Széchenyi István Egyetem
Szerkezetépítési és Geotechnikai Tanszék

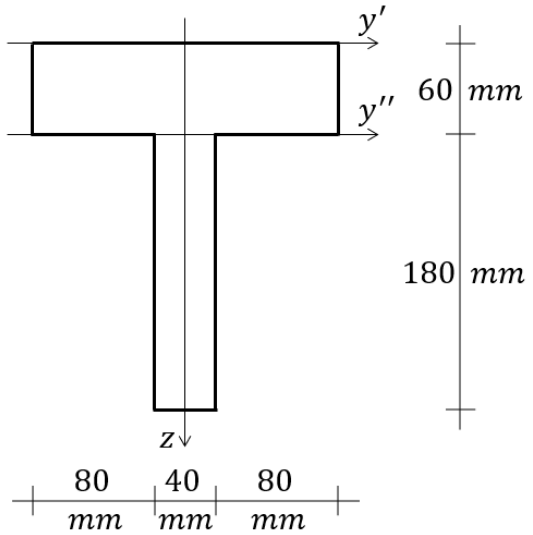
Tartószerkezetek mechanikája 2.

Oktatási segédlet

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

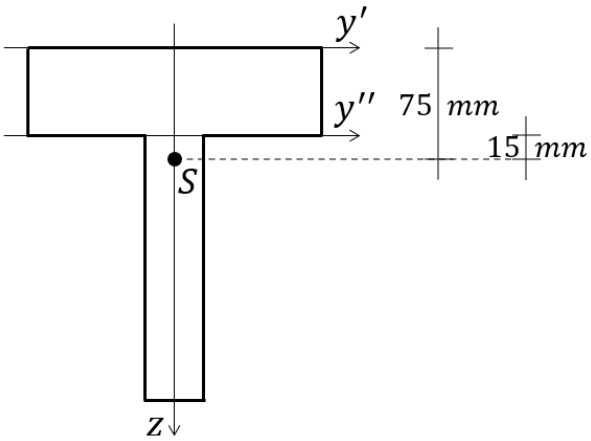
Mintapéldák súlypontszámítás

1.)



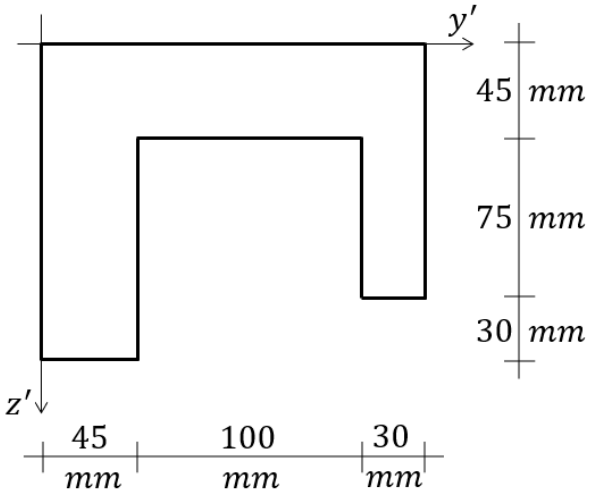
Határozza meg a síkidom súlyponti koordinátáit a kiindulási tengelyekhez képest!

- terület:
  $A = 200 \cdot 60 + 40 \cdot 180 = 19200\ mm^2$
  Az eredményt a részsíkidomok területeinek összegéből kaptuk meg.
- statikai nyomatékok:
  $S_{y'} = 200 \cdot 60 \cdot 30 + 40 \cdot 180 \cdot 150 = 1{,}44 \cdot 10^6\ mm^3$
  $S_{y''} = 200 \cdot 60 \cdot (-30) + 40 \cdot 180 \cdot 90 = 2{,}88 \cdot 10^5\ mm^3$
  Az eredményeket itt is a részekre bontás elvének alkalmazásával állítottuk elő. Az egyes tengelyekre számított statikai nyomatékok esetén a részsíkidomok területeit a vizsgált tengelyekig mért súlyponti koordinátáikkal szoroztuk, majd a kapott értékeket összegeztük. A koordináták negatív előjelűek is lehetnek, a részsíkidom vizsgált tengelyhez viszonyított helyzete alapján.
- súlyponti koordináták:
  $z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{1{,}44 \cdot 10^6}{19200} = 75\ mm$
  $z_s = \frac{S_{y''}}{A} = \frac{2{,}88 \cdot 10^5}{19200} = 15\ mm$
  $y_s = 0$



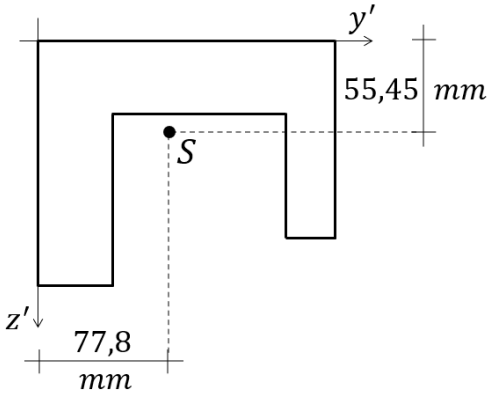
  Az összefüggés egy súlyozott átlag számításnak felel meg, mely alapján a teljes síkidom súlypontja a részsíkidomok súlypontja közé esik, a nagyobb területű (súlyozású) részsíkidomhoz közelebb helyezkedve. A súlypont helyzete ugyanoda adódik, bármely tengelyre is számítottuk a statikai nyomatékot, természetesen a kijött koordinátákat a számított tengelytől mérve. A z tengely szimmetriatengely, emiatt a súlypontnak rajta kell feküdnie.

2.)

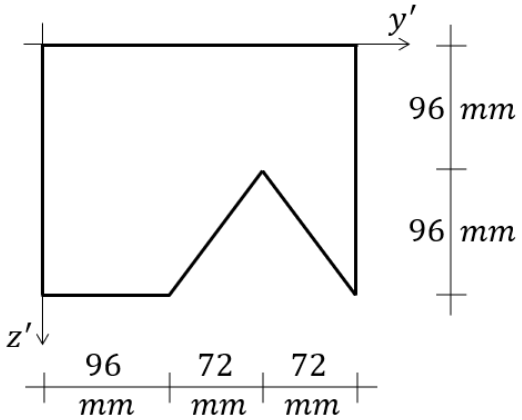


Határozza meg a síkidom súlyponti koordinátáit a kiindulási tengelyekhez képest!

- terület:
  $A = 45 \cdot 150 + 100 \cdot 45 + 30 \cdot 120 = 14850\ mm^2$
  Az eredményt a részekre bontás elvének segítségével határoztuk meg.
- statikai nyomatékok:
  $S_{y'} = 45 \cdot 150 \cdot 75 + 100 \cdot 45 \cdot 22{,}5 + 30 \cdot 120 \cdot 60 = 8{,}235 \cdot 10^5\ mm^3$
  $S_{z'} = 45 \cdot 150 \cdot 22{,}5 + 100 \cdot 45 \cdot 95 + 30 \cdot 120 \cdot 160 = 1{,}1554 \cdot 10^6\ mm^3$
  Az eredményeket itt is részekre bontással állítottuk elő. Mivel a síkidom nem szimmetrikus, mindkét irányú statikai nyomaték számítása szükséges.
- súlyponti koordináták:
  $$z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{8{,}235 \cdot 10^5}{14850} = 55{,}45\ mm$$
  $$y_s = \frac{S_{z'}}{A} = \frac{1{,}1554 \cdot 10^6}{14850} = 77{,}80\ mm$$



3.)



Határozza meg a síkidom súlyponti koordinátáit a kiindulási tengelyekhez képest!

- terület:

$$A = 240 \cdot 192 - \frac{144 \cdot 96}{2} = 39168\ mm^2$$

Az eredményt a kiegészítés elvének segítségével számítottuk ki, vagyis a téglalapra kiegészített síkidom területéből vontuk le a kiegészítő síkidom (háromszög) területét.

- statikai nyomatékok:

$$S_{y'} = 240 \cdot 192 \cdot 96 - \frac{144 \cdot 96}{2} \cdot (96 + 64) = 3{,}3178 \cdot 10^6\ mm^3$$

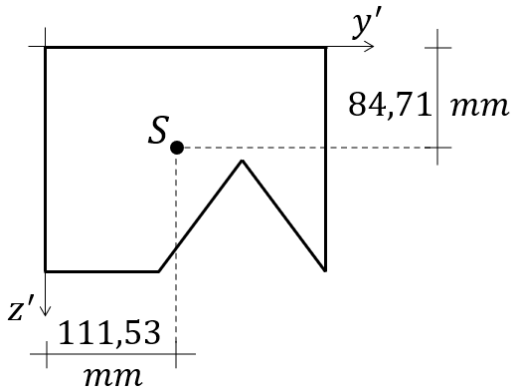
$$S_{z'} = 240 \cdot 192 \cdot 120 - \frac{144 \cdot 96}{2} \cdot (96 + 72) = 4{,}3684 \cdot 10^6\ mm^3$$

Az eredményeket itt is a kiegészítés elvével állítottuk elő.

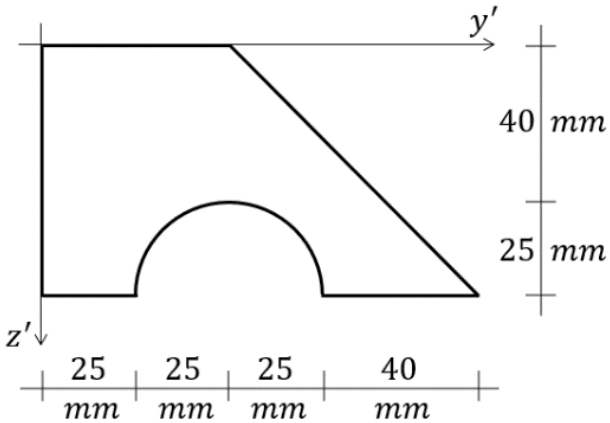
- súlyponti koordináták:

$$z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{3{,}3178 \cdot 10^6}{39168} = 84{,}71\ mm$$

$$y_s = \frac{S_{z'}}{A} = \frac{4{,}3684 \cdot 10^6}{39168} = 111{,}53\ mm$$



4.)



Határozza meg a síkidom súlyponti koordinátáit a kiindulási tengelyekhez képest!

- terület:

$$A = 50 \cdot 65 + \frac{65 \cdot 65}{2} - \frac{25^2 \cdot \pi}{2} = 4380{,}75\ mm^2$$

Az eredményt a kiegészítés és a részekre bontás együttes alkalmazásával számítottuk ki.

