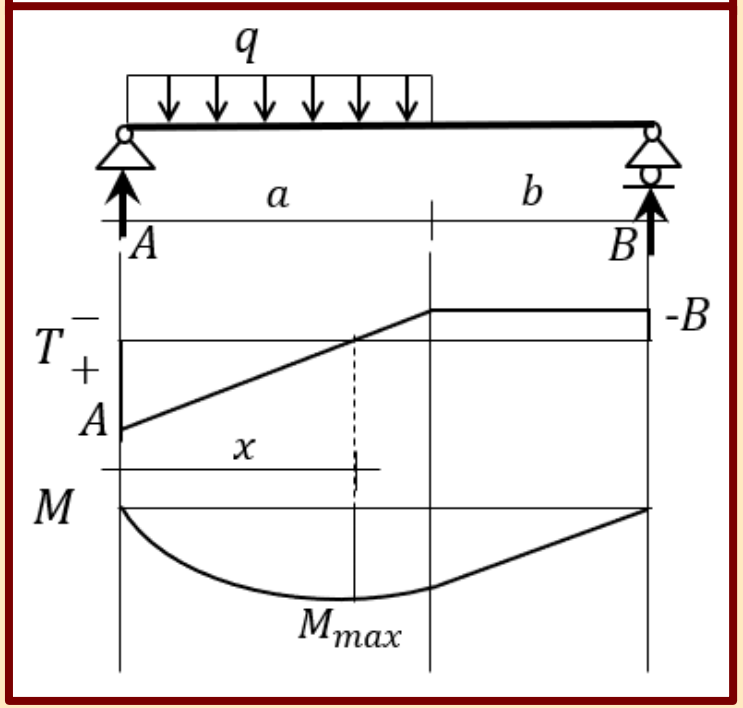
$$F_1 \cdot a = M_1 - 0 = M_1$$
$$(F_1 + F_2) \cdot b = M_2 - M_1$$

- A területszámítás a maximális nyomaték számításánál is jól hasznosítható:

$$M_{max} = \frac{A \cdot x}{2} = \frac{A^2}{2 \cdot q}; \quad x = \frac{A}{q}$$

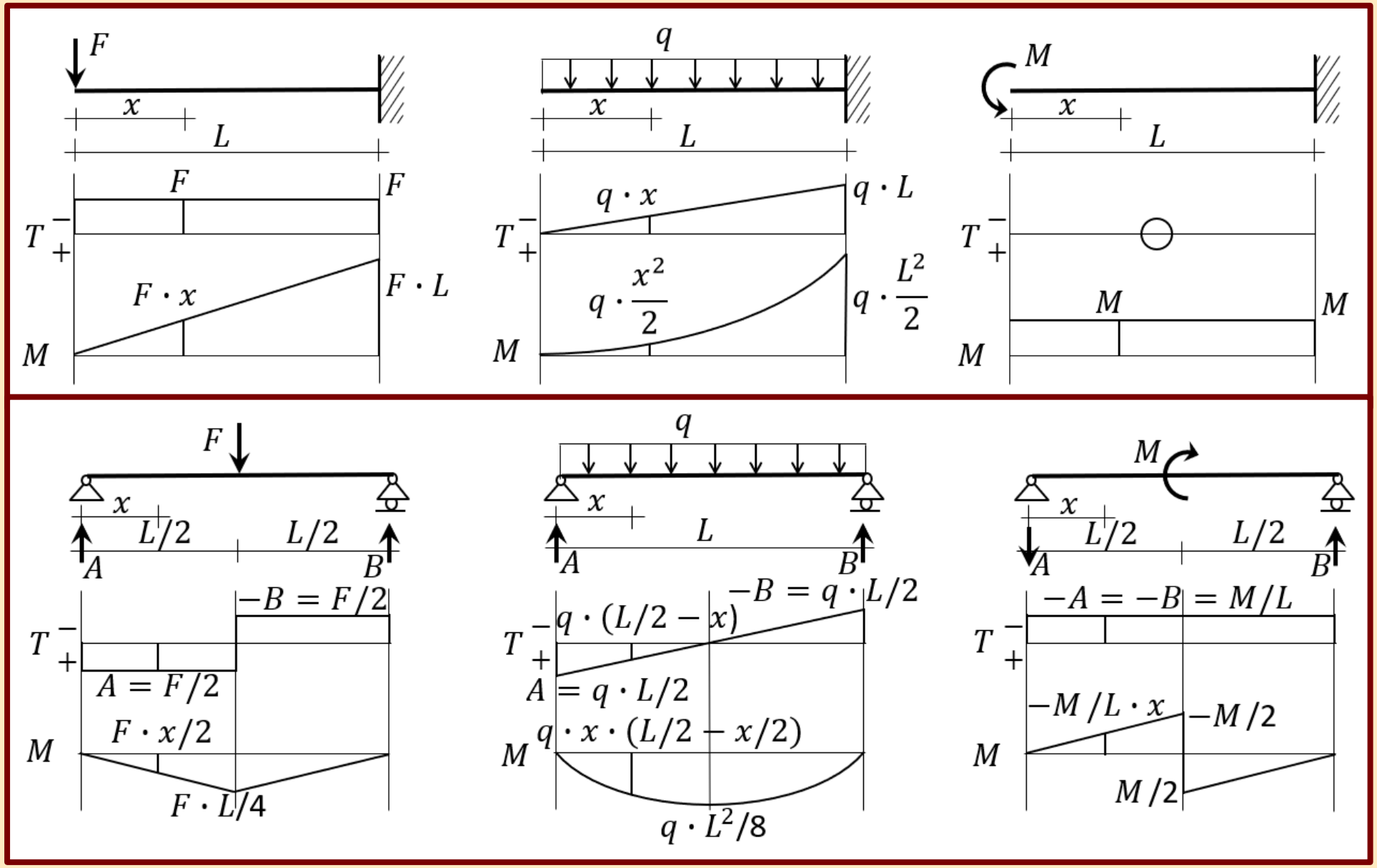






ELEMI TARTÓK IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁI

- Az összetett terhelésű tartók igénybevételei is gyakran visszavezethetőek egyszerű esetek összegzésére.
- Ezért célszerű a legegyszerűbb, leggyakoribb ilyen terhelési eseteket megismerni.



Tartószerkezetek mechanikája I.

9.

Igénybevételek, igénybevételi ábrák 2

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

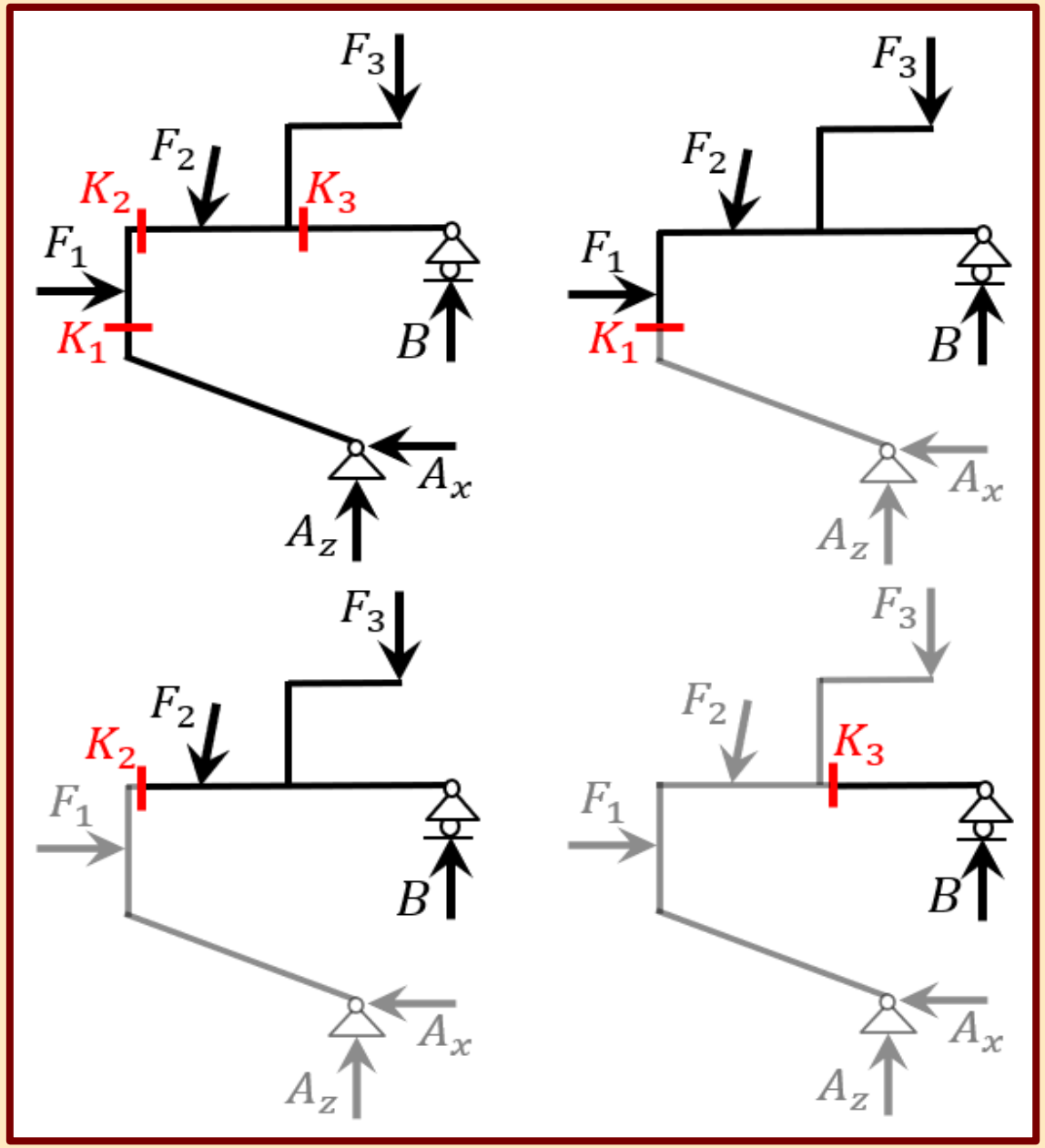
TÖRTTENGELYŰ TARTÓK IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁI

MEGELŐZŐ ÉS KÖVETŐ ERŐK

- A vizsgált keresztmetszetet megelőző erőket a tartó keresztmetszeti elvágása után a megelőző tartórészről gyűjtjük össze, függetlenül attól, hogy geometriailag a keresztmetszet melyik oldalára esnek.
- A keresztmetszeteket megelőző erők:

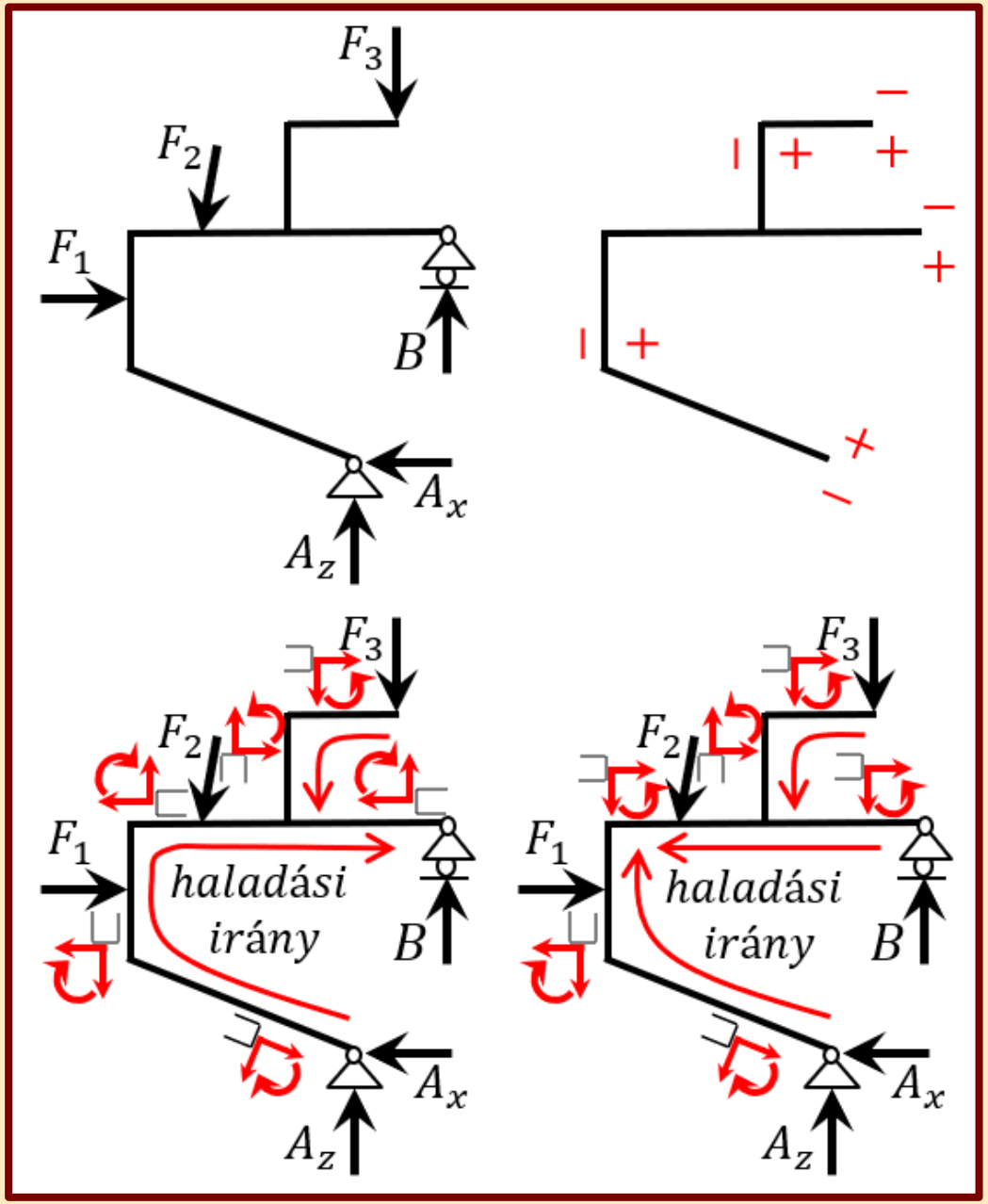
$$K_1:\ \ A_x; A_z$$
$$K_2:\ \ A_x; A_z; F_1$$
$$K_3:\ \ A_x; A_z; F_1; F_2; F_3$$

- A fenti megállapítás természetesen a keresztmetszetet követő erőkre is vonatkozik.