- statikai nyomatékok:

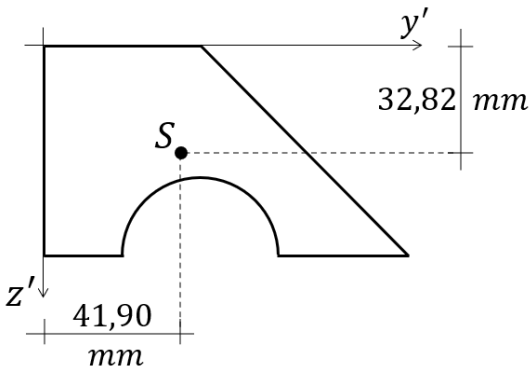
$$S_{y'} = 50 \cdot 65 \cdot 32{,}5 + \frac{65 \cdot 65}{2} \cdot 65 \cdot \frac{2}{3} - \frac{25^2 \cdot \pi}{2} \cdot (65 - \frac{4 \cdot 25}{3 \cdot \pi}) = 1{,}438 \cdot 10^5\ mm^3$$

$$S_{z'} = 50 \cdot 65 \cdot 25 + \frac{65 \cdot 65}{2} \cdot \left(50 + 65 \cdot \frac{1}{3}\right) - \frac{25^2 \cdot \pi}{2} \cdot 50 = 1{,}836 \cdot 10^5\ mm^3$$

- súlyponti koordináták:

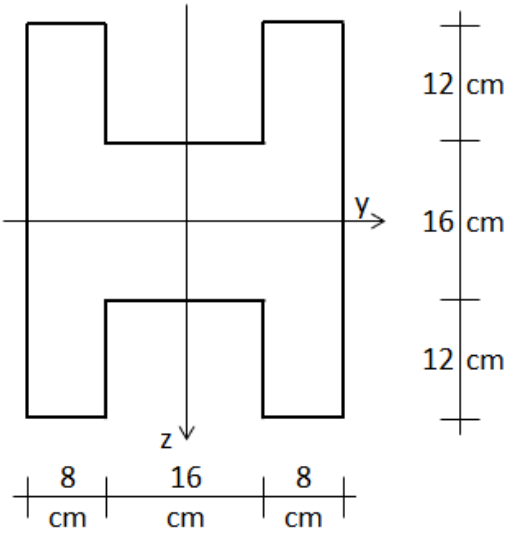
$$z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{1{,}438 \cdot 10^5}{4380{,}75} = 32{,}82\ mm$$

$$y_s = \frac{S_{z'}}{A} = \frac{1{,}836 \cdot 10^5}{4380{,}75} = 41{,}90\ mm$$



Mintapéldák keresztmetszeti jellemzők

1.)



Határozza meg a keresztmetszet másodrendű nyomatékait!

- tehetetlenségi (inercia) nyomatékok:

  $$I_y = 2 \cdot \frac{8 \cdot 40^3}{12} + \frac{16^4}{12} = 9{,}0795 \cdot 10^4\ cm^4$$

  Az eredményt a részekre bontás segítségével határoztuk meg, mert így kikerülhető a Steiner-tétel használata.

  $$I_z = \frac{40 \cdot 32^3}{12} - 2 \cdot \frac{12 \cdot 16^3}{12} = 1{,}01035 \cdot 10^5\ cm^4$$

  Az eredményt a kiegészítés segítségével határoztuk meg, mert így kikerülhető a Steiner-tétel használata.

- centrifugális nyomaték:

  $$C_{yz} = 0$$

  Az y és a z tengely szimmetriatengely, ezért a tengelykereszt centrifugális nyomatéka zérus.

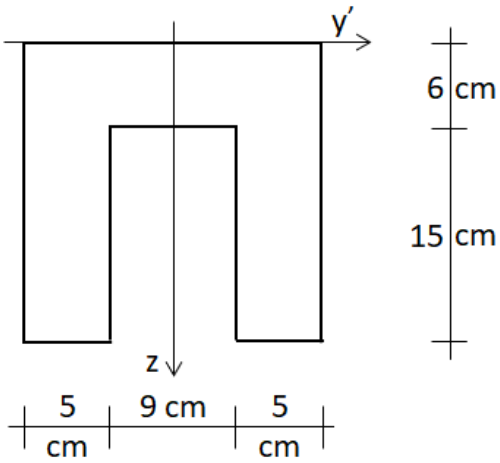
- főtehetetlenségi (inercia) nyomatékok:

  $$I_1 = I_z = 1{,}01035 \cdot 10^5\ cm^4$$

  $$I_2 = I_y = 9{,}0795 \cdot 10^4\ cm^4$$

  A szimmetriatengely és a rá merőleges súlyponti tengely mindig főtehetetlenségi tengely, így az y és z tengelyek is azok.

2.)

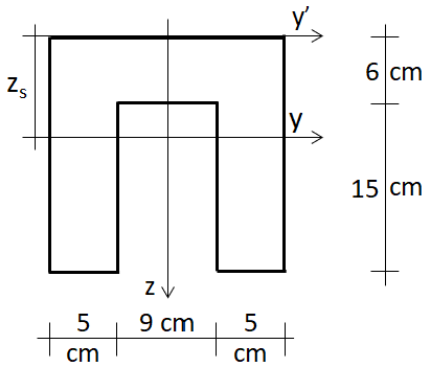


Határozza meg a keresztmetszet másodrendű nyomatékait!

- terület:

$$A = 2 \cdot 5 \cdot 21 + 9 \cdot 6 = 264\ cm^2$$

- statikai nyomaték y' tengelyre:



$$S_{y'} = 2 \cdot 5 \cdot 21 \cdot \frac{21}{2} + 9 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 2367\ cm^3$$

- súlypont z_s koordinátája:

$$z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{2367}{264} = 8{,}966\ cm$$

- tehetetlenségi (inercia) nyomatékok:

$$I_y = 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot 21^3}{12} + 5 \cdot 21 \cdot \left(\frac{21}{2} - 8{,}966 \right)^2 \right) + \frac{9 \cdot 6^3}{12} + 9 \cdot 6 \cdot \left(8{,}966 - \frac{6}{2} \right)^2 =$$
$$= 1{,}0295 \cdot 10^4\ cm^4$$

Az eredményt a részekre bontás segítségével határoztuk meg, mindegyik részsíkidom külön-külön történő steinerelésével. A részsíkidomok súlyponti tengelyéről haladtunk egy számukra idegen (az egész km. súlyponti) tengely felé, ezért a Steiner-tagokat pozitív előjellel vettük számításba.

$$I_y = 2 \cdot \frac{5 \cdot 21^3}{3} + \frac{9 \cdot 6^3}{3} - 264 \cdot 8{,}966^2 = 1{,}0295 \cdot 10^4\ cm^4$$

Ezen megoldásnál az eredményt ugyancsak a részekre bontás segítségével határoztuk meg, de a részsíkidomok oldalaira felírt inerciáit steinereltük. Vagyis a teljes km. inerciáját (első két tag) az y' idegen tengelyről számítottuk a súlyponti tengelyére (y), ezért a Steiner-tagot negatív előjellel vettük számításba.

$$I_z = \frac{21 \cdot 19^3}{12} - \frac{15 \cdot 9^3}{12} = 1{,}1092 \cdot 10^4\ cm^4$$

Az eredményt a kiegészítés segítségével határoztuk meg, mert így kikerülhető a Steiner-tétel használata.

- centrifugális nyomaték:

$$C_{yz} = 0$$

A z tengely szimmetriatengely, ezért a tengelykereszt centrifugális nyomatéka zérus.

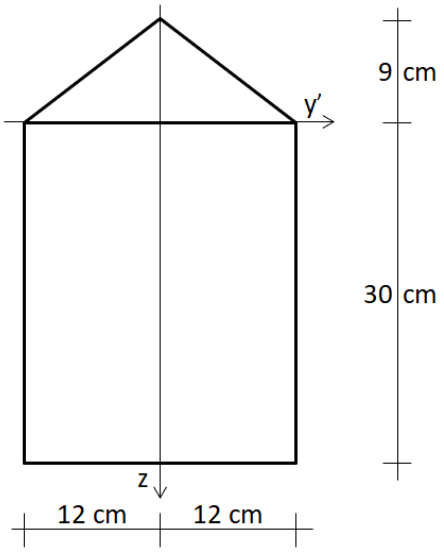
- főtehetetlenségi (inercia) nyomatékok:

$$I_1 = I_z = 1{,}1092 \cdot 10^4\ cm^4$$

$$I_2 = I_y = 1{,}0295 \cdot 10^4\ cm^4$$

A szimmetriatengely és a rá merőleges súlyponti tengely mindig főtehetetlenségi tengely, így az y és z tengelyek is azok.

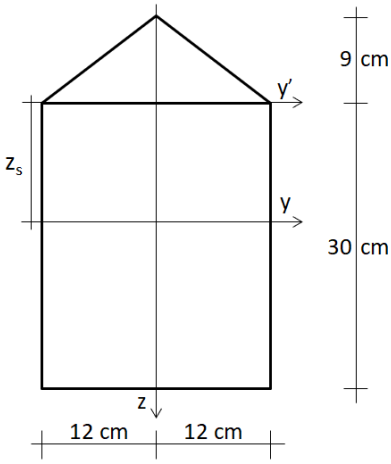
3.)



Határozza meg a keresztmetszet másodrendű nyomatékait!

- terület:

$$A = 24 \cdot 30 + \frac{24 \cdot 9}{2} = 828\ cm^2$$



- statikai nyomaték y' tengelyre:

$$S_{y'} = 24 \cdot 30 \cdot 15 + \frac{24 \cdot 9}{2} \cdot (-3) = 10476\ cm^3$$

- súlypont z_s koordinátája:

$$z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{10476}{828} = 12{,}652\ cm$$

- tehetetlenségi (inercia) nyomatékok:

$$I_y = \frac{24 \cdot 30^3}{12} + 24 \cdot 30 \cdot \left(\frac{30}{2} - 12{,}652\right)^2 + \frac{24 \cdot 9^3}{36} + \frac{24 \cdot 9}{2} \cdot \left(\frac{9}{3} + 12{,}652\right)^2 =$$
$$= 8{,}491 \cdot 10^4\ cm^4$$

A részsíkidomok <u>súlyponti</u> <u>tengelyéről</u> haladtunk egy számukra <u>idegen</u> (az egész km. súlyponti) <u>tengely felé</u>, ezért a Steiner-tagokat pozitív előjellel vettük számításba.

$$I_y = \frac{24 \cdot 30^3}{3} + \frac{24 \cdot 9^3}{12} - 828 \cdot 12{,}652^2 = 8{,}491 \cdot 10^4\ cm^4$$

A teljes km. inerciáját (első két tag) az y' idegen tengelyről számítottuk a súlyponti tengelyére (y), ezért a Steiner-tagot negatív előjellel vettük számításba.

$$I_z = \frac{30 \cdot 24^3}{12} - 2 \cdot \frac{9 \cdot 12^3}{12} = 3{,}1968 \cdot 10^4\ cm^4$$

A téglalap súlyponti tengelye és a háromszögek egy-egy oldala egybeesett a teljes km. súlyponti tengelyével, így ide felírva az inerciákat és összegezve őket, steinerelés nélkül a végeredményhez jutottunk.

- centrifugális nyomaték:

$$C_{yz} = 0$$

A z tengely szimmetriatengely, ezért a tengelykereszt centrifugális nyomatéka zérus.

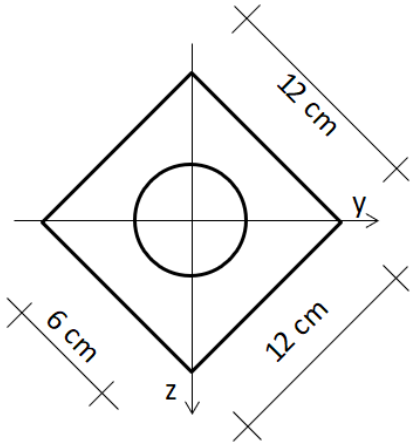
- főtehetetlenségi (inercia) nyomatékok:

$$I_1 = I_y = 8{,}491 \cdot 10^4\ cm^4$$

$$I_2 = I_z = 3{,}1968 \cdot 10^4\ cm^4$$

A szimmetriatengely és a rá merőleges súlyponti tengely mindig főtehetetlenségi tengely, így az y és z tengelyek is azok.

4.)



Határozza meg a keresztmetszet másodrendű nyomatékait!

- tehetetlenségi (inercia) nyomatékok:

$$I_y = I_z = \frac{12^4}{12} - \frac{3^4 \cdot \pi}{4} = 1664{,}4\ cm^4$$

A négyzetnek és a körnek minden súlyponti tengelyére azonos az inercianyomatéka.

- centrifugális nyomaték:

$$C_{yz} = 0$$

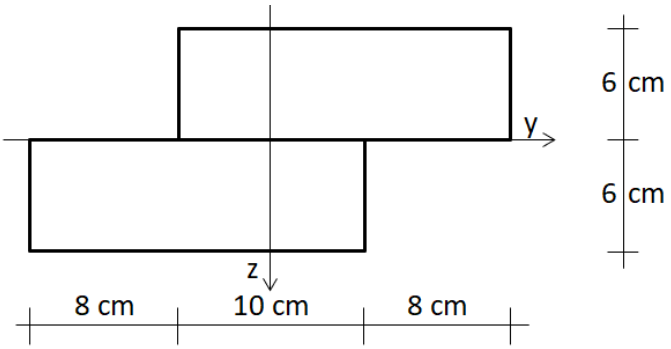
Az y és a z tengely szimmetriatengely, ezért a tengelykereszt centrifugális nyomatéka zérus.

- főtehetetlenségi (inercia) nyomatékok:

$I_1 = I_2 = I_y = I_z = 1664{,}4\ cm^4$

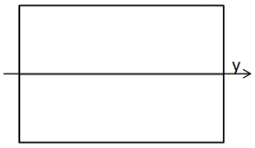
Ha egy tengelykereszt két tengelyén azonos értékű az inercianyomaték és a tengelykeresztre számított centrifugális nyomaték zérus, akkor a km. összes súlyponti tengelyén megegyezik az inercianyomaték és mindegyik súlyponti tengely főtengely.

5.)



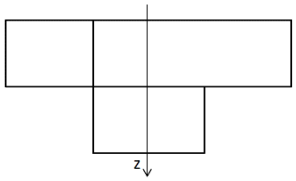
Határozza meg a keresztmetszet másodrendű nyomatékait!

- tehetetlenségi (inercia) nyomatékok:



$I_y = \frac{18 \cdot 12^3}{12} = 2592\ cm^4$

Az y tengelyre számítandó inercianyomaték esetén a részsíkidomok az y tengellyel párhuzamosan eltolhatók. Ennek megfelelően az alsó téglalap eltolásával kapott új alakzat (egy téglalap) inercianyomatéka egyszerűen számítható.



$I_z = \frac{6 \cdot 26^3}{12} + \frac{6 \cdot 10^3}{12} = 9288\ cm^4$

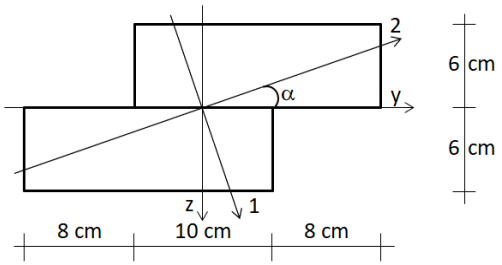
A z tengelyre számítandó inercianyomaték esetén a részsíkidomok a z tengellyel párhuzamosan eltolhatók. Ennek megfelelően az alsó téglalap egy részének eltolásával kapott új alakzat inercianyomatéka egyszerűen számítható a Steiner-tétel alkalmazása nélkül, két új téglalapra történő részekre bontással.

- centrifugális nyomaték:

$C_{yz} = 18 \cdot 6 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{10}{2}\right) \cdot \left(-\frac{6}{2}\right) + 18 \cdot 6 \cdot \left(-\left(\frac{18}{2} - \frac{10}{2}\right)\right) \cdot \frac{6}{2} = -2592\ cm^4$

A centrifugális nyomaték számításánál nem alkalmazható az eltolhatóság, részekre bontással, a két téglalap eredeti helyzetének felhasználásával állítható elő a megoldás.

- főtehetetlenségi (inercia) nyomatékok:



$$I_1 = \frac{2592 + 9288}{2} + \sqrt{\left(\frac{2592 - 9288}{2}\right)^2 + (-2592)^2} =$$

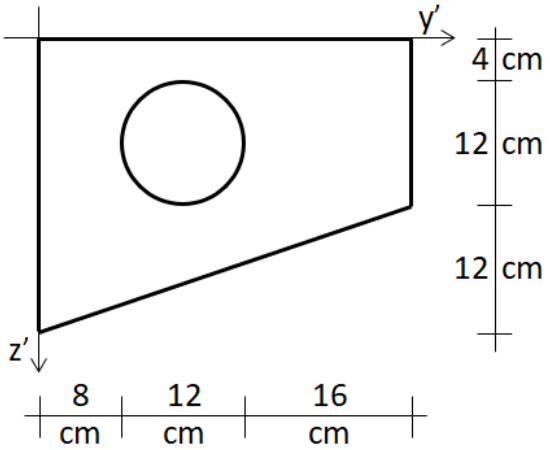
$$= 10174{,}1\ cm^4$$

$$I_2 = \frac{2592 + 9288}{2} - \sqrt{\left(\frac{2592 - 9288}{2}\right)^2 + (-2592)^2} =$$

$$= 1705{,}9\ cm^4$$

$$\tan 2 \propto = \frac{-2 \cdot C_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{-2 \cdot (-2592)}{2592 - 9288} = -0{,}7742 \qquad \rightarrow \propto = -18{,}873\ °$$

6.)



Határozza meg a keresztmetszet másodrendű nyomatékait!

- terület:

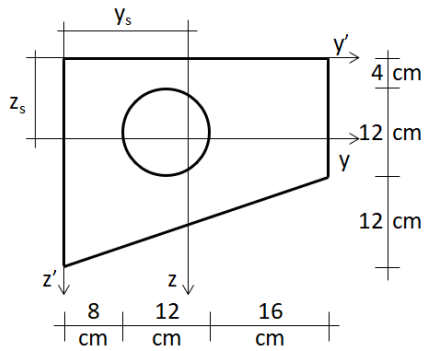
$$A = 36 \cdot 16 + \frac{36 \cdot 12}{2} - 6^2 \cdot \pi = 678{,}90\ cm^2$$

- statikai nyomaték az y' és z' tengelyekre:

$$S_{y'} = 36 \cdot 16 \cdot \frac{16}{2} + \frac{36 \cdot 12}{2} \cdot \left(16 + \frac{12}{3}\right) - 6^2 \cdot \pi \cdot \left(4 + \frac{12}{2}\right) = 7797{,}03\ cm^3$$

$$S_{z'} = 36 \cdot 16 \cdot \frac{36}{2} + \frac{36 \cdot 12}{2} \cdot \frac{36}{3} - 6^2 \cdot \pi \cdot \left(8 + \frac{12}{2}\right) = 11376{,}64\ cm^3$$

- a súlypont z_s és y_s koordinátája:



$$z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{7797{,}03}{678{,}9} = 11{,}485\ cm$$

$$y_s = \frac{S_{z'}}{A} = \frac{11376{,}64}{678{,}9} = 16{,}757\ cm$$

- tehetetlenségi (inercia) nyomatékok:

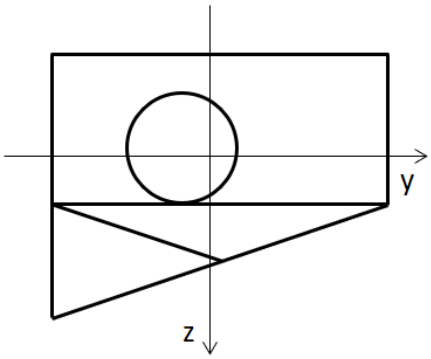
$$I_y = \frac{36 \cdot 16^3}{12} + 36 \cdot 16 \cdot \left(11{,}485 - \frac{16}{2}\right)^2 + \frac{36 \cdot 12^3}{36} + \frac{36 \cdot 12}{2} \cdot \left(4 + 12 + \frac{12}{3} - 11{,}485\right)^2 - \left(\frac{6^4 \cdot \pi}{4} + 6^2 \cdot \pi \cdot \left(11{,}485 - 4 - \frac{12}{2}\right)^2\right) = 3{,}5405 \cdot 10^4\ cm^4$$

$$I_z = \frac{16 \cdot 36^3}{12} + 36 \cdot 16 \cdot \left(\frac{36}{2} - 16{,}757\right)^2 + \frac{12 \cdot 36^3}{36} + \frac{36 \cdot 12}{2} \cdot \left(16{,}757 - \frac{36}{3}\right)^2 - \left(\frac{6^4 \cdot \pi}{4} + 6^2 \cdot \pi \cdot \left(16{,}757 - 8 - \frac{12}{2}\right)^2\right) = 8{,}1660 \cdot 10^4 cm^4$$

- centrifugális nyomaték:

$$C_{yz} = 36 \cdot 16 \cdot \left(-\left(11{,}485 - \frac{16}{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{36}{2} - 16{,}757\right) + \frac{36 \cdot 6}{2} \cdot \left(16 + \frac{6}{3} - 11{,}485\right) \cdot \left(\frac{36}{2} - 16{,}757\right) + \frac{18 \cdot 12}{2} \cdot \left(16 + \frac{12}{2} - 11{,}485\right) \cdot \left(-\left(16{,}757 - \frac{18}{3}\right)\right) - 6^2 \cdot \pi \cdot \left(-\left(11{,}485 - 4 - -\frac{12}{2}\right)\right) \cdot \left(-\left(16{,}757 - 8 - \frac{12}{2}\right)\right) = -1{,}4299 \cdot 10^4\ cm^4$$

A centrifugális nyomatékot a részekre bontás segítségével határoztuk meg. A háromszög alakú részsíkidomot további két háromszögre bontottuk a súlyvonalánál, így két szimmetrikus háromszöget kaptunk. Vagyis a számításban szereplő valamennyi síkidom függőleges és vízszintes tengelyekből álló súlyponti tengelykeresztjének legalább egyik tengelye a síkidom szimmetriatengelye, ezért az erre a tengelykeresztre számított centrifugális nyomaték zérus. A számítás ezért csak az egyes síkidomok Steiner-tagjainak összegéből áll.

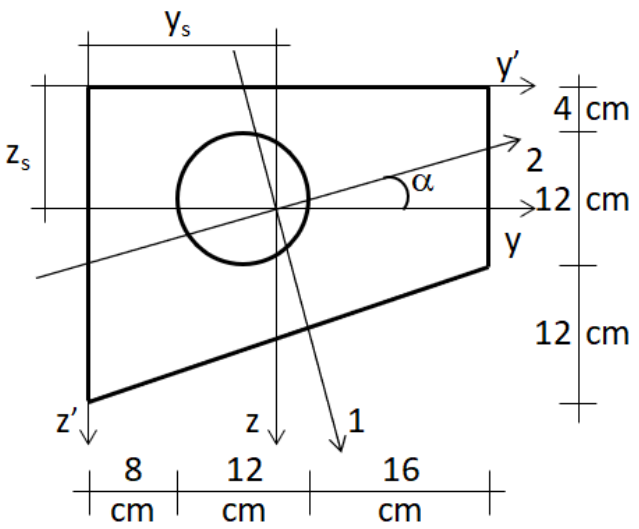


- főtehetetlenségi (inercia) nyomatékok:

$$I_1 = \left(\frac{3{,}5405+8{,}166}{2} + \sqrt{\left(\frac{3{,}5405-8{,}166}{2}\right)^2 + (-1{,}4299^2)}\right) \cdot 10^4 = 8{,}5724 \cdot 10^4 cm^4$$

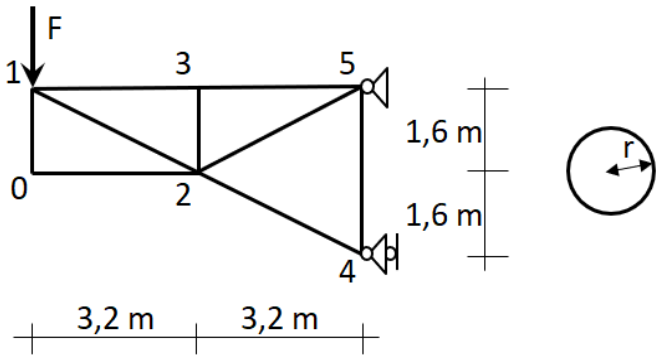
$$I_2 = \left(\frac{3{,}5405+8{,}166}{2} - \sqrt{\left(\frac{3{,}5405-8{,}166}{2}\right)^2 + (-1{,}4299^2)}\right) \cdot 10^4 = 3{,}13415 \cdot 10^4 cm^4$$

$$\tan 2 \propto = \frac{-2 \cdot C_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{-2 \cdot (-1{,}4299 \cdot 10^4)}{(3{,}5405 - 8{,}1660) \cdot 10^4} = -0{,}6183 \quad \rightarrow \propto = -15{,}864\,°$$



Mintapéldák tiszta központos húzás

1.)