HALADÁSI IRÁNY

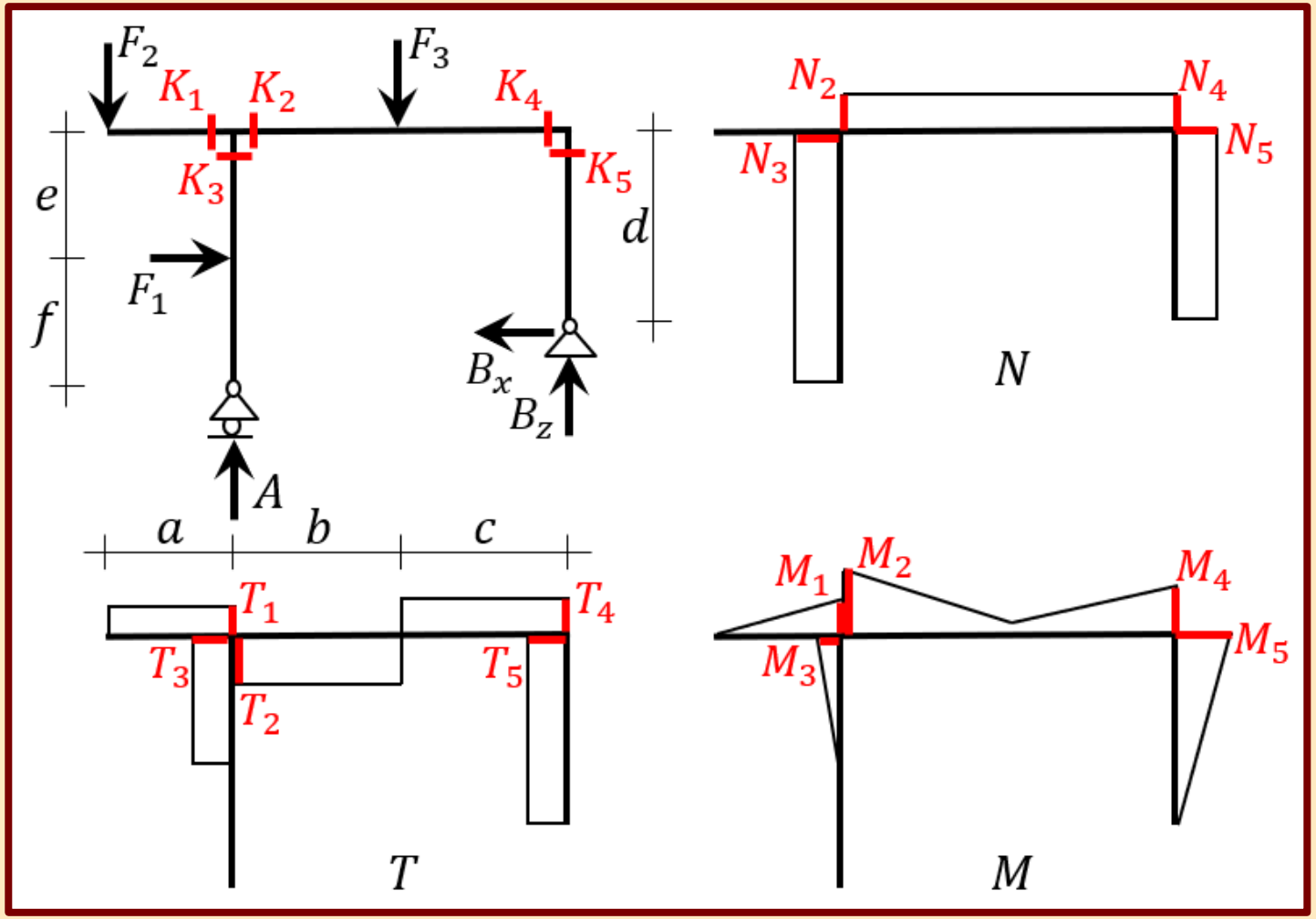
- Törttengelyű tartók esetén az ábrák megrajzolásánál érdemes kijelölnünk a vizsgálat haladási irányát. Ezt az irányt követve a tartó ábráját úgy forgassuk, hogy az aktuálisan vizsgált szakasz vízszintes legyen, így a negatív értékeket felfelé, a pozitívokat lefelé mérhetjük a szokásos módon.
- Az előjeleket a haladási irány szerint a tartótengelyhez igazítva elforgatott előjelszabály alapján állapíthatjuk meg.
- A hatékony megoldás érdekében a haladási irány menet közben is megváltoztatható a fenti elvek betartása mellett.



CSOMÓPONTOK IGÉNYBEVÉTELEINEK MEGHATÁROZÁSA

- A törttengelyű tartók csomópontjaira minden csatlakozó rúdvégről kapcsolati erők adódnak át. Az egyes rúdvégek keresztmetszeteire a megelőző vagy követő tartórészről összegezve az erők hatását, kaphatjuk meg az egyes igénybevételeiket.

$$K_1\colon\ N_1 = 0;\ \ T_1 = -F_2$$
$$M_1 = -F_2 \cdot a$$
$$K_2\colon\ N_2 = -F_1;\ \ T_2 = -F_2 + A$$
$$M_2 = -F_2 \cdot a\ -\ F_1 \cdot e$$
$$K_3\colon\ N_3 = -A;\ \ T_3 = -F_1$$
$$M_3 = -F_1 \cdot e$$
$$K_4\colon\ N_4 = -B_x;\ \ T_4 = -B_z$$
$$M_4 = -B_x \cdot d$$
$$K_5\colon\ N_5 = -B_z;\ \ T_5 = B_x$$
$$M_5 = -B_x \cdot d$$



CSOMÓPONTOK IGÉNYBEVÉTELEINEK EGYENSÚLYA

- Az egyes csomópontokat elkülönítve, azoknak egyensúlyban kell lenniük.
- Emiatt a rúdvégekről a csomópontra átadódó normál- és nyíróerők vetületi összegének nullát kell eredményezniük.

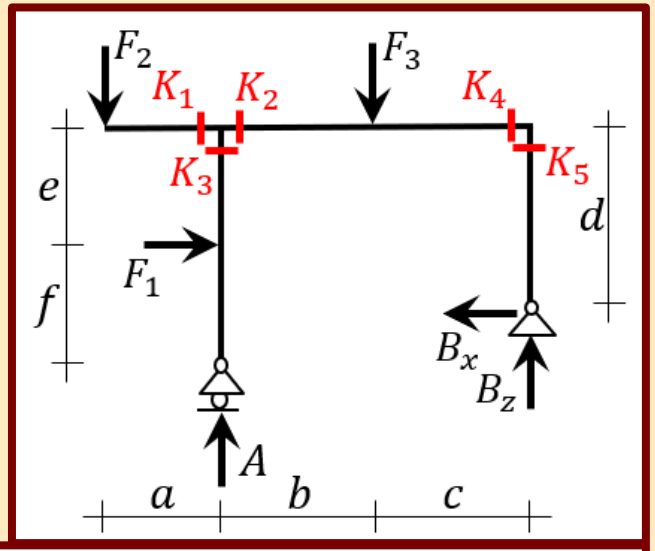
$$\sum F_{ix} = -N_2 + T_3 = 0; \quad \sum F_{ix} = N_4 - T_5 = 0$$

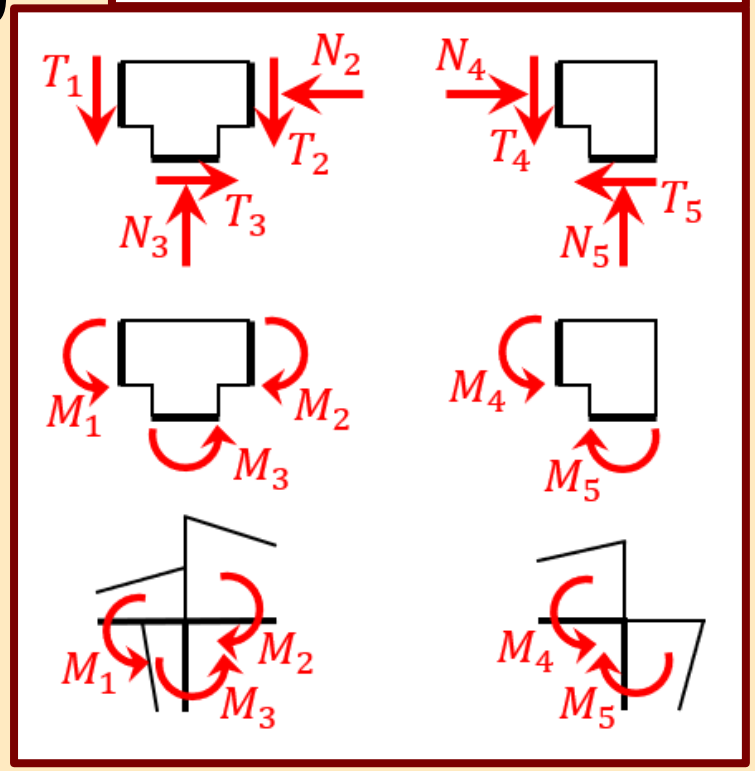
$$\sum F_{iz} = -T_1 - T_2 + N_3 = 0; \quad \sum F_{iz} = -T_4 + N_5 = 0$$

- A csomópontra ható nyomatékok is egyensúlyban vannak. Kétrudas csomópontnál ez azonos nagyságú és előjelű nyomatékokat eredményez, többrudas csomópont esetén a rúdvégek nyomatékai is együttesen adják a zérus eredményt.

$$\sum M_i = -M_1 - M_3 + M_2 = 0$$

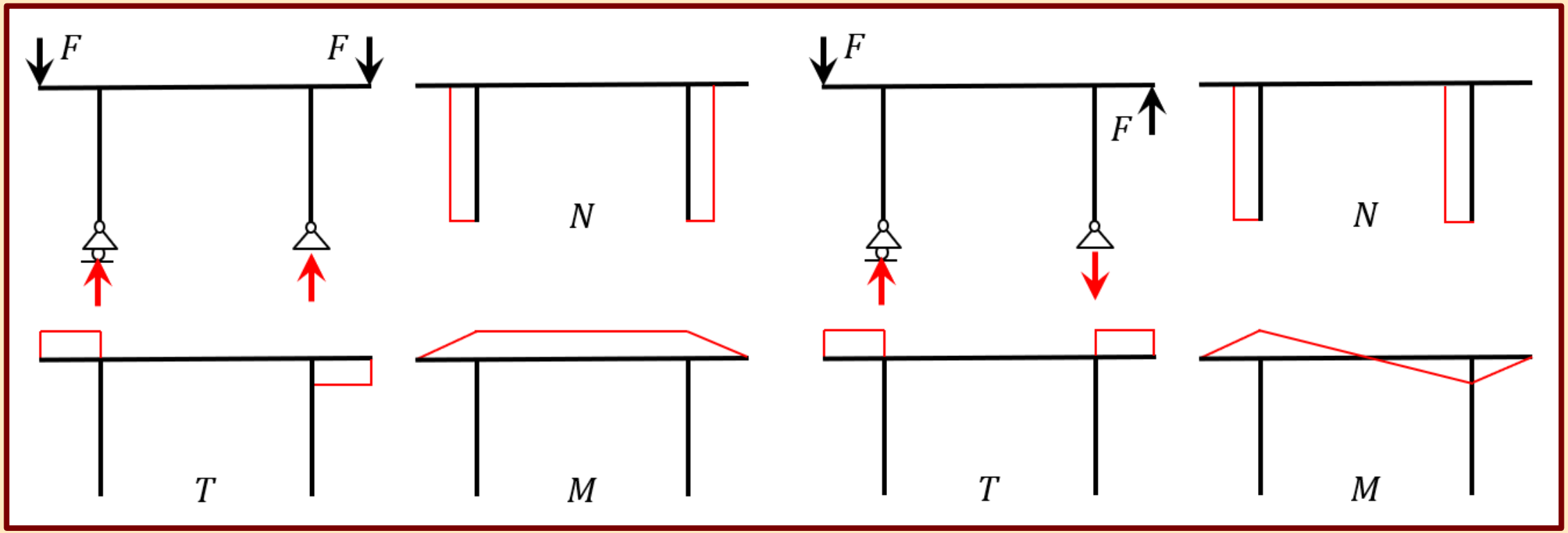
$$\sum M_i = -M_4 + M_5 = 0$$





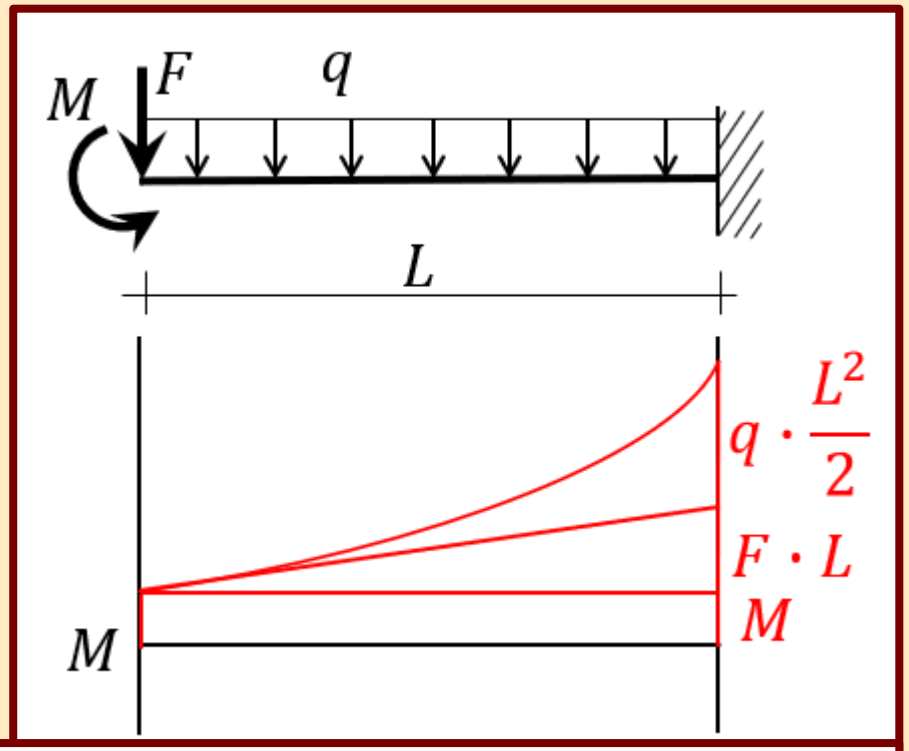
SZIMMETRIA-TULAJDONSÁGOK

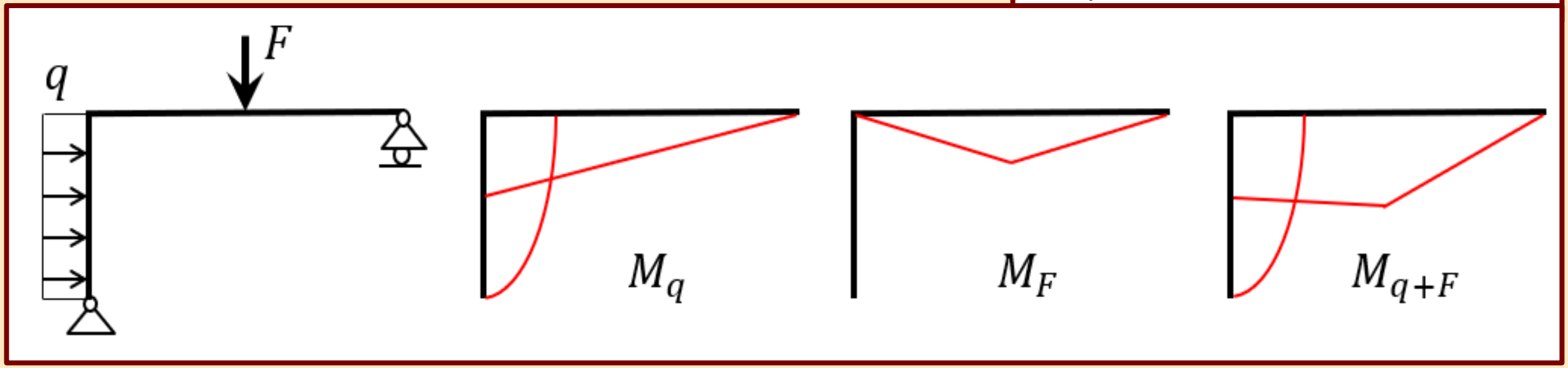
- Szimmetrikus tartó szimmetrikus terhelése esetén a támaszerők szimmetrikus kialakulása mellett a normál- és a nyomatéki igénybevételi ábra is szimmetrikusan alakul, a nyíró igénybevételi ábra pedig ferdén szimmetrikusan.
- Szimmetrikus tartó ferdén szimmetrikus terhelése esetén a támaszerők ferdén szimmetrikus kialakulása mellett a normál- és a nyomatéki igénybevételi ábra is ferdén szimmetrikusan alakul, a nyíró igénybevételi ábra pedig szimmetrikusan.