F=260 kN

E=2*10^5 MPa (N/mm^2)

σ_e=200 MPa (N/mm^2)

Méretezze az S_{13} rudat a megadott keresztmetszettel!

- rúderő meghatározás:

$$S_{13} = F \cdot \frac{3{,}2}{1{,}6} = 260 \cdot \frac{3{,}2}{1{,}6} = 520\ kN\ (Húzott)$$

- méretezés húzásra:

$$\sigma \leq \sigma_e$$

$$\frac{S_{13}}{A} \leq \sigma_e$$

$$\frac{520 \cdot 10^3}{r^2 \cdot \pi} \leq 200$$

$$r_{szüks.} = 28{,}77\ mm$$

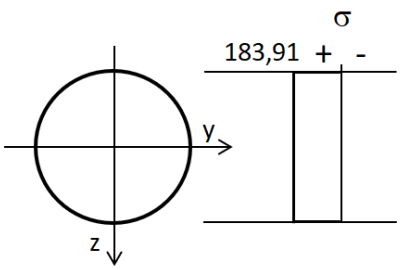
$$r_{alk.} = 30\ mm \qquad (5\ mm - re\ kerekítve)$$

- ellenőrzés húzásra:

$$\sigma = \frac{S_{13}}{A} = \frac{520 \cdot 10^3}{{r_{alk.}}^2 \cdot \pi} = \frac{520 \cdot 10^3}{30^2 \cdot \pi} = 183{,}91\ MPa\ \leq\ \sigma_e = 200\ MPa$$

$$megfelel$$

Ábrázolja a keresztmetszet feszültségeloszlását!

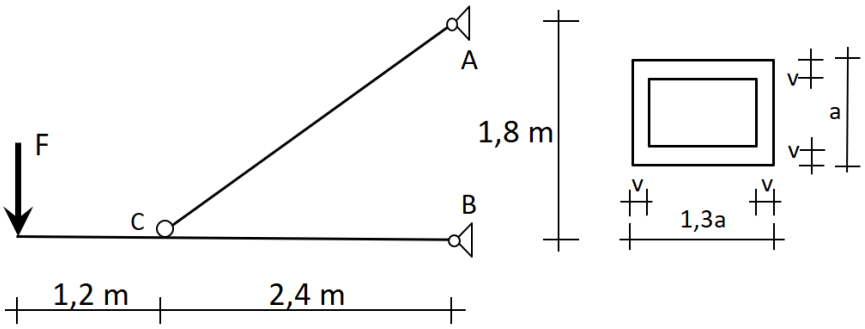


A keresztmetszetben központos húzás hatására egyenletes a feszültségeloszlás.

Határozza meg a rúd megnyúlását!

$$\Delta l = \frac{S_{13} \cdot l}{E \cdot A} = \frac{520 \cdot 10^3 \cdot 3{,}2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 30^2 \cdot \pi} = 2{,}943\ mm$$

2.)



F=140 kN

E=2*10^5 MPa

σ_e=275 MPa

v=0,08a

Méretezze az S_{AC} rudat a megadott keresztmetszettel!

- rúderő meghatározás:

$$S_{13} = F \cdot \frac{3{,}6 \cdot 3}{1{,}8 \cdot 2{,}4} = 140 \cdot \frac{3{,}6 \cdot 3}{1{,}8 \cdot 2{,}4} = 350\ kN\ (Húzott)$$

- méretezés húzásra:

$$\sigma \leq \sigma_e$$

$$\frac{S_{AC}}{A} \leq \sigma_e$$

$$\frac{350 \cdot 10^3}{1{,}3 \cdot a^2 - 1{,}14 \cdot a \cdot 0{,}84 \cdot a} \leq 275$$

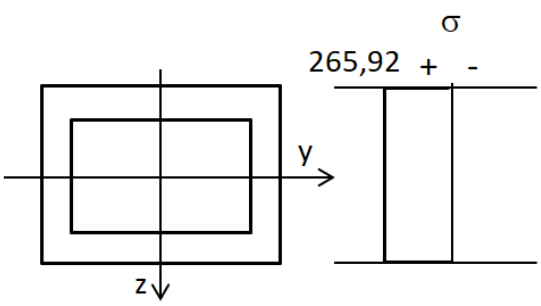
$$a_{szüks.} = 60{,}97\ mm$$

$$a_{alk.} = 62\ mm \qquad (páros\ mm - re\ kerekítve)$$

- ellenőrzés húzásra:

$$\sigma = \frac{S_{AC}}{A} = \frac{350 \cdot 10^3}{1{,}3 \cdot {a_{alk.}}^2 - 1{,}14 \cdot a_{alk.} \cdot 0{,}84 \cdot a_{alk.}} = \frac{350 \cdot 10^3}{1{,}3 \cdot 62^2 - 1{,}14 \cdot 62 \cdot 0{,}84 \cdot 62}$$
$$= 265{,}92\ MPa\ \leq\ \sigma_e = 275\ MPa$$

$$megfelel$$



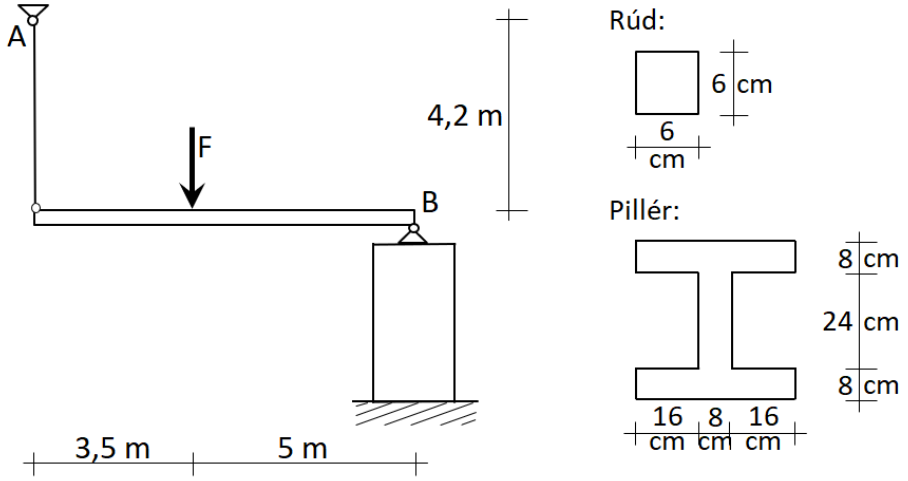
Ábrázolja a keresztmetszet feszültségeloszlását!

A keresztmetszetben központos húzás hatására egyenletes a feszültségeloszlás.

Határozza meg a rúd megnyúlását!

$$\Delta l = \frac{S_{AC} \cdot l}{E \cdot A} = \frac{350 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot (1{,}3 \cdot 62^2 - 1{,}14 \cdot 62 \cdot 0{,}84 \cdot 62)} = 3{,}989\ mm$$

3.)



F=300 kN

rúd:

$E=2*10^5$ MPa

σ_e=230 MPa

pillér:

$\sigma_{e,pillér}$=1,5 MPa

Ellenőrizze a rudat és a pillért a megadott keresztmetszetekkel!

- reakcióerők:

$$A = S = 300 \cdot \frac{5}{8{,}5} = 176{,}47\ kN\ \uparrow$$

$$B = 300 \cdot \frac{3{,}5}{8{,}5} = 123{,}53\ kN\ \uparrow$$

- pillér ellenőrzése (az önsúly mellőzésével):

$$\sigma = \frac{B}{A_{pillér}} = \frac{123{,}53 \cdot 10^3}{2 \cdot 400 \cdot 80 + 80 \cdot 240} = 1{,}485\ MPa\ \leq\ \sigma_{e,pillér} = 1{,}5\ MPa$$

$$megfelel$$

- rúd ellenőrzése:

$$\sigma = \frac{S}{A_{rúd}} = \frac{176{,}47 \cdot 10^3}{60 \cdot 60} = 49{,}02\ MPa\ \leq\ \sigma_e = 230\ MPa$$

$$megfelel$$

Határozza meg a rúd megnyúlását!

$$\Delta l = \frac{S \cdot l}{E \cdot A_{rúd}} = \frac{176{,}47 \cdot 10^3 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 60 \cdot 60} = 1{,}029\ mm$$

Határozza meg, mekkora lehet az F erő maximális nagysága, hogy a rúd megnyúlása ne legyen nagyobb Δl_e=0,8 mm-nél!

$$\Delta l \leq \Delta l_e$$

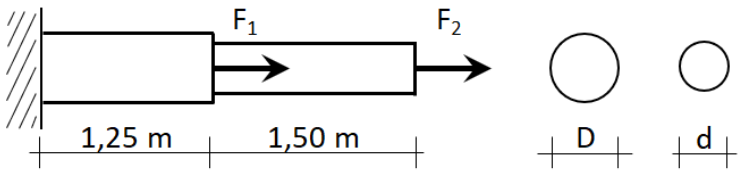
$$\frac{S \cdot l}{E \cdot A_{rúd}} \leq \Delta l_e$$

$$\frac{S \cdot 4{,}2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 60 \cdot 60} \leq 0{,}8$$

$$S_{max} = 137{,}14\ kN$$

$$F_{max} = S_{max} \cdot \frac{8{,}5}{5} = 137{,}14 \cdot \frac{8{,}5}{5} = 233{,}14\ kN$$

4.)



F_1=40 kN

F_2=50 kN

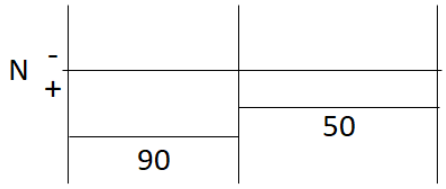
E=120000 MPa

D=5 cm

d=4 cm

Határozza meg a tartó maximális keresztmetszeti feszültségét!

- igénybevételi ábra:



- feszültség a D átmérőjű szakaszon:

$$\sigma = \frac{F_1 + F_2}{\frac{D^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{90 \cdot 10^3}{\frac{50^2 \cdot \pi}{4}} = 45{,}84\ MPa$$

- feszültség a d átmérőjű szakaszon:

$$\sigma = \frac{F_2}{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{50 \cdot 10^3}{\frac{40^2 \cdot \pi}{4}} = 39{,}79\ MPa$$

- maximális feszültség:

$\sigma_{max} = 45{,}84\ MPa$ A maximális feszültség a D átmérőjű szakaszon alakult ki.

Határozza meg a tartó hosszirányú megnyúlását!

$$\Delta l = \frac{90 \cdot 10^3 \cdot 1{,}25 \cdot 10^3}{120000 \cdot \frac{50^2 \cdot \pi}{4}} + \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1{,}50 \cdot 10^3}{120000 \cdot \frac{40^2 \cdot \pi}{4}} = 0{,}4775 + 0{,}4974 = 0{,}9749\ mm$$

Határozzam meg, mekkora legyen F_2 értéke, hogy a konzol végkeresztmetszete ne tolódjon el eredeti helyzetéből!