A SZUPERPOZÍCIÓ ALKALMAZÁSA

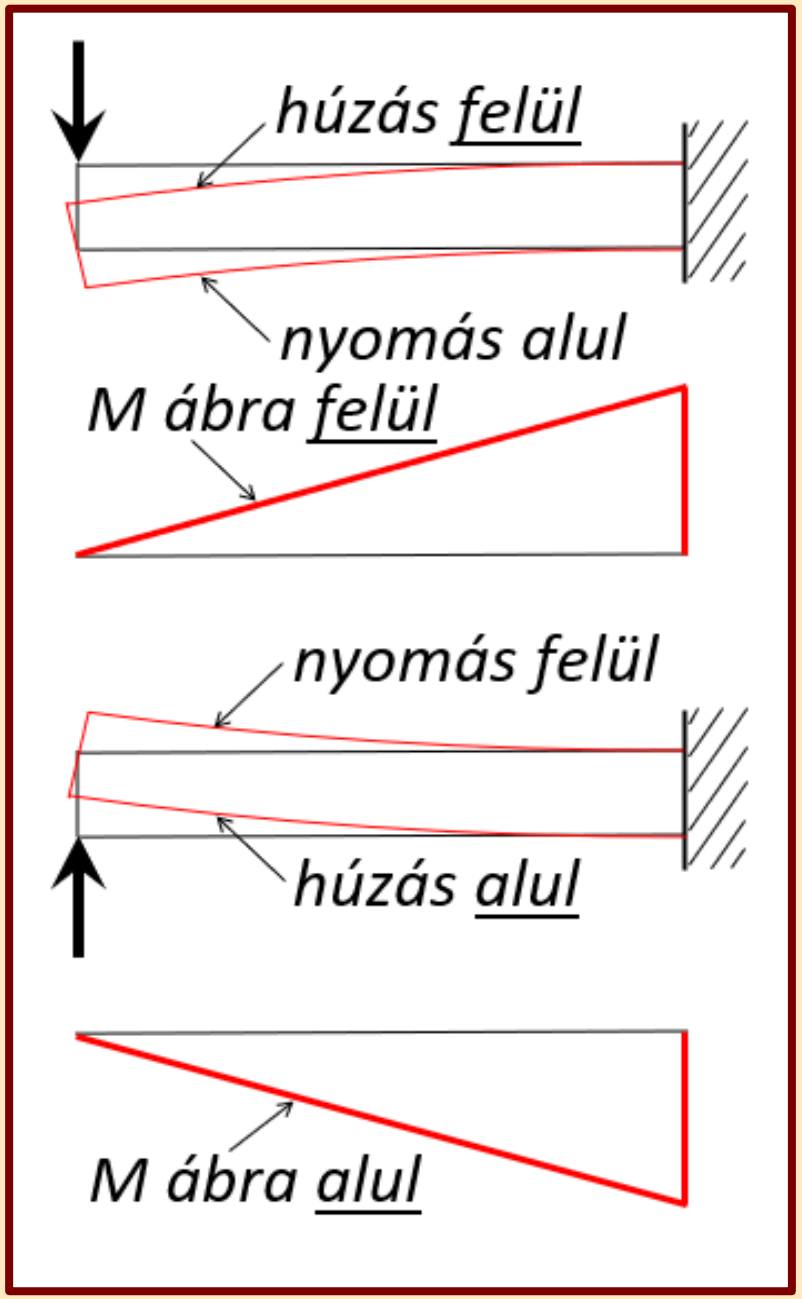
- Az igénybevételi ábrák terhenként is előállíthatóak, majd ezek összegzésével (szuperpozíciójával) is megkaphatjuk a teljes teher hatására kialakuló megoldást.
- A szuperpozíció alkalmazása egyszerűsítheti az igénybevételek működésének megértését és az ábrák megrajzolását is.





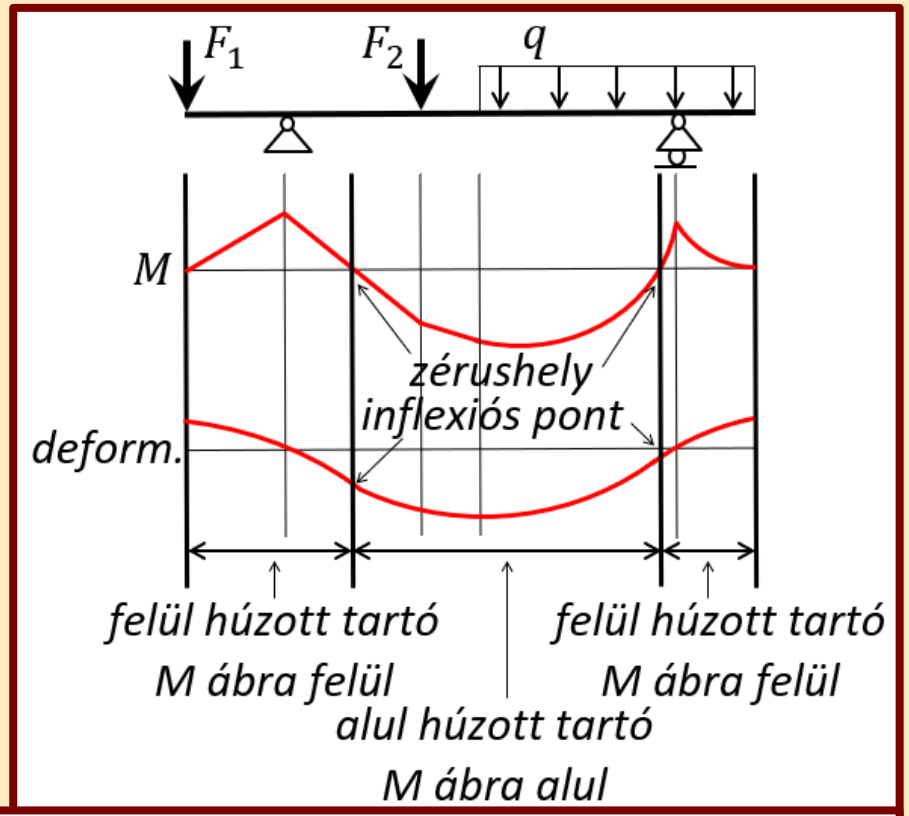
IGÉNYBEVÉTELEK ÉS DEFORMÁCIÓK

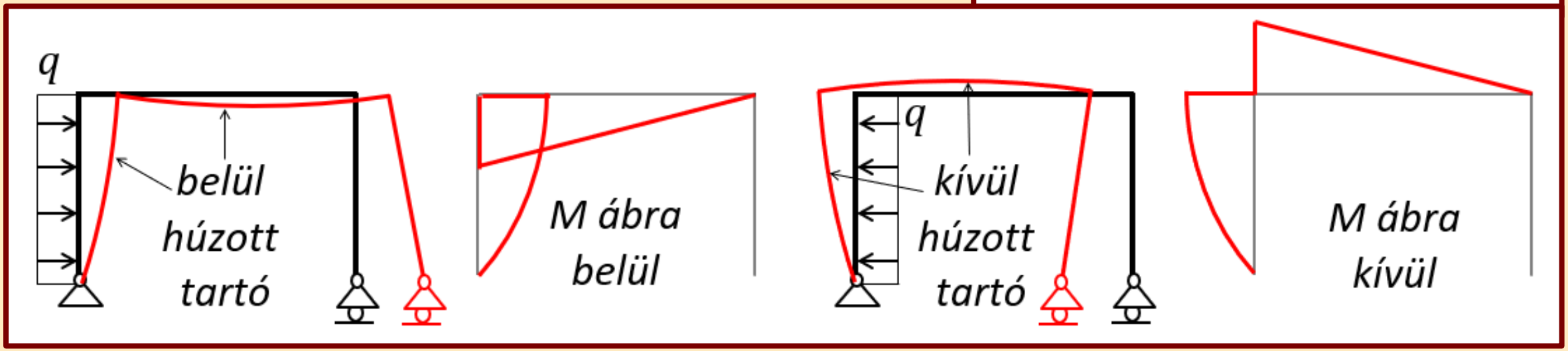
- A nyíró- és nyomatéki igénybevételek matematikai kapcsolatban állnak a tartón kialakuló deformációkkal, differenciális összefüggés van közöttük.
- A nyomatékok hatására a tartó eredeti alakja megváltozik, a keresztmetszetek elfordulnak eredeti helyzetükhöz képest, egyik felük húzott, másik felük nyomott lesz.
- A nyomatéki értékeket a keresztmetszetek húzott oldalára mérjük fel az ábrában, vagyis a nyomatéki ábra mindig a deformált alak domború (húzott) oldalára rajzolandó.



A NYOMATÉKI IGÉNYBEVÉTELEK ÉS A HÚZOTT OLDAL

- A differenciális összefüggésből adódóan a nyomatéki ábra zérushelyeinél a deformációkat feltüntető ábrának inflexiós pontja alakul ki. Ezen pontok két oldalán felülről és alulról domború (húzott) deformált tartórészek váltják egymást, a nyomatéki ábrák pedig ennek megfelelően kerülnek felülre vagy alulra az egyes szakaszokon.
- A húzott oldal vizsgálata a törttengelyű tartók nyoméki ábráinál is segítségünkre lehet.





FERDE TARTÓSZAKASZ IGÉNYBEVÉTELEI

- Ferde tartószakasz keresztmetszeteire ható függőleges vagy vízszintes erő egy normál- és egy nyíróerő összetevőre bontható, amelyet meg kell határoznunk:

$$A_N = -A \cdot \sin \alpha_1$$

$$A_T = A \cdot \cos \alpha_1$$

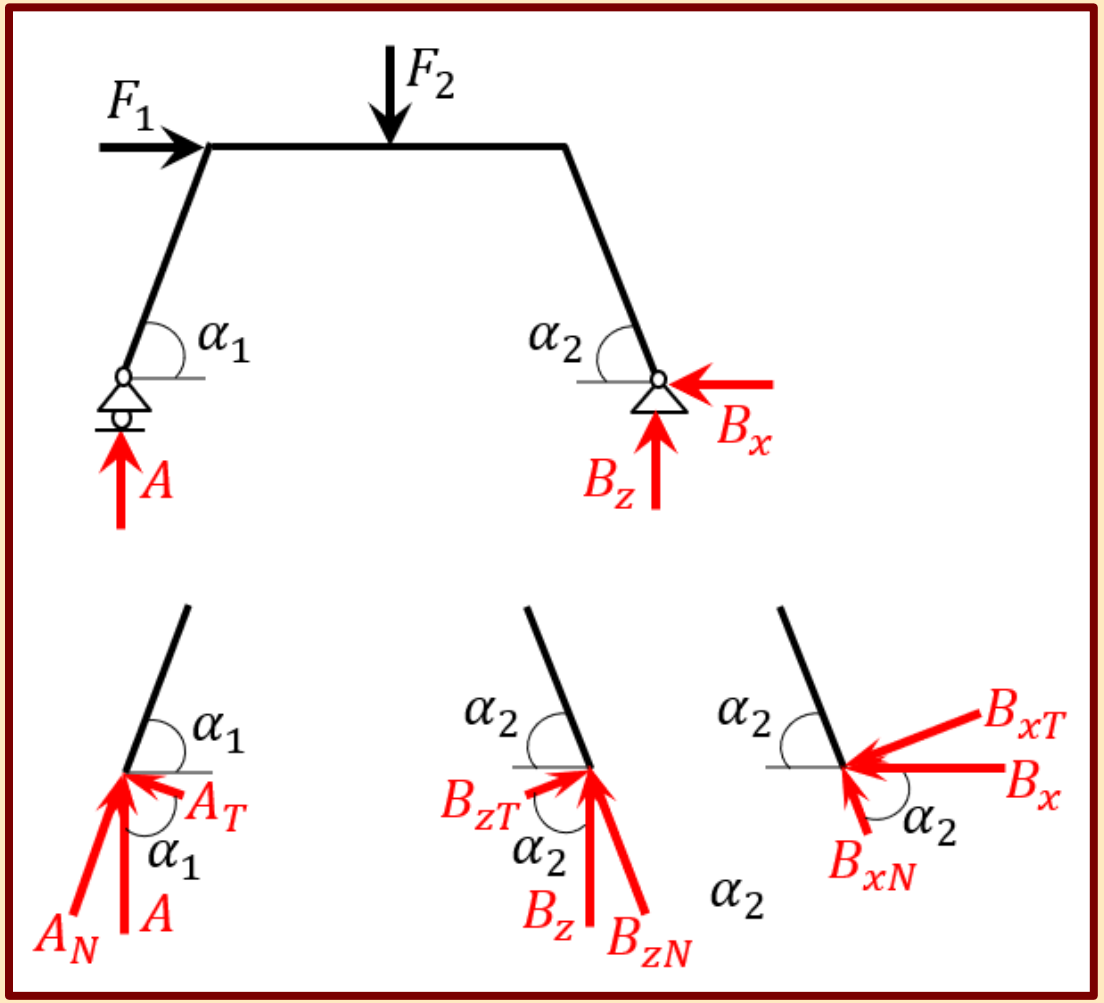
- Ha a ferde tartószakasz keresztmetszeteit több függőleges és vízszintes erő is megelőzi, akkor ezek mindegyikéből előállított normál- és nyíróirányú komponensek összege eredményezi a normál- és nyíróigénybevétel értékét:

$$B_{zN} = -B_z \cdot \sin \alpha_2 \,;\; B_{zT} = -B_z \cdot \cos \alpha_2$$

$$B_{xN} = -B_x \cdot \cos \alpha_2 \,;\; B_{xT} = B_x \cdot \sin \alpha_2$$

$$B_N = -B_{zN} - B_{xN}$$

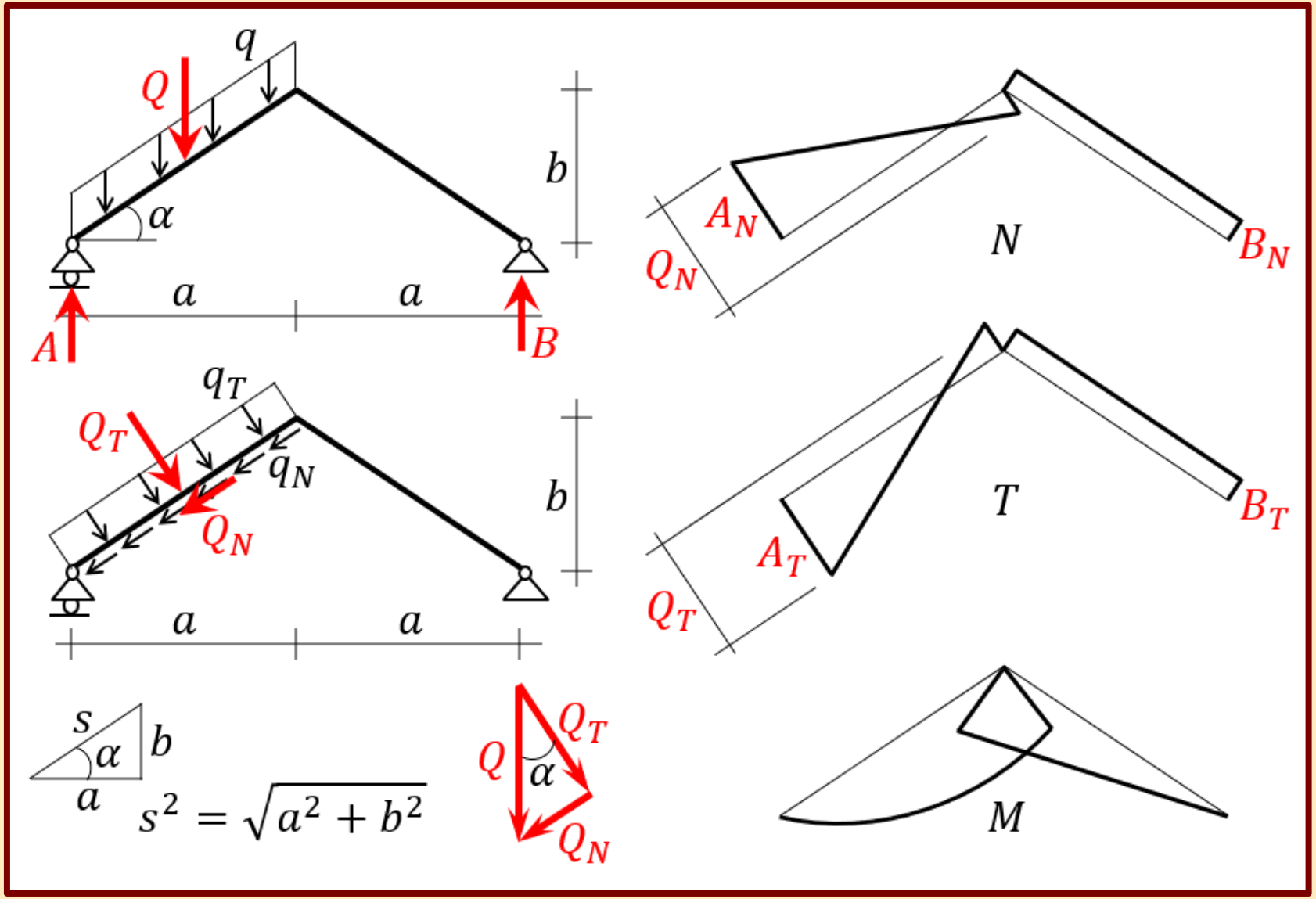
$$B_T = -B_{zT} + B_{xT}$$



IGÉNYBEVÉTELEK FERDE TARTÓSZAKASZON MEGOSZLÓ TEHERBŐL

- Ferde tartószakaszra ható függőleges vagy vízszintes megoszló erőrendszer intenzitását normál- és nyíróirányban meg kell határozni, amelyekkel a tartó igénybevételei előállíthatóak:

$$Q \cdot \cos\alpha = Q_T$$
$$q \cdot s \cdot \cos\alpha = q_T \cdot s$$
$$q \cdot \cos\alpha = q_T$$
$$Q \cdot \sin\alpha = Q_N$$
$$q \cdot s \cdot \sin\alpha = q_N \cdot s$$
$$q \cdot \sin\alpha = q_N$$



IGÉNYBEVÉTELEK FERDE TARTÓSZAKASZON MEGOSZLÓ TEHERBŐL

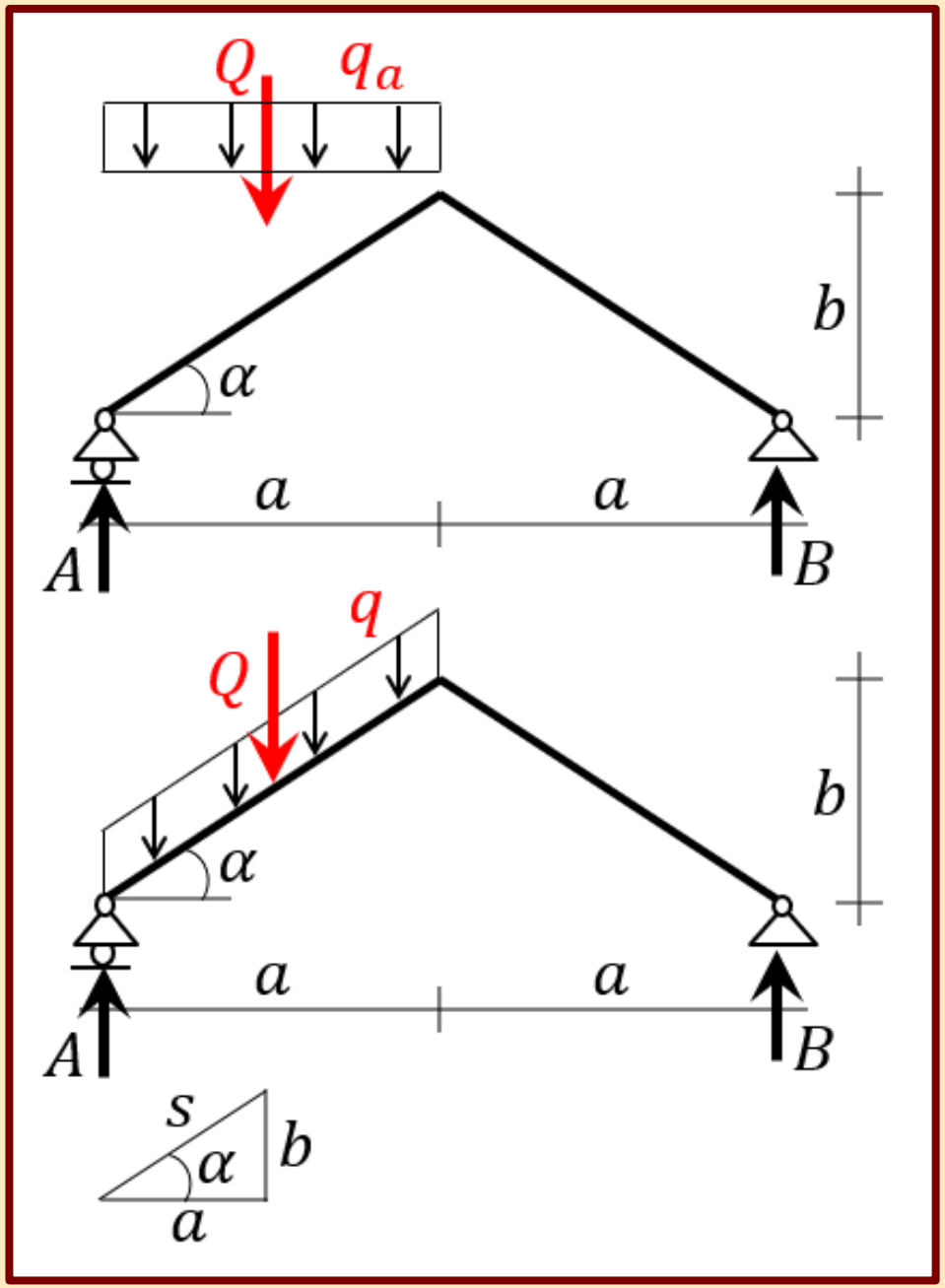
- Ferde tartószakasz függőleges vagy vízszintes vetülete mentén működő (pl. hóteher) megoszló erőrendszert (q_a) át kell számítani a ferde szakasz mentén működő teherré (q), amelyet az eredőjük azonossága alapján érdemes meghatározni. A kapott eredményt az előzőek alapján vehetjük számításba az igénybevételi ábrák megrajzolásánál a normál- és nyíróirányú intenzitások meghatározásával.

$$q \cdot s = q_a \cdot a$$

$$q = q_a \cdot \frac{a}{s} = q_a \cdot \cos\alpha$$

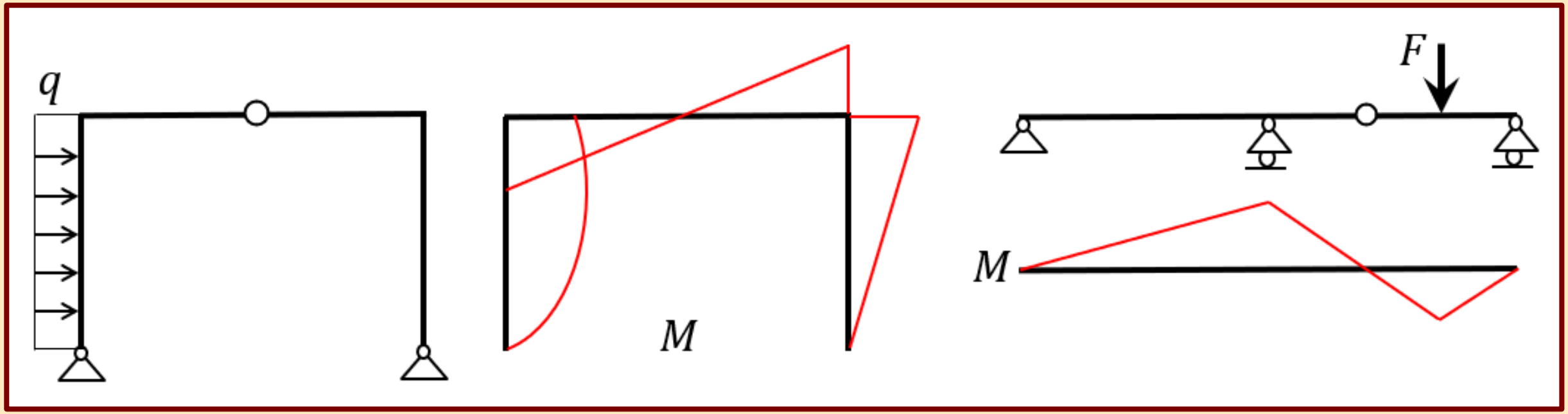
$$q_T = q \cdot \cos\alpha$$

$$q_N = q \cdot \sin\alpha$$



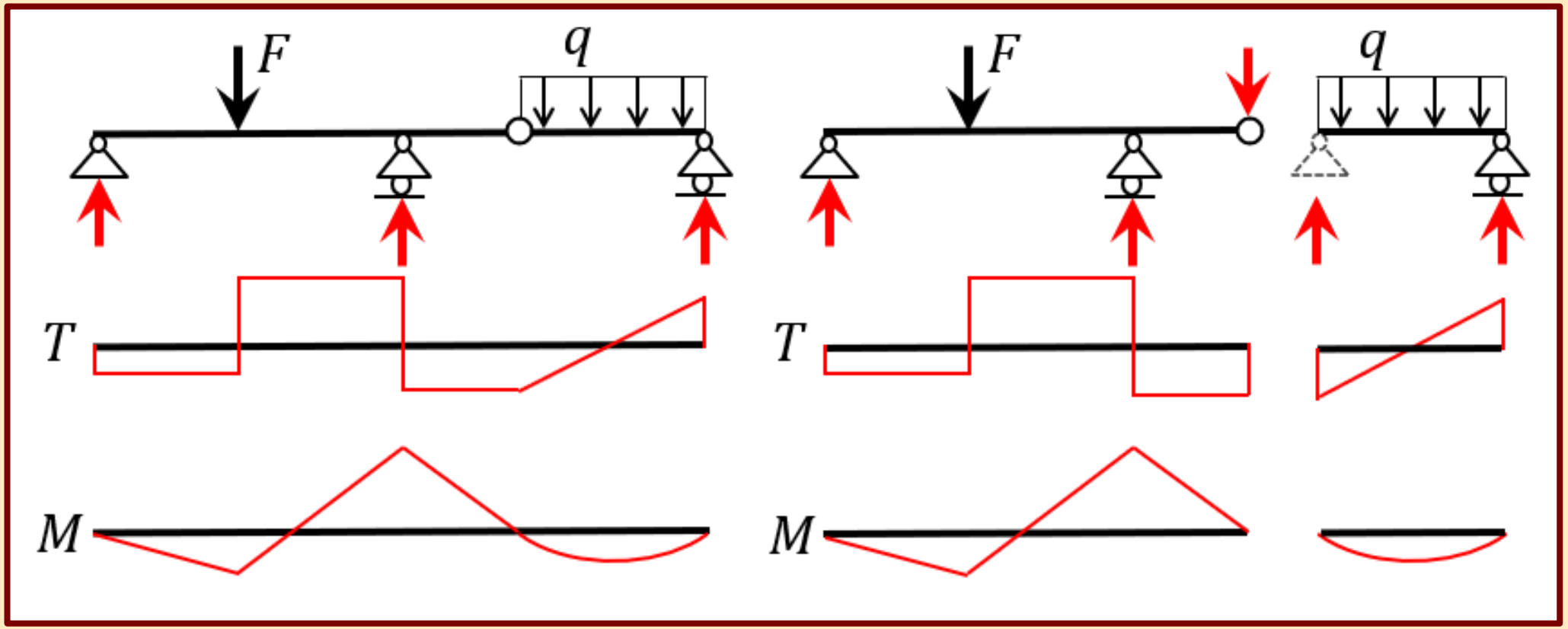
ÖSSZETETT TARTÓK IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁI

- Az összetett tartók tartórészei közötti belső kényszerek a fokszámukból adódó igénybevételek felvételére alkalmasak.
- A belső csukló csak erők felvételére képes, ezért nyomatéki igénybevétel nem ébredhet benne, vagyis a csuklóban a nyomatéki ábra ordinátája csak nulla lehet.
- A belső kapcsolatként üzemelő rudakban csak rúdirányú, vagyis csak normálerő ébredhet.



GERBER-TARTÓK IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁI

- A Gerber-tartó igénybevételi ábrái megrajzolhatóak az eddigieknek megfelelően a külső kapcsolati erők ismeretében a teljes tartón.
- Az ábrákat meghatározhatjuk a kapcsolati erők számításához szükséges részekre bontás által kialakított tartóelemekre is, majd az így kapott ábrákat összetolva a teljes tartó megoldásához jutunk.



Tartószerkezetek mechanikája I.

10.