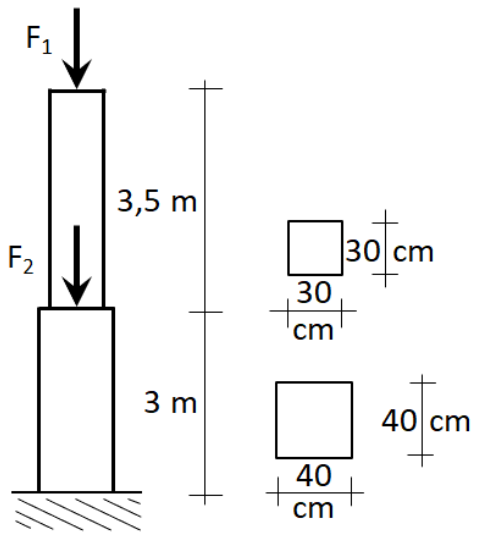
A feltétel akkor teljesül, ha a teljes tartó megnyúlása 0.

$$\Delta l = \frac{(40 + F_2) \cdot 10^3 \cdot 1{,}25 \cdot 10^3}{120000 \cdot \frac{50^2 \cdot \pi}{4}} + \frac{F_2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}50 \cdot 10^3}{120000 \cdot \frac{40^2 \cdot \pi}{4}} = 0$$

$$0{,}015252 \cdot F_2 = -0{,}21221$$

$$F_2 = -13{,}91\ kN$$

5.)



F_1=15 kN

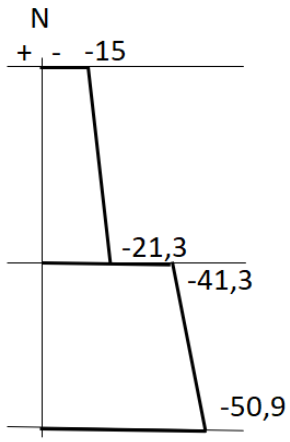
F_2=20 kN

E=15000 MPa

γ=20 kN/m^3 (az oszlop térfogatsúlya)

Határozza meg az oszlop egyes szakaszainak maximális keresztmetszeti feszültségét az önsúly figyelembevételével!

- *igénybevételi ábrák:*



Az egyes szakaszok alsó keresztmetszetében alakul ki a legnagyobb feszültség. A koncentrált erők ugrásszerű változást okoznak az ábrában, az önsúly pedig lineáris változást a hossz mentén.

- maximális feszültség a 30×30 keresztmetszetű szakaszon:

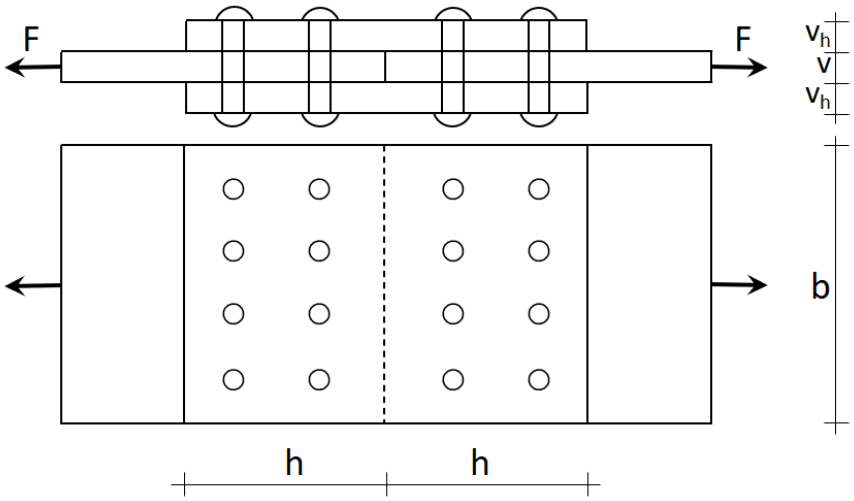
$$\sigma_{max} = \frac{(-15 - 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 3{,}5 \cdot 20) \cdot 10^3}{300 \cdot 300} = -0{,}237\ MPa$$

- maximális feszültség a 40×40 keresztmetszetű szakaszon:

$$\sigma_{max} = \frac{(-21{,}3 - 20 - 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 3 \cdot 20) \cdot 10^3}{400 \cdot 400} = -0{,}318\ MPa$$

Mintapéldák tiszta nyírás

1.)



F=650 kN

v=16 mm

v_h=10 mm

b=320 mm

τ_e=110 N/mm^2

σ_{pe}=350 N/mm^2

σ_e=200 N/mm^2

Méretezze és ellenőrizze a szegecskapcsolatot!

- tiszta nyírás:

$$\tau \leq \tau_e$$

$$\frac{F}{A_{nyírt}} \leq \tau_e$$

$$\frac{F}{n \cdot \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot s} \leq \tau_e$$

$$\frac{650 \cdot 10^3}{8 \cdot \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2} \leq 110$$

$$D_{szüks.,nyírás} = 21{,}68\ mm$$

Az s értéke 2, mert ennyi az elnyíródó síkok száma tönkremenetelkor. Ezért a kapcsolatot kétszer nyírtnak hívjuk.

- palástnyomás:

$$\sigma_p \leq \sigma_{pe}$$

$$\frac{F}{A_{palástny.}} \leq \sigma_{pe}$$

$$\frac{F}{n \cdot D \cdot v_{min}} \leq \sigma_{pe}$$

$$\frac{650 \cdot 10^3}{8 \cdot D \cdot 16} \leq 350$$

$$D_{szüks.,palástny.} = 14{,}51\ mm$$

$$D_{alk.} = 22\ mm$$

A v_{min} értéke az egyirányba elmozdulni szándékozó elemek összvastagságai közül a legkisebb. Ebben az esetben a két heveder vastagságainak összegét hasonlítjuk a lemezéhez.

A két tönkremeneteli módhoz tartozó szükséges méret közül a nagyobbat választva kapjuk az alkalmazandó megoldást a megfelelő kerekítéssel. Az így kapott átmérő által biztosítjuk a nyírás és a palástnyomás megfelelőségét.

- ellenőrzés nyírásra és palástnyomásra:

$$\tau = \frac{F}{n \cdot \frac{D_{alk.}{}^2 \cdot \pi}{4} \cdot s} = \frac{650 \cdot 10^3}{8 \cdot \frac{22^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2} = 106{,}87 \frac{N}{mm^2} \leq \tau_e = 110 \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

$$\sigma_p = \frac{F}{n \cdot D_{alk.} \cdot v_{min}} = \frac{650 \cdot 10^3}{8 \cdot 22 \cdot 16} = 230{,}82 \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_{pe} = 350 \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

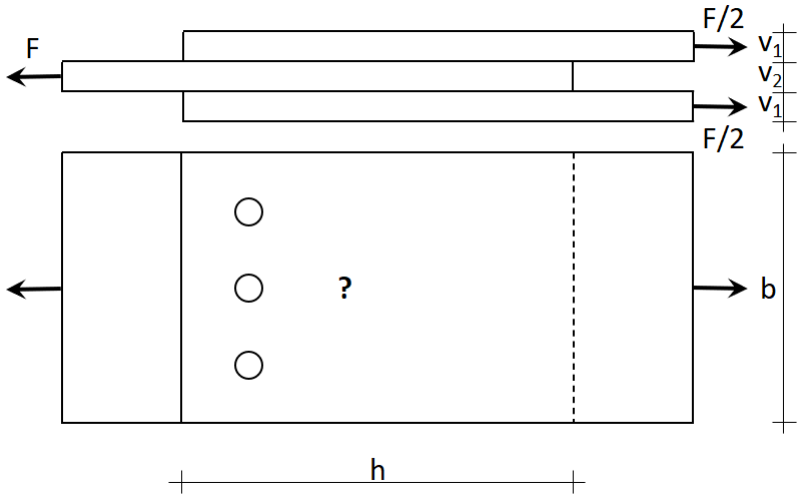
- lemezek ellenőrzése húzásra:

$$\sigma = \frac{F}{v_{min} \cdot (b - x \cdot D_{alk.})} = \frac{650 \cdot 10^3}{16 \cdot (320 - 4 \cdot 22)} = 175{,}11 \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_e = 200 \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

Itt a lemezeket ellenőrizzük húzásra az úgynevezett (szegecsfuratok által) gyengített keresztmetszetekben. A nagyobb szegecsátmérő a nagyobb gyengítés miatt nagyobb feszültséget okoz a lemez és a hevederek keresztmetszetében. Az x a szegecssorok számát jelöli az összefüggésben. A v_{min} értéke továbbra is az egyirányba elmozdulni szándékozó elemek összvastagságai közül a legkisebb. Ennek behelyettesítésével döntjük el, hogy a lemez vagy a hevederek esetében történne meg először a tönkremenetel, vagyis hol ébred nagyobb feszültség.

2.)



F=800 kN

v_1=8 mm

v_2=18 mm

b=320 mm

τ_e=140 N/mm^2

σ_{pe}=360 N/mm^2

σ_e=240 N/mm^2

D=18 mm

Határozza meg a kapcsolat szegecsszámát!

- tiszta nyírás:

$$\tau \leq \tau_e$$

$$\frac{F}{A_{nyírt}} \leq \tau_e$$

$$\frac{F}{n \cdot \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot s} \leq \tau_e$$

$$\frac{800 \cdot 10^3}{n \cdot \frac{18^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2} \leq 140$$

$$n_{szüks.,nyírás} = 11{,}23\ mm$$

- palástnyomás:

$$\sigma_p \leq \sigma_{pe}$$

$$\frac{F}{A_{palástny.}} \leq \sigma_{pe}$$

$$\frac{F}{n \cdot D \cdot v_{min}} \leq \sigma_{pe}$$

$$\frac{800 \cdot 10^3}{n \cdot 18 \cdot 16} \leq 350$$

$$n_{szüks.,palástny.} = 7{,}937\ mm$$

$n_{alk.} = 12\ db$ (3×4)

Az n értékének meghatározásánál figyelembe kell venni a feladat által megadott alkalmazandó sorok számát (3 sor), vagyis a szegecseket ennyi sorba kell rendezi. Minden sorba azonos számú szegecsnek kell kerülnie, így az alkalmazandó szegecsszámnak oszthatónak kell lennie a megadott sorok számával.

- ellenőrzés nyírásra és palástnyomásra:

$$\tau = \frac{F}{n_{alk.} \cdot \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot s} = \frac{800 \cdot 10^3}{12 \cdot \frac{18^2 \cdot \pi}{4} \cdot 2} = 130{,}99 \frac{N}{mm^2} \leq \tau_e = 140 \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

$$\sigma_p = \frac{F}{n_{alk.} \cdot D \cdot v_{min}} = \frac{800 \cdot 10^3}{12 \cdot 18 \cdot 16} = 231{,}48 \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_{pe} = 360 \frac{N}{mm^2}$$

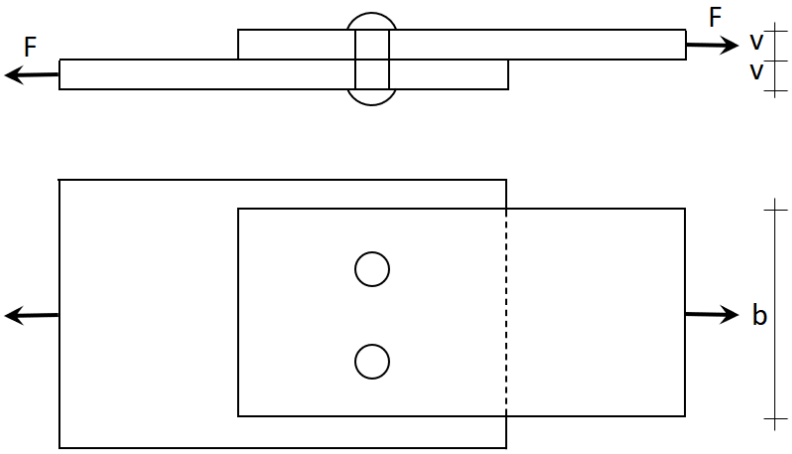
$$megfelel$$

- lemezek ellenőrzése húzásra:

$$\sigma = \frac{F}{v_{min} \cdot (b - x \cdot D)} = \frac{800 \cdot 10^3}{16 \cdot (320 - 3 \cdot 18)} = 187{,}97 \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_e = 240 \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

3.)



v=14 mm

b=250 mm

τ_e=160 N/mm^2

σ_{pe}=380 N/mm^2

σ_e=270 N/mm^2

D=20 mm

Határozza meg a kapcsolatra hárítható maximális erő nagyságát!