Térbeli erők, térbeli tartószerkezetek

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

TÉRBELI ERŐ ÖSSZETEVŐI

- A térbeli erők kapcsán a síkbeli erőknél tanultakból kiindulva terjesztjük ki megoldásainkat háromdimenzióssá.
- Térbeli erő összetevői a három tengely mentén:

$$F_x = F \cdot \frac{x_F}{\sqrt{{x_F}^2 + {y_F}^2 + {z_F}^2}} = F \cdot \cos \alpha_x$$

$$F_y = F \cdot \frac{y_F}{\sqrt{{x_F}^2 + {y_F}^2 + {z_F}^2}} = F \cdot \cos \alpha_y$$

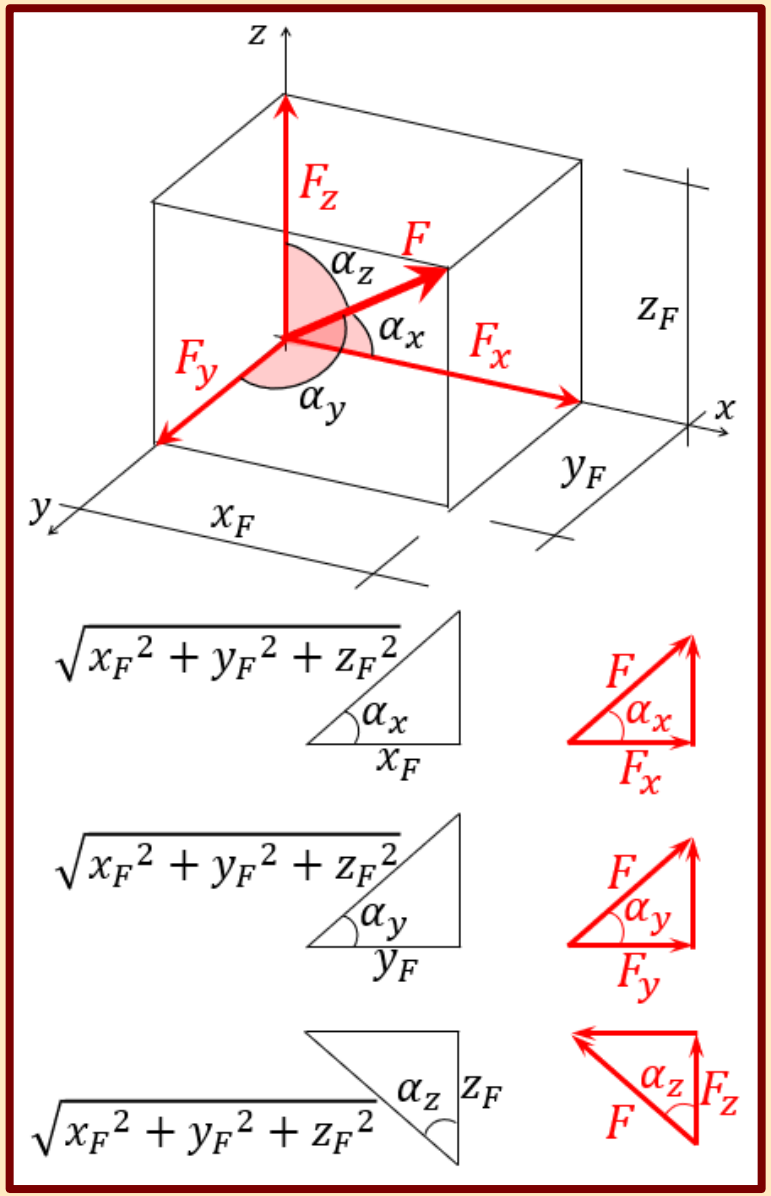
$$F_z = F \cdot \frac{z_F}{\sqrt{{x_F}^2 + {y_F}^2 + {z_F}^2}} = F \cdot \cos \alpha_z$$

- Az erő a vektorkomponensek össszegeként:

$$\underline{F} = \underline{F_x} + \underline{F_y} + \underline{F_z}$$

- Az erő nagysága az összetevők ismeretében:

$$|F| = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}$$

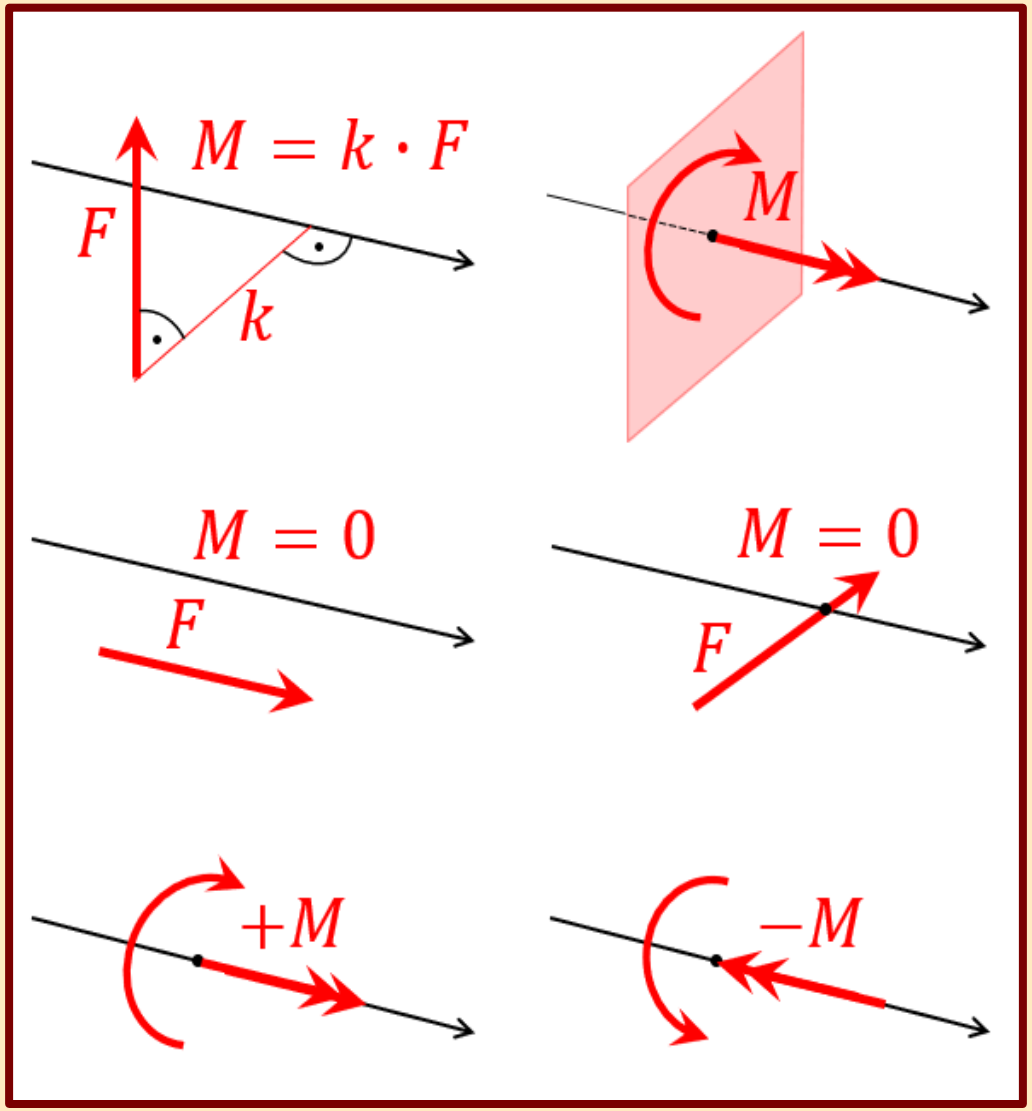


TÉRBELI ERŐ NYOMATÉKA

- Térbeli erő nyomatékát tengelyre számíthatjuk, amelyet az erő tengelyig mért karjával (normáltranszverzális) szorozva állíthatunk elő. A nyomaték előjelét a pozitív tengelyággal szembenállva kaphatjuk meg.

$$M = F \cdot k$$

- A nyomaték vektorként is értelmezhető, nagysága a nyomaték értékével megegyezik, annak síkjára merőleges, vagyis a forgatott tengely irányába mutat, szembenállva a hegyével látjuk pozitívnak a forgatását.
- Ha az erő metszi a tengelyt vagy párhuzamos vele, akkor nem forgat, vagyis nem lesz nyomatéka a vizsgált tengelyre.



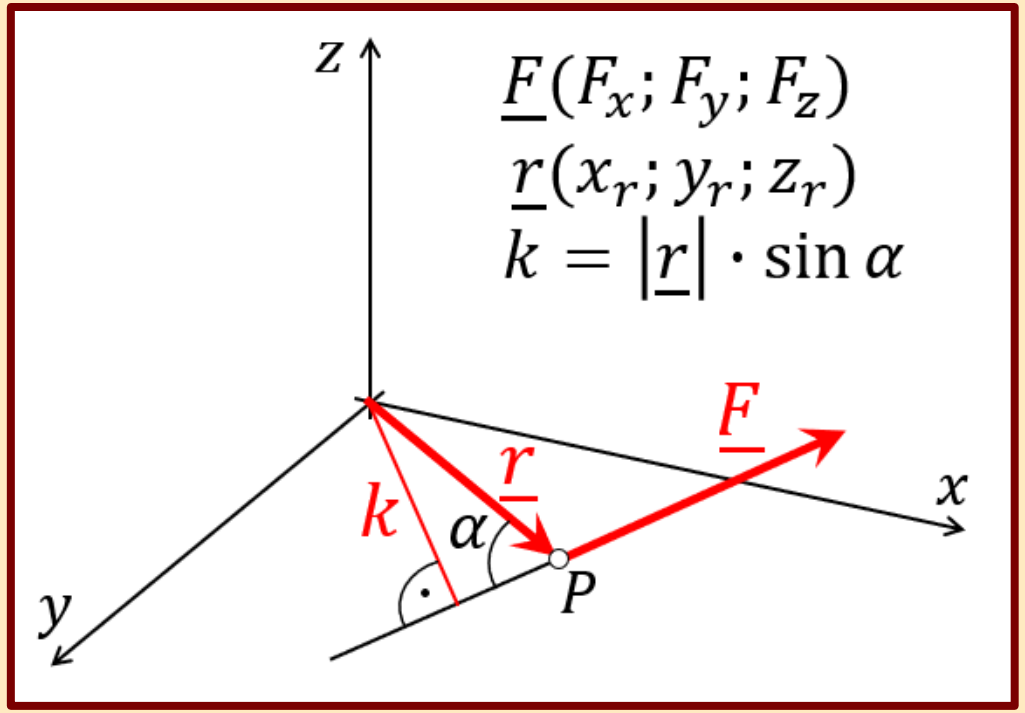
TÉRBELI ERŐ NYOMATÉKÁNAK MEGHATÁROZÁSA

- Térbeli erő egy pontra (origo) vett nyomatékát az erő hatásvonalának egy pontjába mutató helyvektor és az erővektor vektoriális szorzataként számíthatjuk.

$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$|\underline{M}| = |\underline{r}| \cdot |\underline{F}| \cdot \sin\alpha = k \cdot F$$

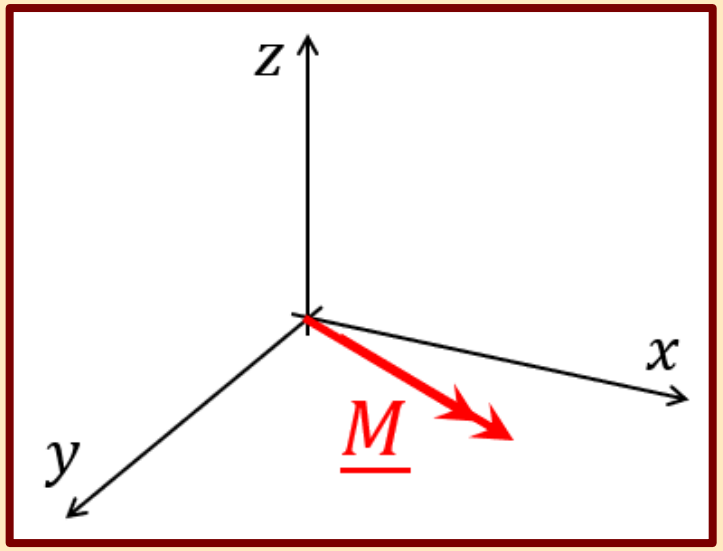
$$|\underline{M}| = \sqrt{\underline{x_r^2} + \underline{y_r^2} + \underline{z_r^2}} \cdot \sqrt{\underline{F_x^2} + \underline{F_y^2} + \underline{F_z^2}} \cdot \sin\alpha$$



- A hajlásszög számításához a skalár szorzat felhasználása:

$$\underline{r} \cdot \underline{F} = |\underline{r}| \cdot |\underline{F}| \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\underline{r} \cdot \underline{F}}{|\underline{r}| \cdot |\underline{F}|} = \frac{\underline{x_r} \cdot \underline{F_x} + \underline{y_r} \cdot \underline{F_y} + \underline{z_r} \cdot \underline{F_z}}{\sqrt{\underline{x_r^2} + \underline{y_r^2} + \underline{z_r^2}} \cdot \sqrt{\underline{F_x^2} + \underline{F_y^2} + \underline{F_z^2}}}$$

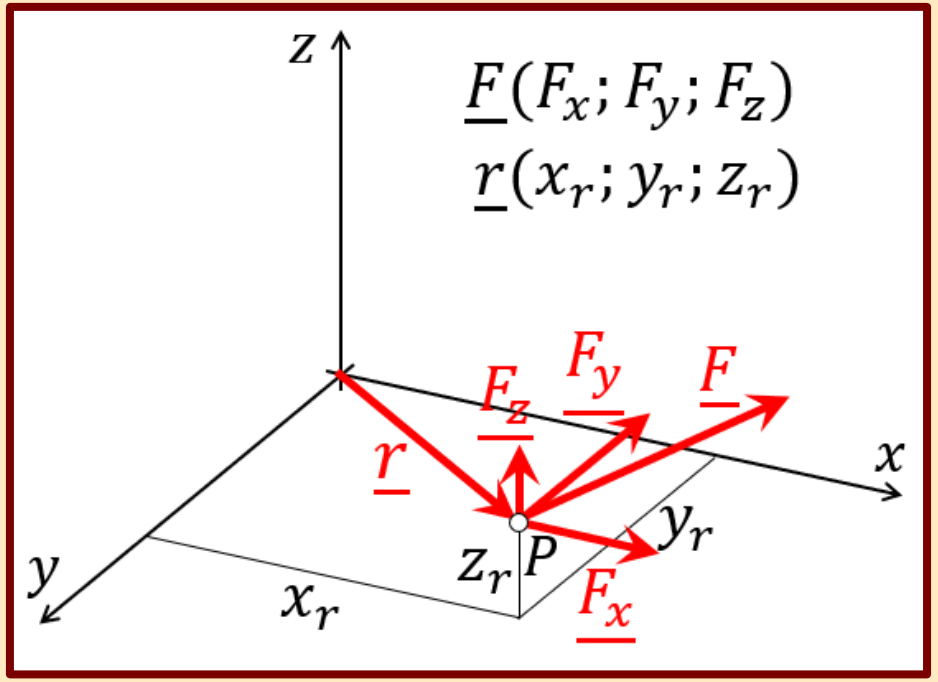


TÉRBELI ERŐ NYOMATÉKÁNAK MEGHATÁROZÁSA

- A térbeli erő nyomatékát megadó vektoriális szorzat determináns alakkal felírva:

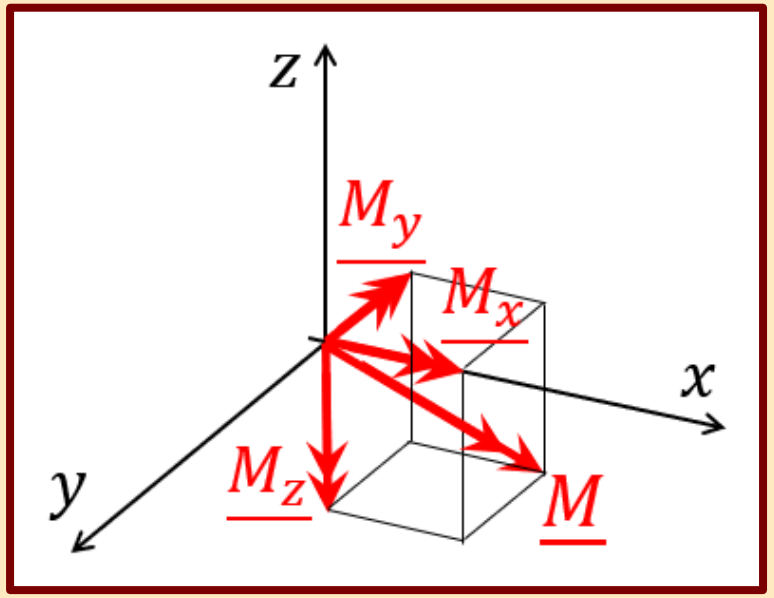
$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_r & y_r & z_r \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\underline{M} = (y_r \cdot F_z - z_r \cdot F_y)\underline{i} - (x_r \cdot F_z - z_r \cdot F_x)\underline{j} + \\ +(x_r \cdot F_y - y_r \cdot F_x)\underline{k}$$



- Az egyes tengelyekre vett nyomatéki komponensek:

$$M_x = y_r \cdot F_z - z_r \cdot F_y$$
$$M_y = -x_r \cdot F_z + z_r \cdot F_x$$
$$M_z = x_r \cdot F_y - y_r \cdot F_x$$