- tiszta nyírás:

$$\tau \leq \tau_e$$

$$\frac{F}{A_{nyírt}} \leq \tau_e$$

$$\frac{F}{n \cdot \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot s} \leq \tau_e$$

$$\frac{F}{2 \cdot \frac{20^2 \cdot \pi}{4} \cdot 1} \leq 160$$

$$F_{max.,nyírás} = 100{,}53\ kN$$

- palástnyomás:

$$\sigma_p \leq \sigma_{pe}$$

$$\frac{F}{A_{palástny.}} \leq \sigma_{pe}$$

$$\frac{F}{n \cdot D \cdot v_{min}} \leq \sigma_{pe}$$

$$\frac{F}{2 \cdot 20 \cdot 14} \leq 380$$

$$F_{max.,palástny.} = 212{,}80\ kN$$

- húzás:

$$\sigma \leq \sigma_e$$

$$\frac{F}{A_{húzott}} \leq \sigma_e$$

$$\frac{F}{v_{min} \cdot (b - x \cdot D_{alk.})} \leq \sigma_e$$

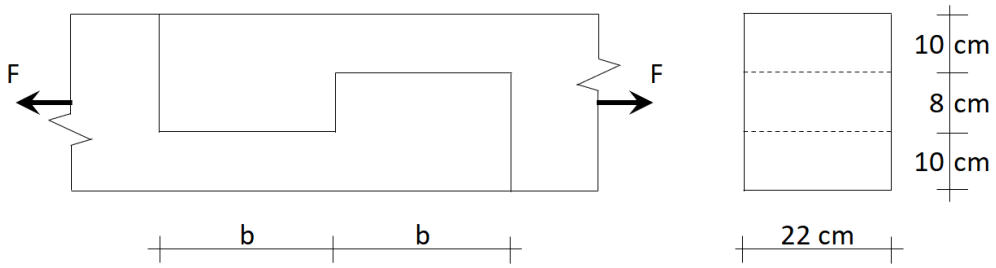
$$\frac{F}{14 \cdot (250 - 2 \cdot 20)} \leq 270$$

$$F_{max.,húzás} = 793{,}80\ kN$$

$$F_{max.} = 100{,}53\ kN$$

Mindhárom tönkremeneteli módot figyelembe véve, a három kapott erőérték közül a legkisebbet választva kapjuk meg a megoldást, vagyis a kapcsolatra hárítható maximális erőt, amellyel biztosítjuk a nyírás, a palástnyomás és a húzás megfelelőségét.

4.)



F=110 kN

τ_e=1,8 N/mm^2

σ_{pe}=17 N/mm^2

σ_e=10 N/mm^2

Határozza meg a fakötés (rálapolás) hiányzó méretét, majd ellenőrizze a kapcsolatot!

- méretezés nyírásra:

$$\tau \leq \tau_e$$

$$\frac{F}{A_{nyírt}} \leq \tau_e$$

$$\frac{110 \cdot 10^3}{b \cdot 220} \leq 1{,}8$$

$$b_{szüks.} = 277{,}78\ mm$$

$$b_{alk.} = 300\ mm \qquad (5\ cm - re\ kerekítve)$$

- ellenőrzés nyírásra:

$$\tau = \frac{110 \cdot 10^3}{b_{alk.} \cdot 220} = \frac{110 \cdot 10^3}{300 \cdot 220} = 1{,}667 \frac{N}{mm^2} \leq \tau_e = 1{,}8 \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

- ellenőrzés nyomásra:

$$\sigma_p = \frac{110 \cdot 10^3}{80 \cdot 220} = 6{,}25\ \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_{pe} = 17 \frac{N}{mm^2}$$

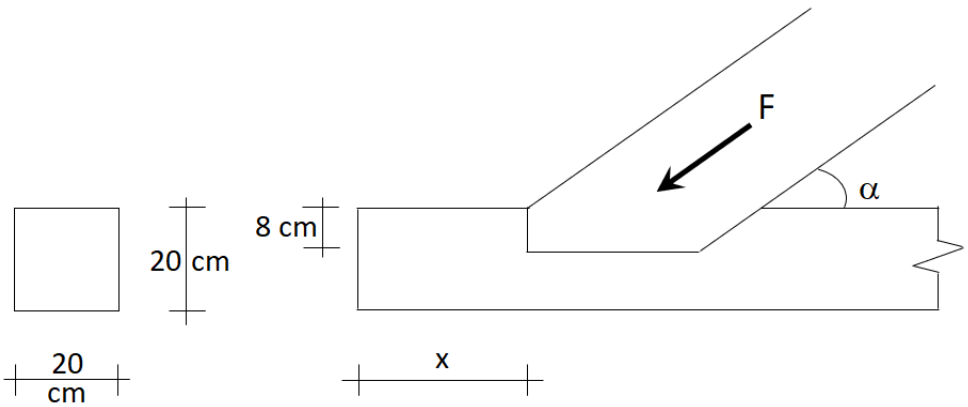
$$megfelel$$

- ellenőrzés húzásra:

$$\sigma_p = \frac{110 \cdot 10^3}{100 \cdot 220} = 5{,}0\ \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_{pe} = 10 \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

5.)



F=80 kN

α=40°

τ_e=2,5 N/mm^2

σ_{pe}=21 N/mm^2

Határozza meg a fakötés (beeresztés) hiányzó méretét, majd ellenőrizze a kapcsolatot!

- méretezés nyírásra:

$$\tau \leq \tau_e$$

$$\frac{F \cdot \cos\alpha}{A_{nyírt}} \leq \tau_e$$

$$\frac{80 \cdot 10^3 \cdot \cos 40°}{x \cdot 200} \leq 2{,}5$$

$$x_{szüks.} = 122{,}57\ mm$$

$$x_{alk.} = 130\ mm \qquad (10\ mm - re\ kerekítve)$$

- ellenőrzés nyírásra:

$$\tau = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot \cos 40°}{x_{alk.} \cdot 200} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot \cos 40°}{130 \cdot 200} = 2{,}357 \frac{N}{mm^2} \leq \tau_e = 2{,}5 \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

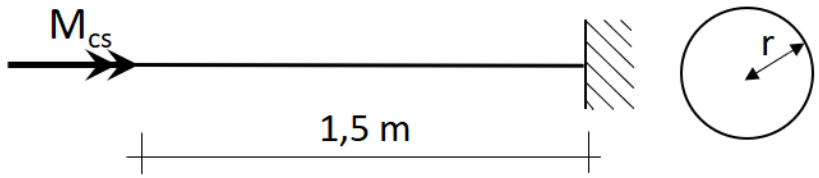
- ellenőrzés nyomásra:

$$\sigma_p = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot \cos 40°}{80 \cdot 200} = 3{,}830\ \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_{pe} = 21 \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

Mintapéldák tiszta csavarás

1.)



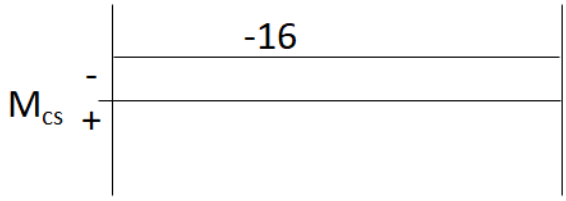
M_{cs}=16 kNm

τ_e=110 MPa

G=0,8*10^5 MPa

Méretezze és ellenőrizze a tartót csavarásra!

- igénybevételi ábra és a mértékadó nyomaték meghatározása a részletek mellőzésével:



$M_{cs,max}$=16 kNm

- méretezés csavarásra:

$$\tau_{max} \leq \tau_e$$

$$\frac{M_{cs,max}}{I_0} \cdot r_{max} \leq \tau_e$$

$$\frac{16 \cdot 10^6}{\frac{r^4 \cdot \pi}{2}} \cdot r \leq 110$$

$$r_{szüks.} = 45{,}24\ mm$$

$$r_{alk.} = 50\ mm \quad (5\ mm - re\ kerekítve)$$

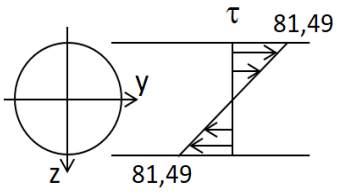
- ellenőrzés csavarásra:

$$\tau_{max} = \frac{M_{cs,max}}{I_0} \cdot r_{max} = \frac{16 \cdot 10^6}{\frac{50^4 \cdot \pi}{2}} \cdot 50 = 81{,}49\ MPa \leq \tau_e = 110\ MPa$$

$$megfelel$$

A méretezés és ellenőrzés során a körszimmetrikus keresztmetszetekre vonatkozó összefüggést használtuk. A legnagyobb feszültségi értékek a maximális nyomatékot tartalmazó keresztmetszetek (ebben az esetben az összes km.) kerületi pontjaiban alakulnak ki, vagyis a maximális súlyponttól mért távolságoknál felvett pontokban, r_{max}-nál.

Ábrázolja a keresztmetszet feszültségeloszlását!

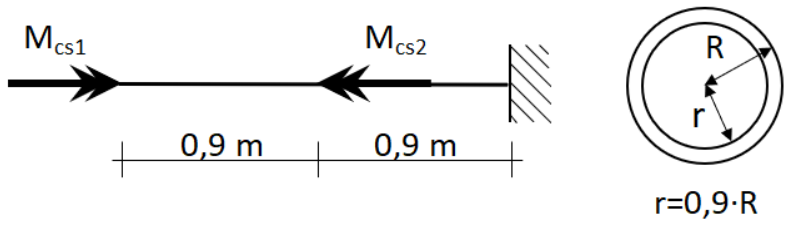


A keresztmetszetben a feszültségek a súlyponttól távolodva lineárisan növekednek minden irányban, így a maximális értékek a kerületi pontokban alakulnak ki.

Határozza meg a konzol végkeresztmetszetének elfordulási szögét a csavarás hatására!

$$\varphi = \frac{M_{cs} \cdot l}{G \cdot I_0} = \frac{16 \cdot 10^6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot \frac{50^4 \cdot \pi}{2}} = 3{,}056 \cdot 10^{-2} \ \ (a\ megoldás\ radiánban\ adódik)$$

2.)



M_{cs1}=8 kNm

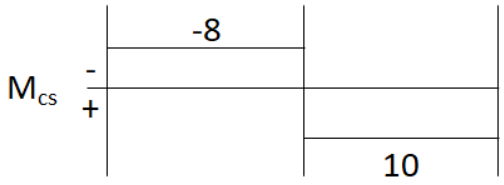
M_{cs2}=18 kNm

τ_e=110 MPa

G=0,8*10^5 MPa

Méretezze és ellenőrizze a tartót csavarásra!

- igénybevételi ábra és a mértékadó nyomaték meghatározása a részletek mellőzésével:



$M_{cs,max}$=10 kNm

- méretezés csavarásra:

$$\tau_{max} \leq \tau_e$$

$$\frac{M_{cs,max}}{I_0} \cdot r_{max} \leq \tau_e$$

$$\frac{10 \cdot 10^6}{\frac{R^4 \cdot \pi}{2} - \frac{r^4 \cdot \pi}{2}} \cdot R \leq 110$$

$$\frac{10 \cdot 10^6}{\frac{R^4 \cdot \pi}{2} - \frac{(0{,}9 \cdot R)^4 \cdot \pi}{2}} \cdot R \leq 110$$

$$R_{szüks.} = 55{,}21\ mm$$

$$R_{alk.} = 60\ mm \quad (5\ mm - re\ kerekítve)$$

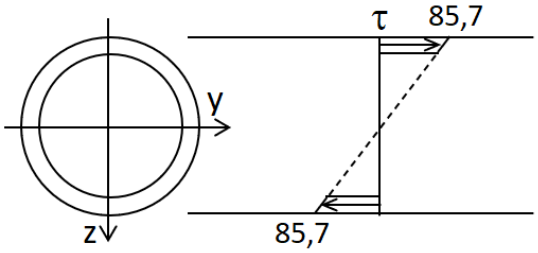
- ellenőrzés csavarásra:

$$\tau_{max} = \frac{M_{cs,max}}{I_0} \cdot r_{max} = \frac{10 \cdot 10^6}{\frac{60^4 \cdot \pi}{2} - \frac{(0{,}9 \cdot 60)^4 \cdot \pi}{2}} \cdot 60 = 85{,}70\ MPa \leq \tau_e = 110\ MPa$$

$$megfelel$$

A méretezés és ellenőrzés során a körszimmetrikus keresztmetszetekre vonatkozó összefüggést használtuk. A legnagyobb feszültségi értékek a maximális nyomatékot tartalmazó keresztmetszetek kerületi pontjaiban alakulnak ki, vagyis a maximális súlyponttól mért távolságoknál felvett pontokban, r_{max}-nál.

Ábrázolja a keresztmetszet feszültségeloszlását!



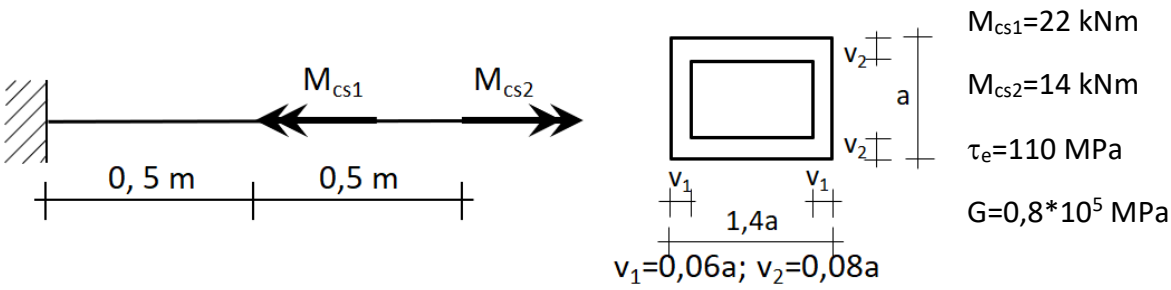
Határozza meg a konzol végkeresztmetszetének elfordulási szögét a csavarás hatására!

$$\varphi = \frac{M_{cs1} \cdot l}{G \cdot I_0} + \frac{(M_{cs1} + M_{cs2}) \cdot l}{G \cdot I_0}$$

$$\varphi = \frac{-8 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{60^4 \cdot \pi}{2} - \frac{(0{,}9 \cdot 60)^4 \cdot \pi}{2}\right)} + \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0{,}9 \cdot 10^3}{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{60^4 \cdot \pi}{2} - \frac{(0{,}9 \cdot 60)^4 \cdot \pi}{2}\right)}$$

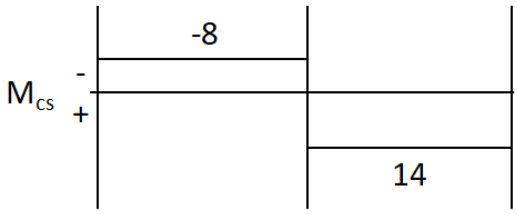
$$\varphi = 3{,}214 \cdot 10^{-3}$$

3.)



Méretezze és ellenőrizze a tartót csavarásra!

- igénybevételi ábra és a mértékadó nyomaték meghatározása a részletek mellőzésével:



$M_{cs,max}$=14 kNm

- méretezés csavarásra:

$$\tau_{max} \leq \tau_e$$

$$\frac{M_{cs,max}}{2 \cdot A_k \cdot v_{min}} \leq \tau_e$$

$$\frac{14 \cdot 10^6}{2 \cdot 1{,}34 \cdot a \cdot 0{,}92 \cdot a \cdot 0{,}06 \cdot a} \leq 110$$

$$a_{szüks.} = 95{,}11\ mm$$

$$a_{alk.} = 100\ mm \quad (5\ mm - re\ kerekítve)$$

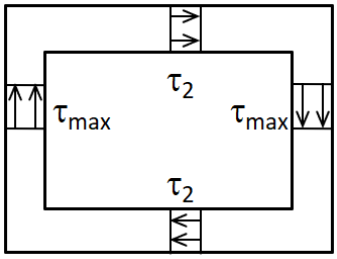
- ellenőrzés csavarásra:

$$\tau_{max} = \frac{M_{cs,max}}{2 \cdot A_k \cdot v_{min}} = \frac{14 \cdot 10^6}{2 \cdot 1{,}34 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}06 \cdot 100^3} = 94{,}64\ MPa < \tau_e = 110\ MPa$$

$$megfelel$$

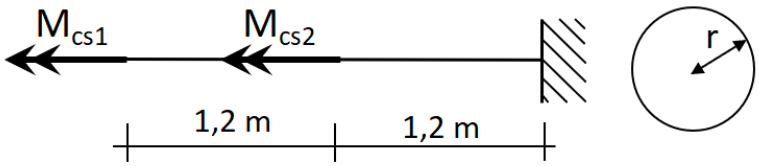
A méretezés és ellenőrzés során a vékonyfalú zártszelvényekre vonatkozó összefüggést (Bredt-képlet) használtuk. A legnagyobb feszültségi értékek a maximális nyomatékot tartalmazó keresztmetszetek azon pontjaiban alakulnak ki, ahol a keresztmetszetnek a legkisebb a falvastagsága.

Ábrázolja a keresztmetszet feszültségeloszlását!



A τ·v=állandó a keresztmetszetben. Ez alapján a τ_2 és a τ_{max} értéke fordítottan aránylik a hozzájuk tartozó falvastagságokhoz képest.

4.)



M_{cs1}=9 kNm

τ_e=140 MPa

r=4 cm

Határozza meg a tartó csavarónyomatéki teherbírását, majd az M_{cs2} nyomaték maximális értékét!

- *teherbírás:*

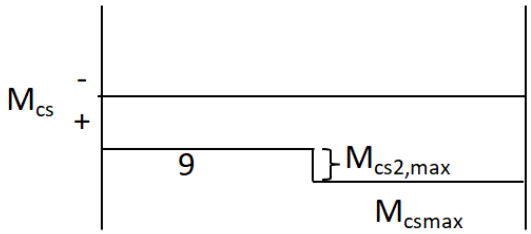
$$\tau_{max} \leq \tau_e$$

$$\frac{M_{cs,max}}{I_0} \cdot r_{max} \leq \tau_e$$

$$\frac{M_{cs,max}}{\frac{40^4 \cdot \pi}{2}} \cdot 40 \leq 140$$

$$M_{cs,max} = 14{,}07\ kNm$$

- *$M_{cs2,max}$ meghatározás:*

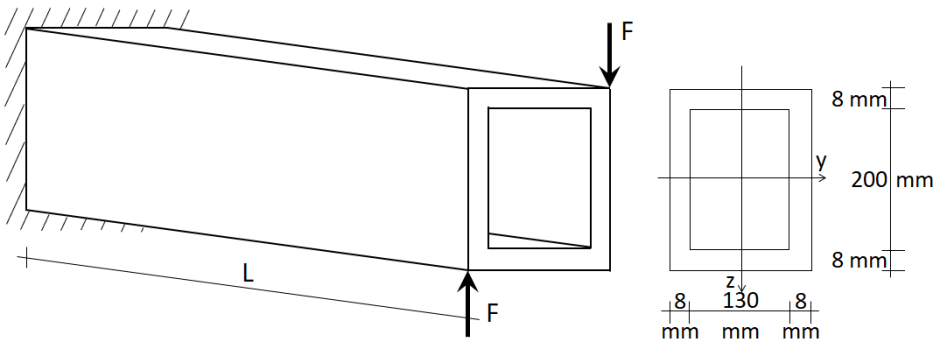


$$M_{cs1} + M_{cs2,max} = M_{cs,max}$$

$$9 + M_{cs2,max} = 14{,}07$$

$$M_{cs2,max} = 5{,}07\ kNm$$

5.)



F= 150 kN

τ_e=110 MPa

L=2 m

Ellenőrizze a tartót csavarásra!

- *csavarónyomaték meghatározás:*

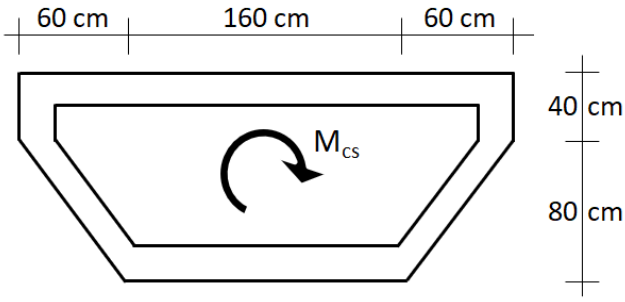
$$M_{cs} = F \cdot (0{,}008 + 0{,}13 + 0{,}008) = 150 \cdot 0{,}146 = 21{,}9\ kNm$$

- *ellenőrzés csavarásra:*

$$\tau_{max} = \frac{M_{cs}}{2 \cdot A_k \cdot v_{min}} = \frac{21{,}9 \cdot 10^6}{2 \cdot 138 \cdot 208 \cdot 8} = 47{,}68\ MPa < \tau_e = 110\ MPa$$

$$megfelel$$

6.)



M_{cs}=300 kNm

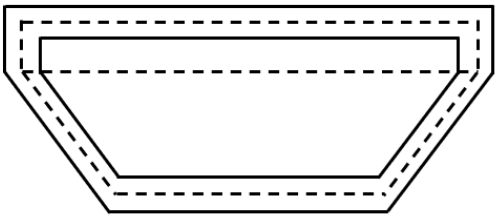
v=15 cm

Határozza meg a keresztmetszetben kialakuló feszültséget a csavarónyomaték hatására!

- *a vastagság felében húzott középvonal által lehatárolt terület:*

$$A_k = (2800 - 2 \cdot 75) \cdot (400 - 75) + \frac{(2800 - 2 \cdot 75) + 1600}{2} \cdot (800 - 75)$$

$$A_k = 2{,}4019 \cdot 10^6\ mm^2$$



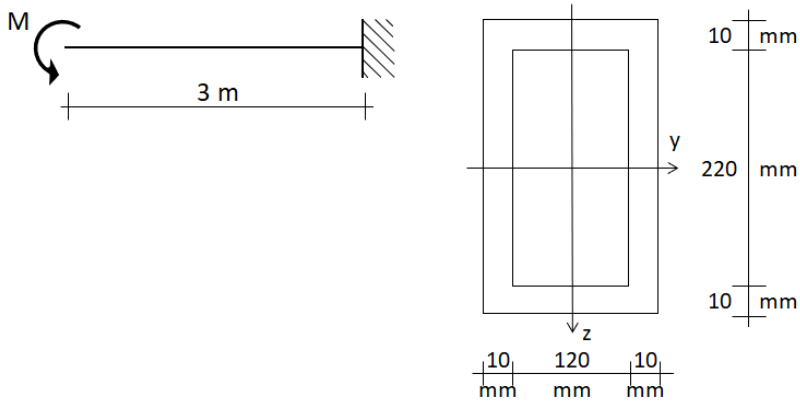
Az A_k területet egy téglalap és egy trapéz területének ősszegéből állítjuk elő.

- a feszültség meghatározása:

$$\tau_{max} = \frac{M_{cs}}{2 \cdot A_k \cdot v_{min}} = \frac{300 \cdot 10^6}{2 \cdot 2{,}4019 \cdot 10^6 \cdot 150} = 0{,}4163\ MPa$$

Mintapéldák tiszta egyenes hajlítás

1.)