- A tengelyekre vett nyomatékok eredője:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

TÉRBELI ERŐRENDSZER EREDŐJE

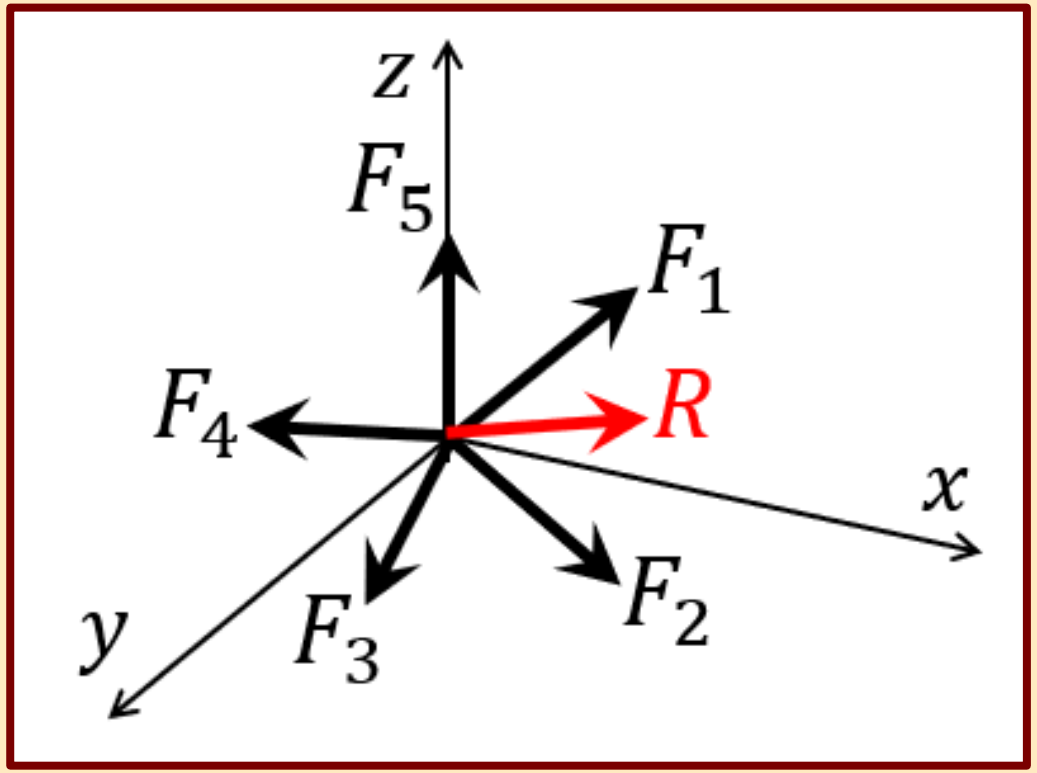
KÖZÖS METSZÉSPONTÚ TÉRBELI ERŐRENDSZER EREDŐJE

- A közös metszéspontú térbeli erőrendszer esetén is a síkbelihez hasonlóan csak vetületi egyenletek felírása szükséges az eredő meghatározásához, viszont itt ez három egyenletet jelent:

$$\sum F_{ix} = R_x$$

$$\sum F_{iy} = R_y$$

$$\sum F_{iy} = R_z$$



- Az eredő nagysága a komponensek segítségével:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

- Nyomatéki egyenlet felírása nélkül megállapítható, hogy az eredő áthalad a közös metszésponton.

PÁRHUZAMOS TÉRBELI ERŐRENDSZER EREDŐJE

- A párhuzamos térbeli erőrendszer eredője nagyságának meghatározása során egy vetületi egyenletet kell felírni az erőkkel párhuzamos irányban:

$$\sum F_i = \sum F_{iz} = R_z = R$$

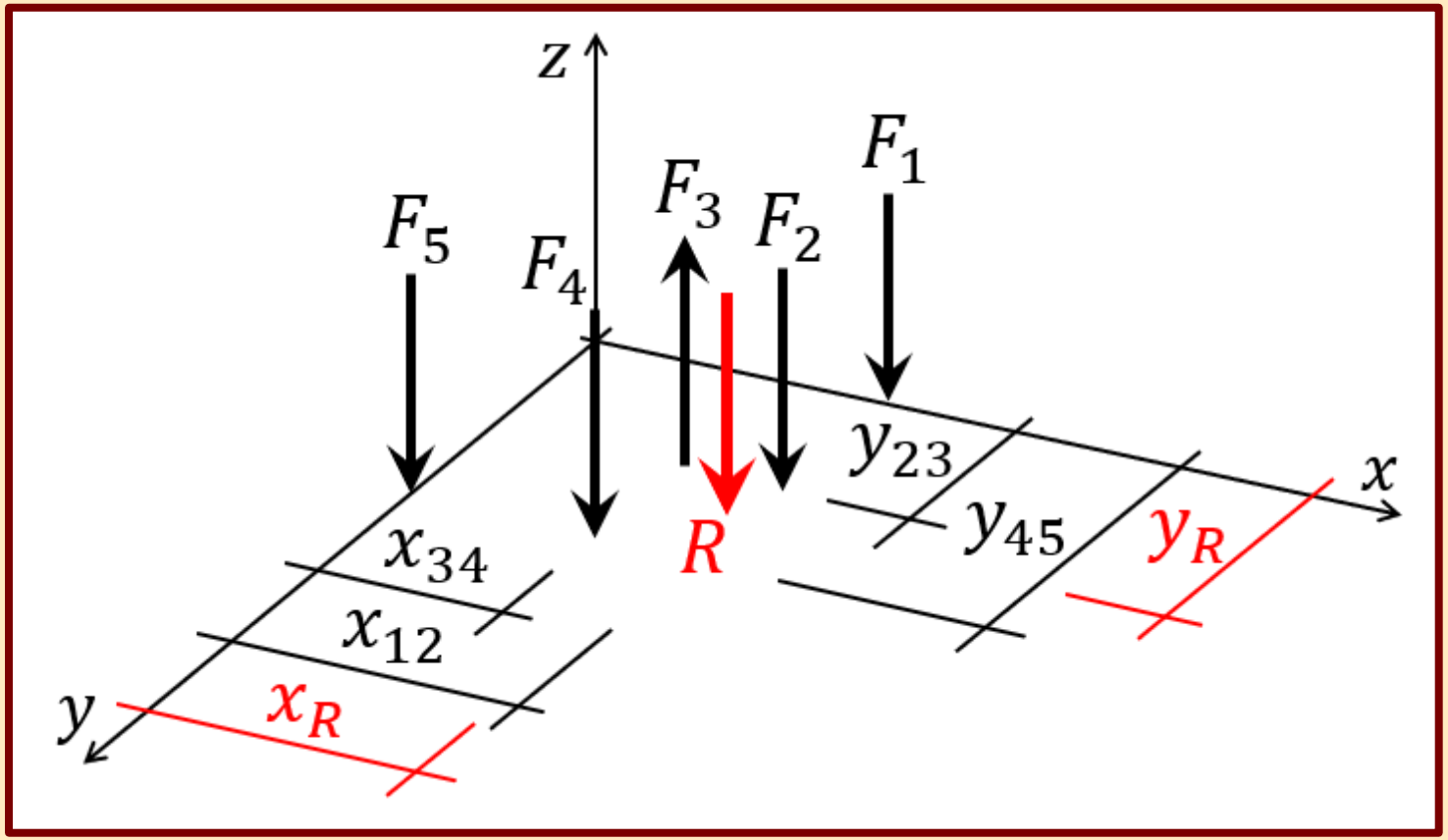
- Az eredő helyének meghatározáshoz két nyomatéki egyenlet felírása szükséges, az erők irányára merőleges tengelyekre:

$$\sum M_{ix} = \sum F_i \cdot y_i = R \cdot y_R$$

$$y_R = \frac{\sum M_{ix}}{R} = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{R}$$

$$\sum M_{iy} = \sum F_i \cdot x_i = R \cdot x_R$$

$$x_R = \frac{\sum M_{iy}}{R} = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{R}$$



ERŐ ÉS ERŐPÁR EREDŐJE TÉRBEN

- Erő és erőpár eredőjének vizsgálatakor az erő és a nyomatékvektornak az erő hatásvonalára merőleges összetevője összetehető mennyiségek. Mivel közös síkban működnek, az eredmény egy önmagával párhuzamosan eltolt erő lesz:

$$M \doteq (M_x; M_z) \qquad M_x \doteq (F_{M_x}; F'_{M_x})$$

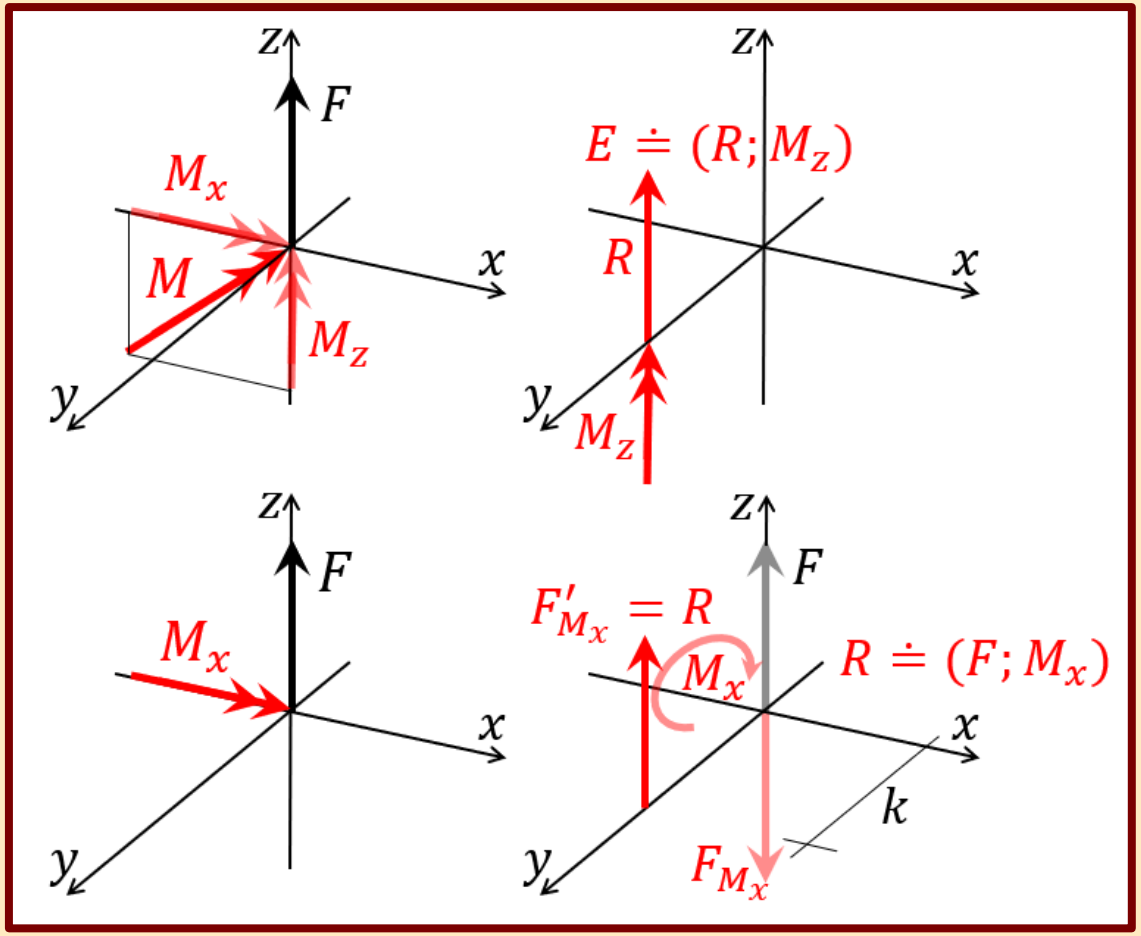
$$0 \doteq (F; F_{M_x}) \qquad R \doteq (F; M_x)$$

$$R \doteq (F; F_{M_x}; F'_{M_x}) \qquad R \doteq F'_{M_x}$$

$$k = \frac{M_x}{R}$$

- A kapott erő és az erővel párhuzamos megmaradt nyomatéki komponens nem összetehetőek, tovább nem egyszerűsíthetőek, ezt a két mennyiséget együtt erőcsavarnak hívjuk :

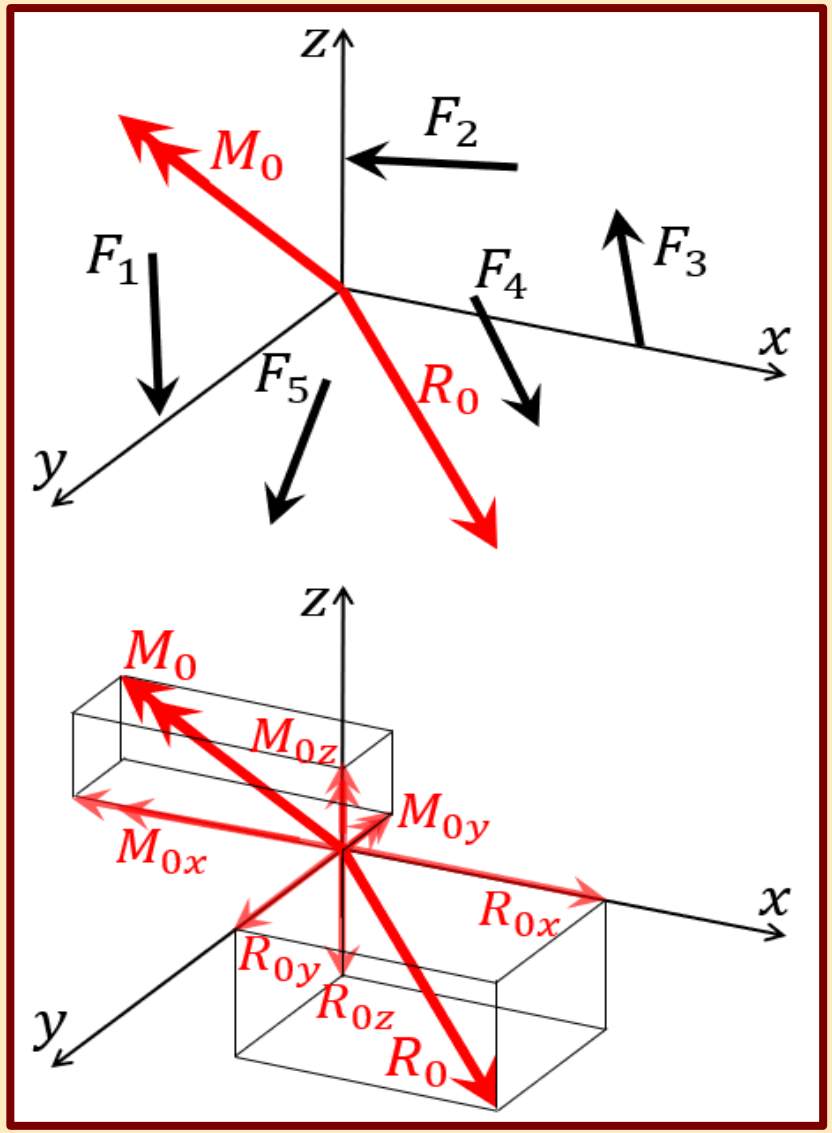
$$E \doteq (R; M_z)$$



ÁLTALÁNOS TÉRBELI ERŐRENDSZER EREDŐJE

- Az eredőmeghatározás általános esetben az erőrendszer origóra történő redukálásával kezdődik, melynek eredménye egy erő és egy erőpár:

$$\sum F_{ix} = R_{0x}$$
$$\sum F_{iy} = R_{0y} \qquad R_0 = \sqrt{R_{0x}^2 + R_{0y}^2 + R_{0z}^2}$$
$$\sum F_{iz} = R_{0z}$$
$$\cos\alpha_x = \frac{R_{0x}}{R_0}$$
$$\cos\alpha_y = \frac{R_{0y}}{R_0}$$
$$\cos\alpha_z = \frac{R_{0z}}{R_0}$$
$$\sum M_{ix} = M_{0x}$$
$$\sum M_{iy} = M_{0y} \qquad M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}$$
$$\sum M_{iz} = M_{0z}$$



- A kapott vektorkettőst társerőnek és társerőpárnak hívjuk.

ÁLTALÁNOS TÉRBELI ERŐRENDSZER EREDŐJE

- A két vektor eredménye alapján az eredő aktuális esete meghatározható:

Zéruserő: $R_0 = 0$ és $M_0 = 0$

Erőpár: $R_0 = 0$ és $M_0 \neq 0$

Erő (origón áthaladó): $R_0 \neq 0$ és $M_0 = 0$

Erő vagy erőcsavar: $R_0 \neq 0$ és $M_0 \neq 0$

- Ha erő az eredő, akkor a társerő és a társerőpár vektora merőleges egymásra, közös síkban működnek, vagyis összetehető mennyiségek. Ez skalár szorzatuk nulla eredményével teljesül:

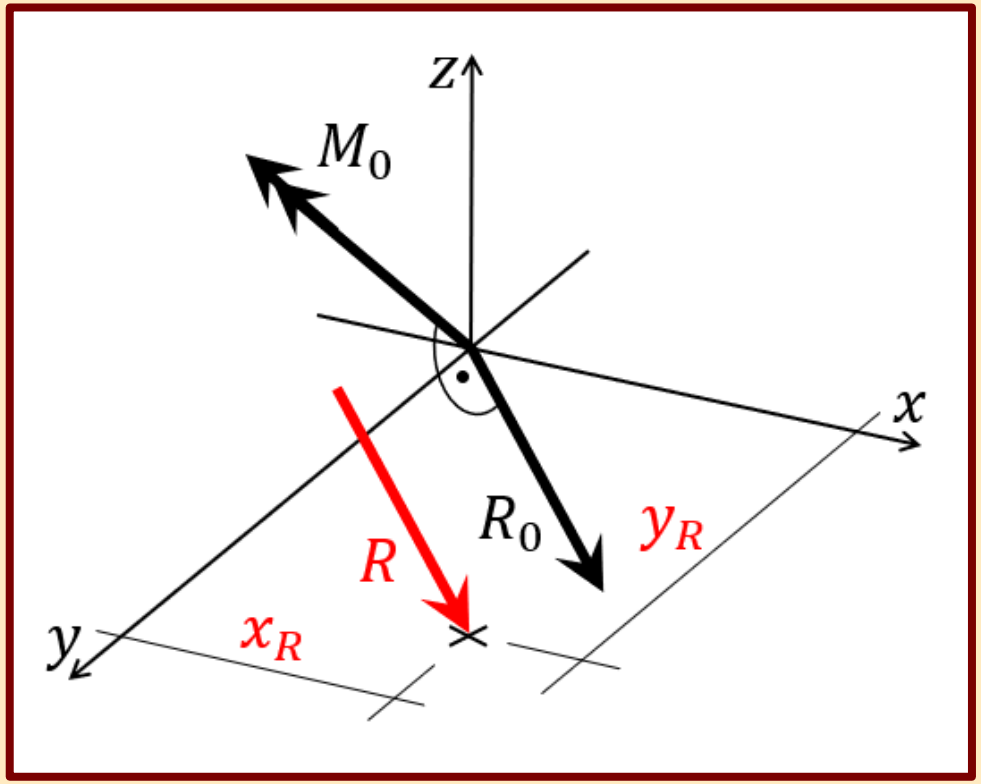
$$|R_0 \cdot M_0| = |R_0| \cdot |M_0| \cdot \cos\alpha = 0\,;\ \alpha = 90°$$

$$R_{0x} \cdot M_{0x} + R_{0y} \cdot M_{0y} + R_{0y} \cdot M_{0y} = 0$$

Az eredő nagysága és helye: $R_0 = R$

$$M_{0x} = R_z \cdot y_R \ \rightarrow \quad y_R = \frac{\sum M_{ix}}{R_z}$$

$$M_{0y} = -R_z \cdot x_R \rightarrow \ x_R = -\frac{\sum M_{iy}}{R_z}$$

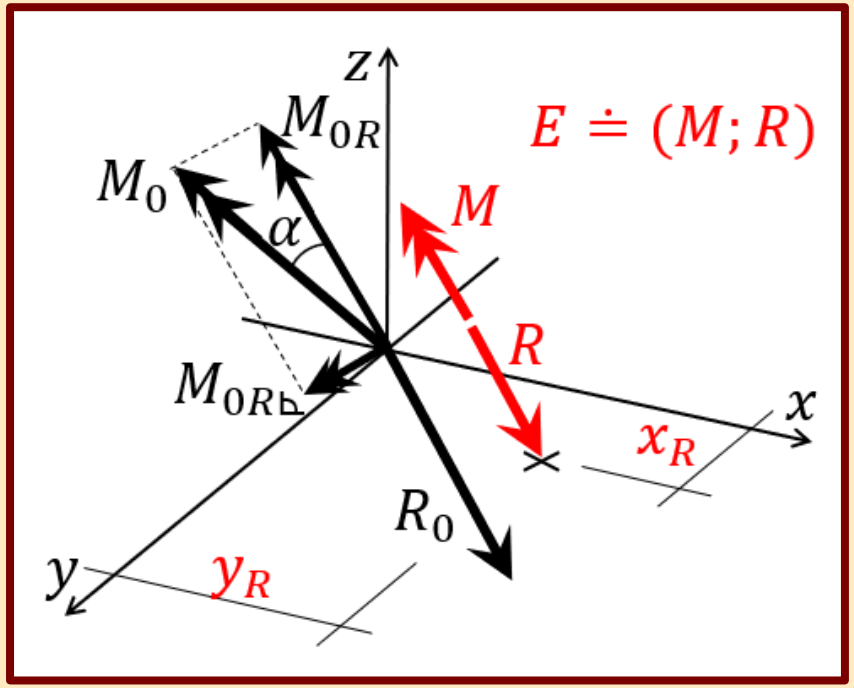


ÁLTALÁNOS TÉRBELI ERŐRENDSZER EREDŐJE

- Ha a társerő és a társerőpár vektora nem merőleges egymásra, vagyis a skalár szorzatuk nem nulla, akkor erőcsavar lesz az eredő :

$$|R_0 \cdot M_0| = |R_0| \cdot |M_0| \cdot \cos\alpha \neq 0\,;\ \alpha \neq 90°$$

$$R_{0x} \cdot M_{0x} + R_{0y} \cdot M_{0y} + R_{0y} \cdot M_{0y} \neq 0$$



- A nyomatékot fel kell bontani az erő hatásvonalára merőleges, az erővel összetehető komponensre, amelyből az eredő helye meghatározható és az erő hatásvonalába eső komponensre, amellyel az erő az erőcsavart alkotja:

Az erőcsavar: $E \doteq (R;M)$; $R = R_0$; $M = M_{0R}$; $M_{0R} = M_0 \cdot \cos\alpha = \dfrac{R_0 \cdot M_0}{|R_0|}$

$$M_{0R\llcorner x} = M_{0x} - M_{0Rx} = M_{0x} - \frac{R_0 \cdot M_0}{|R_0|} \cdot \frac{R_{0x}}{|R_0|} = R_z \cdot y_R \quad \rightarrow \quad y_R = \frac{M_{0R\llcorner x}}{R_z}$$

$$M_{0R\llcorner y} = M_{0y} - M_{0Ry} = M_{0y} - \frac{R_0 \cdot M_0}{|R_0|} \cdot \frac{R_{0y}}{|R_0|} = -R_z \cdot x_R \quad \rightarrow \quad x_R = \frac{M_{0R\llcorner y}}{-R_z}$$

TÉRBELI MEGOSZLÓ ERŐRENDSZER EREDŐJE

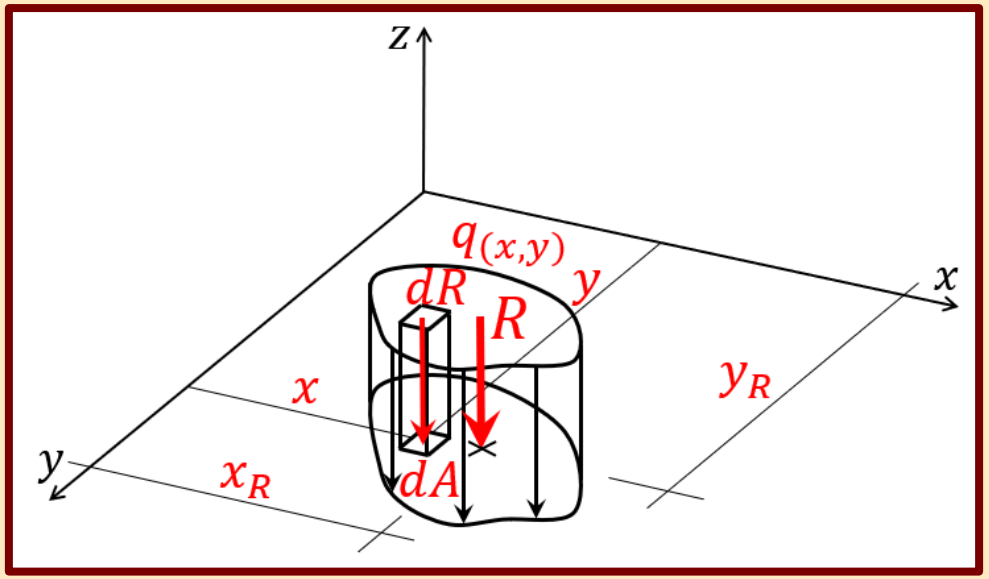
- Párhuzamos térbeli megoszló erőrendszer eredője az erőirányban felírt vetületi egyenlet alapján a terhelési test térfogatával egyezik meg :

$$R = \int_{(A)} q_{(x,y)} \cdot dA = V_q$$

- Az eredő támadáspontja a terhelési test súlypontjába esik a tengelyekre felírt nyomatéki egyenletek alapján :

$$R \cdot y_R = \int_{(A)} y \cdot q_{(x,y)} \cdot dA = M_{qx} \rightarrow y_R = \frac{M_{qx}}{R}$$

$$R \cdot x_R = \int_{(A)} x \cdot q_{(x,y)} \cdot dA = M_{qy} \rightarrow x_R = \frac{M_{qy}}{R}$$

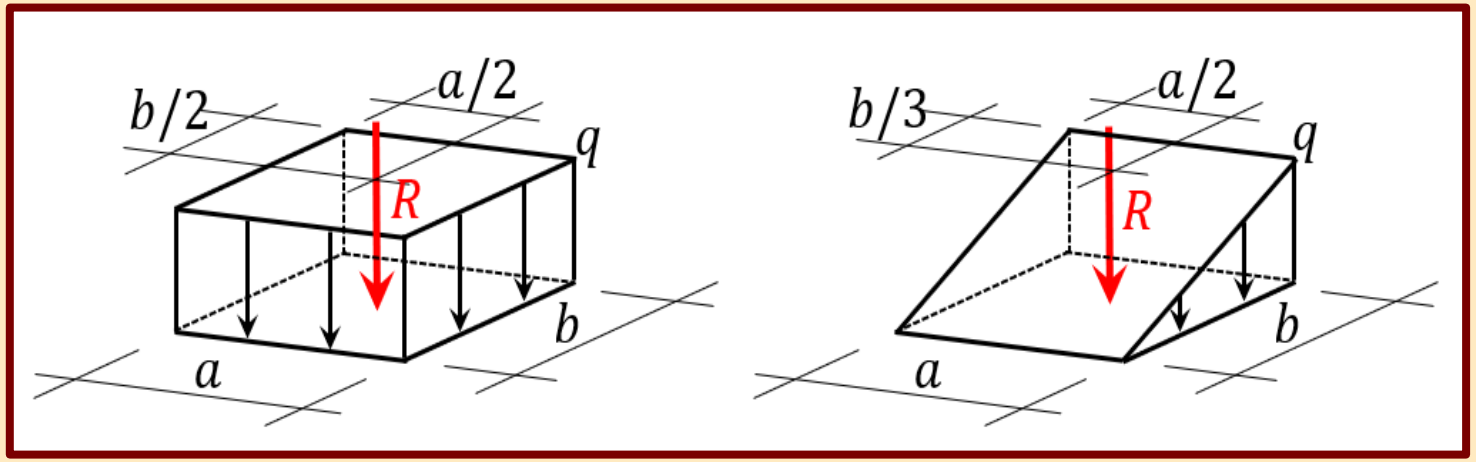


- Egyenletesen megoszló teher eredője:

$$R = q \cdot a \cdot b$$

- Egyirányban lineárisan változó megoszló teher eredője:

$$R = q \cdot a \cdot b/2$$



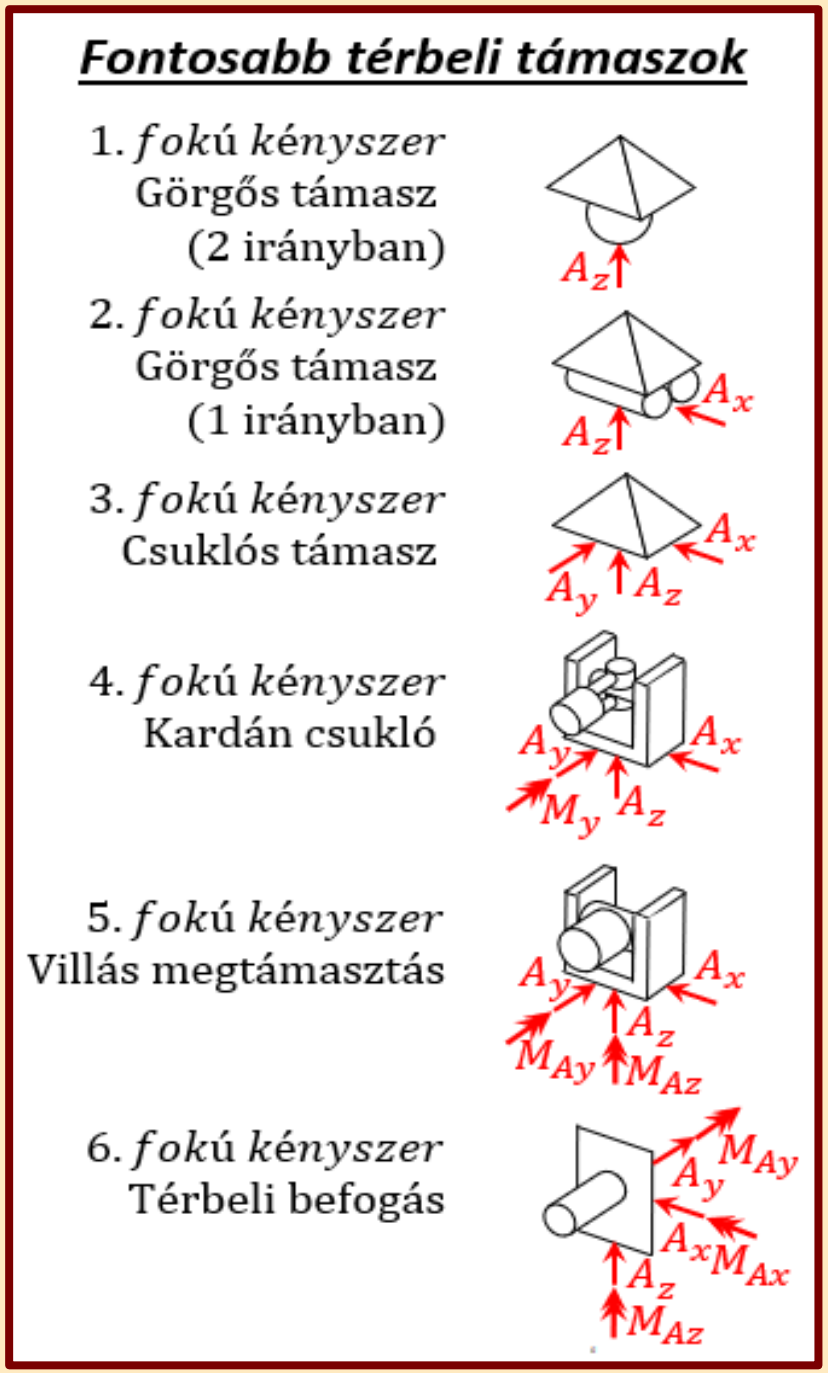
TÉRBELI TARTÓSZERKEZETEK

- Egy térbeli merev test szabadsági fokainak száma hat. Ennek megfelelően a merev megtámasztáshoz a kapcsolati erők összfokszámának is hatnak kell lennie. Térbeli erők egyensúlyát hat független statikai egyenlettel biztosíthatjuk, amelyek segítségével a kapcsolati erőket meghatározhatjuk:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \sum M_{ix} = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0 \quad \sum M_{iy} = 0$$
$$\sum F_{iz} = 0 \quad \sum M_{iz} = 0$$

(A vetületi egyenletek becserélhetőek nyomatéki egyenletekre.)

- A térbeli megtámasztások is az általuk megakadályozott elmozdulás-összetevőknek megfelelő számú kapcsolati erőt tudnak felvenni. Ez a szám a kényszerek fokszámát is megadja, amely egy és hat között változhat térbeli támaszoknál.



TÉRBELI TARTÓSZERKEZETEK EGYSZERŰBB TÍPUSAI

TÉRBELI BAKÁLLVÁNY

- Három támasztórúd egy csuklós csomópontban van rögzítve egymással. A terhelő erővel a rúderők közös metszéspontú erők egyensúlyát alkotják, a számításhoz három egyensúlyi egyenlet írható fel.

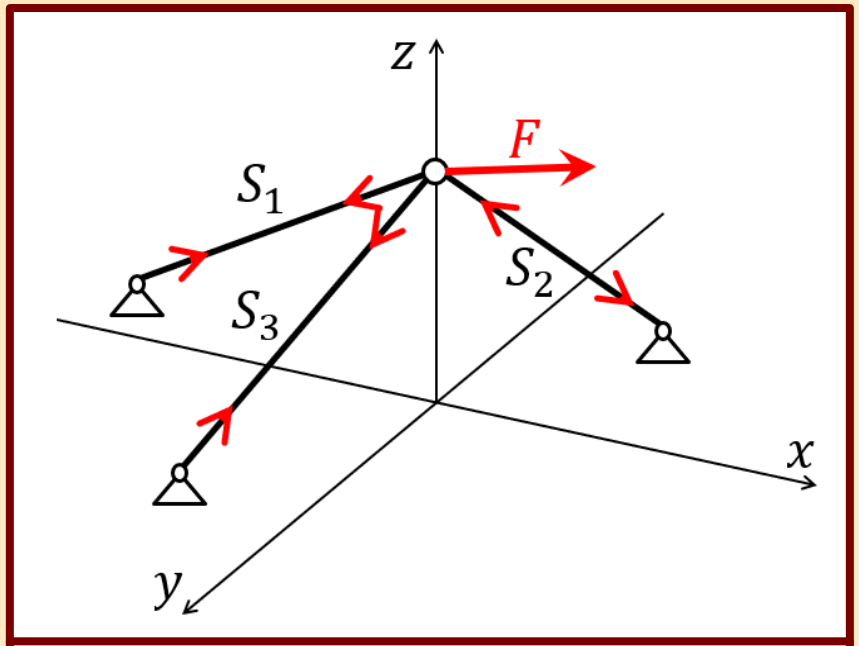
$$\left.\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0\\ \sum F_{iy} &= 0\\ \sum F_{iz} &= 0\end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix}$$

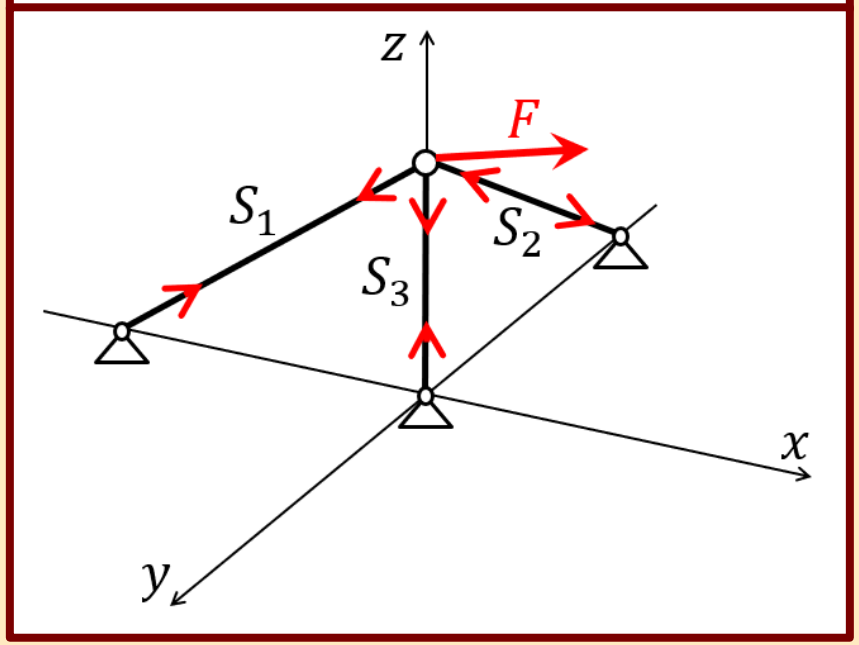
(Általános esetben háromismeretlenes egyenletrendszert kapunk.)

- Egyszerűbb geometria esetén az egyenletrendszer három egyismeretlenes egyenletre eshet szét.

$$\sum F_{ix} = 0 \rightarrow S_1$$
$$\sum F_{iy} = 0 \rightarrow S_2$$
$$\sum F_{iz} = 0 \rightarrow S_3$$

- Egyismeretlenes egyenleteket kaphatunk nyomatéki egyenletek felírásával is.

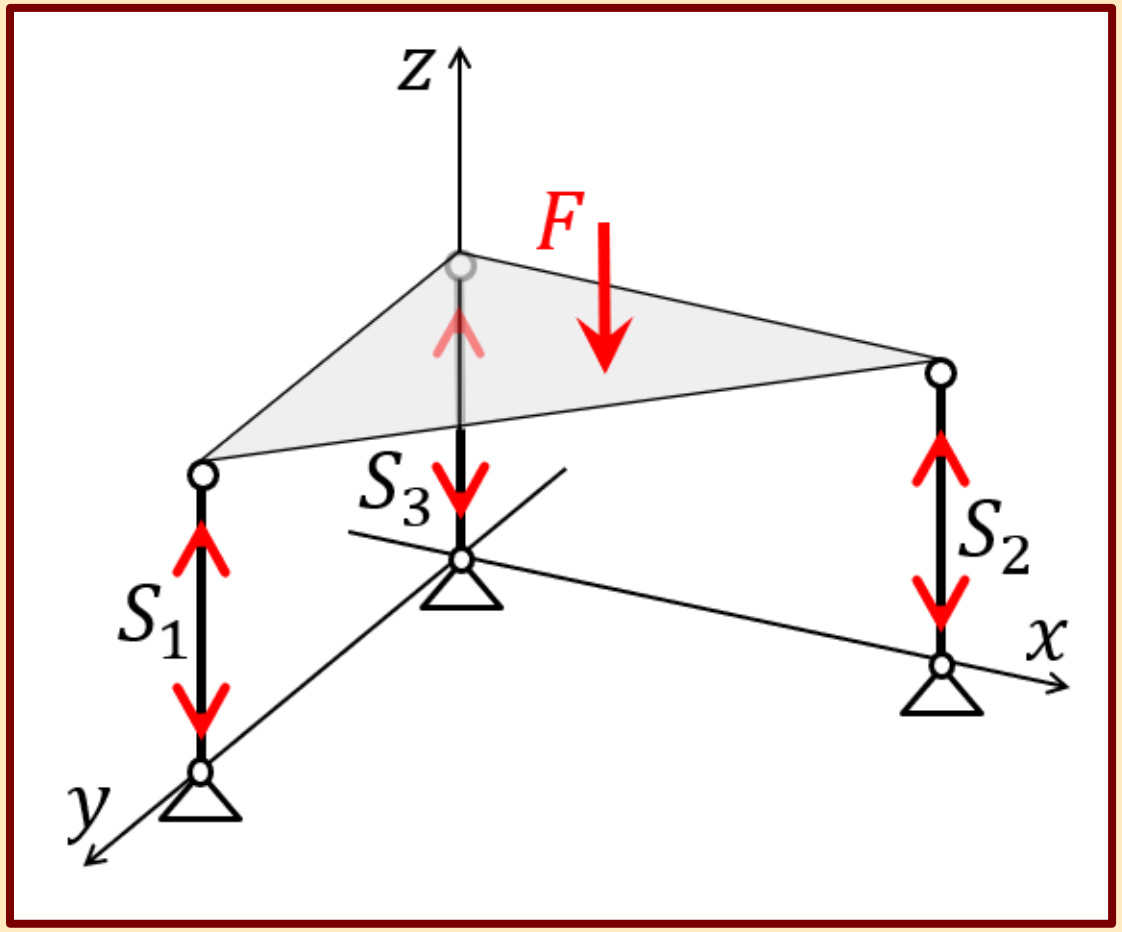




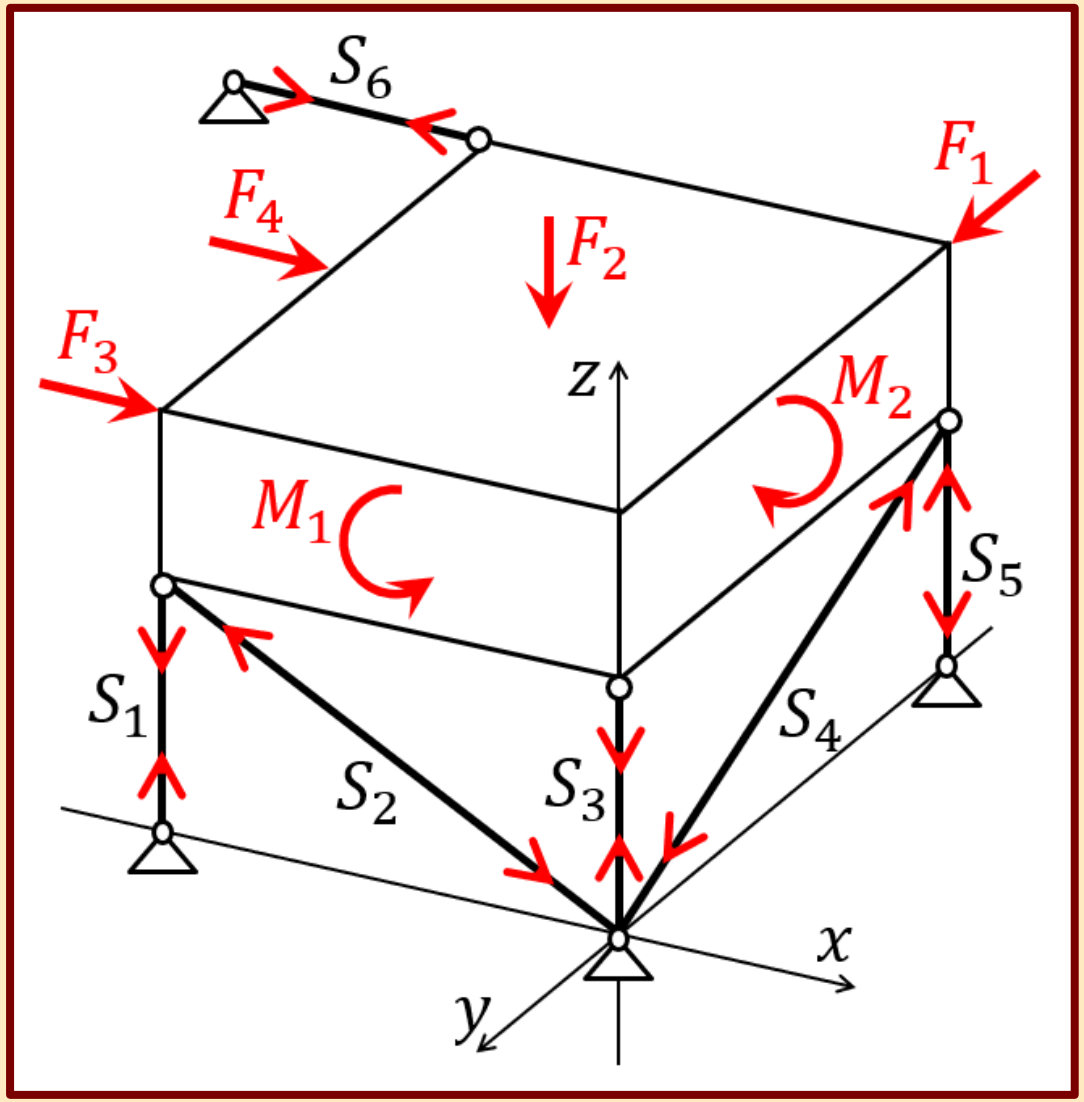
HÁROMLÁBÚ SZERKEZET

- Ebben az esetben három párhuzamos támasztórúddal van megtámasztva a test. Csak a rudakkal párhuzamos teher esetén alakulhat ki egyensúly. Mivel párhuzamos erők egyensúlyáról van szó, három egyensúlyi egyenlet használható. Az erők irányába eső vetületi egyenleten kívül két nyomatéki egyenletet szükséges felírni. A nyomatéki tengelyeknek két-két rúdtengellyel kell metsződniük az egyenletek egyismeretlenessége érdekében.

$$\sum M_{ix} = 0 \quad \rightarrow S_1$$
$$\sum M_{iy} = 0 \quad \rightarrow S_2$$
$$\sum F_{iz} = 0 \quad \rightarrow S_3$$



HATRUDAS SZERKEZET

- Ezen szerkezet vizsgálata az általános térbeli erőrendszer egyensúlyának felel meg, vagyis hat egyensúlyi egyenlet felírása szükséges. A testet megtámasztó kényszerek összfokszáma is hat, amelynek egyik változata lehet a hat támasztórúd alkalmazása. Az egyenleteket és sorrendjüket célszerűen kell megválasztani, hogy azok egyismeretlenesek legyenek.

$$\sum M_{ix} = 0 \quad \rightarrow S_5$$
$$\sum M_{iz} = 0 \quad \rightarrow S_6$$
$$\sum M_{iy} = 0 \quad \rightarrow S_1$$
$$\sum F_{ix} = 0 \quad \rightarrow S_2$$
$$\sum F_{iy} = 0 \quad \rightarrow S_4$$
$$\sum F_{iz} = 0 \quad \rightarrow S_3$$