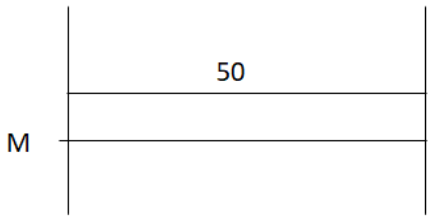


M_y=50 kNm

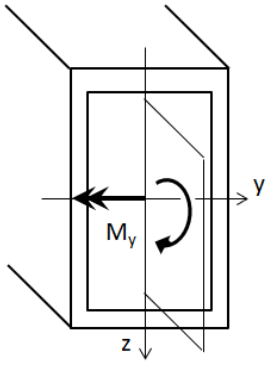
σ_e= 230 N/mm^2

Ellenőrizze a tartót hajlításra!

- nyomatéki ábra és a mértékadó nyomaték meghatározása a részletek mellőzésével:



M_{ymax}=50 kNm



A kiindulási terhelési ábra alapján könnyen megállapítható, hogy a nyomaték a keresztmetszet felső szálait húzza, az alsókat nyomja. A nyomatéki ábra alapján is erre a következtetésre juthatunk, hiszen tudjuk, hogy az mindig a húzott oldalra van rajzolva. Ebben az esetben a teljes ábra a kiindulási vonalhoz képest felül helyezkedik el, vagyis a tartó összes keresztmetszetében a húzott zóna ugyanezen oldalon, tehát felül van. Ezen megállapítás után könnyedén berajzolhatjuk a keresztmetszetben működő nyomatékot, amely a felső szálakat húzza, az alsókat nyomja. A balra mutató nyomatékvektor is ugyanezt fejezi ki, szembenézve a hegyével, a vektorra merőleges síkban pozitív forgatást leírva jutunk a nyomaték előző görbe nyilas jelöléséhez.

Az y és a z tengely a keresztmetszet főinercia tengelyei, mivel a szimmetriatengelyek és a rá merőleges súlyponti tengelyek mindig főinercia tengelyek. A hajlítónyomaték vektora egy egyenesbe esik a keresztmetszet egyik főinerciatengelyével (y), a nyomaték síkja merőleges erre a főtengelyre, ezért ebben az esetben egyenes hajlításról beszélünk.

- főinercianyomaték a hajlítás tengelyére:

$$I_y = \frac{140 \cdot 240^3}{12} - \frac{120 \cdot 220^3}{12} = 5{,}48 \cdot 10^7 mm^4$$

- keresztmetszeti tényező:

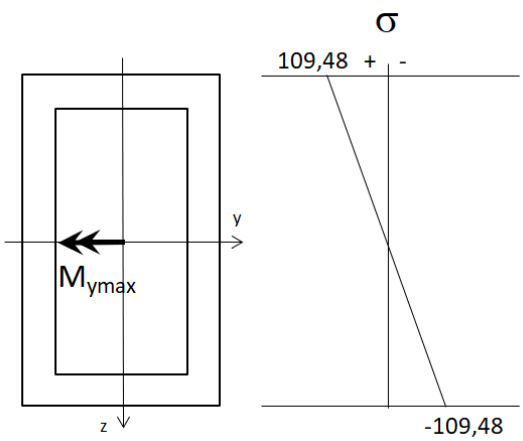
$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{5{,}48 \cdot 10^7}{120} = 4{,}567 \cdot 10^5 mm^3$$

- ellenőrzés hajlításra:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{50 \cdot 10^6}{4{,}567 \cdot 10^5} = 109{,}48 \frac{N}{mm^2} < \sigma_e = 230 \frac{N}{mm^2}$$

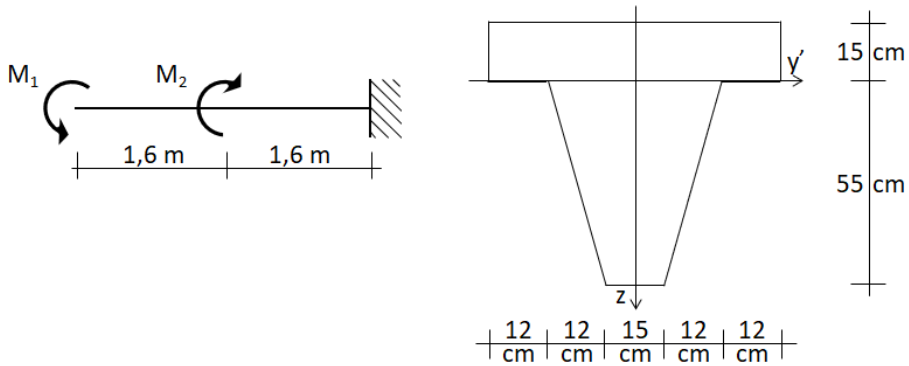
$$megfelel$$

- feszültségi ábra a keresztmetszetben:



A semleges tengely egy egyenesbe esik a hajlítás tengelyével (y), ezzel elválasztva a keresztmetszetben a húzott és nyomott zónát. A feszültségek a semleges tengelytől távolodva lineárisan növekednek a maximumot a keresztmetszet szélső szálaiban elérve.

2.)



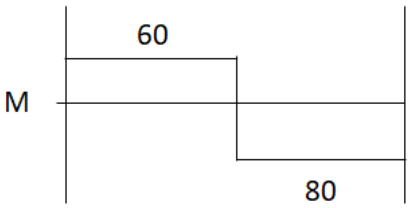
M_1=60 kNm

M_2=140 kNm

σ_e=25 N/mm^2

Ellenőrizze a tartót hajlításra!

- nyomatéki ábra és a mértékadó nyomaték meghatározása a részletek mellőzésével:



Az $M_{y,max}$ a nyomatéki ábrában a kiindulási vonalhoz képest alul helyezkedik el, ezért az innen leolvasott nyomaték a keresztmetszet alsó felét húzza, a felsőt nyomja, mivel a nyomatéki ábra mindig a húzott oldalon van.

$M_{y,max}$=80 kNm

A maximális nyomaték az y tengely körül forgat, amely főinerciatengely, ezért egyenes hajlításról van szó.

- súlypont:

$$z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{630 \cdot 150 \cdot \left(-\frac{150}{2}\right) + 2 \cdot \frac{120 \cdot 550}{2} \cdot \frac{550}{3} + 150 \cdot 550 \cdot \frac{550}{2}}{630 \cdot 150 + 2 \cdot \frac{120 \cdot 550}{2} + 150 \cdot 550}$$

$$z_s = \frac{2{,}77 \cdot 10^7}{2{,}43 \cdot 10^5} = 114\ mm$$

- főinercianyomaték a hajlítás tengelyére:

$$I_y = \frac{630 \cdot 150^3}{3} + 2 \cdot \frac{120 \cdot 550^3}{12} + \frac{150 \cdot 550^3}{3} - 2{,}43 \cdot 10^5 \cdot 114^2 = 9{,}19697 \cdot 10^9\ mm^4$$

- keresztmetszeti tényezők:

$$W^{alsó}{}_y = \frac{I_y}{z_{alsó}} = \frac{9{,}19697 \cdot 10^9}{550 - 114} = 2{,}1094 \cdot 10^7\ mm^3$$

$$W^{felső}{}_y = \frac{I_y}{z_{felső}} = \frac{9{,}19697 \cdot 10^9}{150 + 114} = 3{,}4837 \cdot 10^7\ mm^3$$

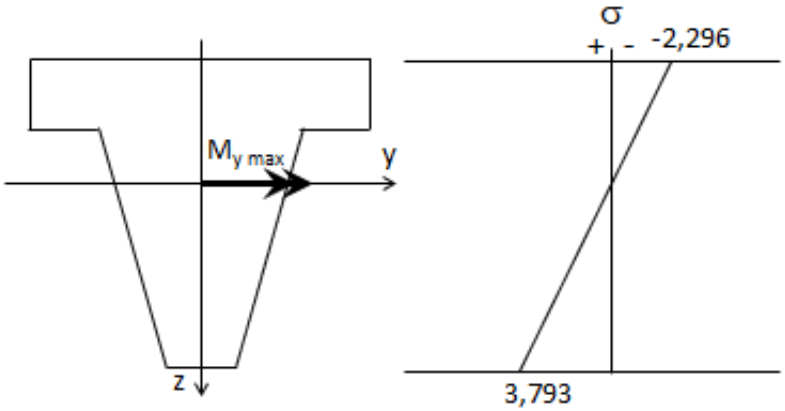
- ellenőrzés hajlításra:

$$\sigma_{max} = \sigma_{max}{}^{+} = \frac{M_{y,max}}{W^{alsó}{}_y} = \frac{80 \cdot 10^6}{2{,}1094 \cdot 10^7} = 3{,}793\ \frac{N}{mm^2} < \sigma_e = 25\ \frac{N}{mm^2}$$

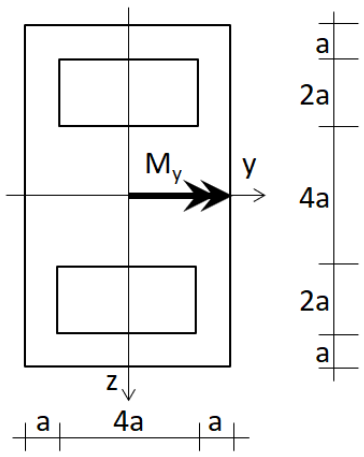
$$megfelel$$

$$\sigma_{max}{}^{-} = -\frac{M_{y,max}}{W^{felső}{}_y} = -\frac{80 \cdot 10^6}{3{,}4837 \cdot 10^7} = -2{,}296\ \frac{N}{mm^2}$$

- feszültségi ábra a keresztmetszetben:



3.)



M_y=130 kNm

σ_e= 40 N/mm^2

Méretezze a keresztmetszetet hajlításra!

- főinercianyomaték a hajlítás tengelyére:

$$I_y = \frac{6a \cdot (10a)^3}{12} - \frac{4a \cdot (8a)^3}{12} + \frac{4a \cdot (4a)^3}{12} = 350{,}67a^4$$

- keresztmetszeti tényező:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{350{,}67a^4}{5a} = 70{,}13a^3$$

- méretezés hajlításra:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_e$$

$$\frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_e$$

$$\frac{130 \cdot 10^6}{70{,}13a^3} \leq 40$$

$$a_{szüks.} = \sqrt[3]{\frac{130 \cdot 10^6}{70{,}13 \cdot 40}} = 35{,}92\ mm$$

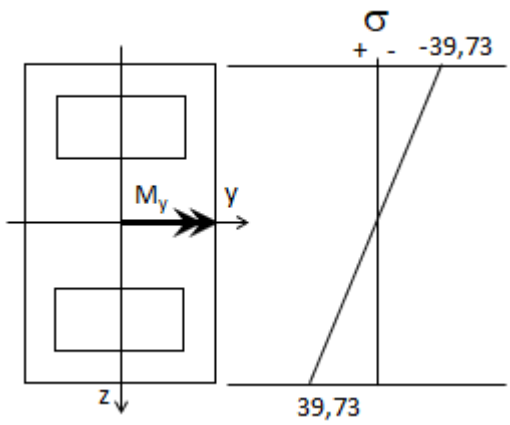
$$a_{alk.} = 36\ mm \qquad (mm - re\ kerekítve)$$

- ellenőrzés hajlításra:

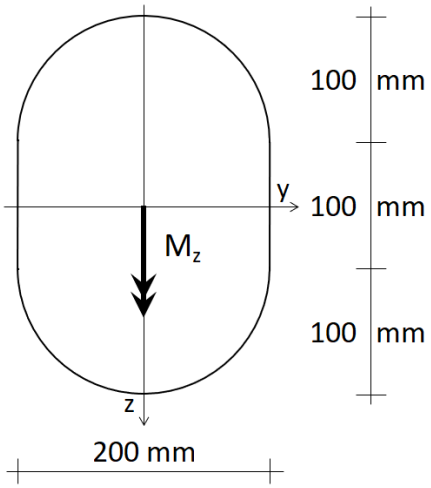
$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{130 \cdot 10^6}{70{,}13 \cdot 36^3} = 39{,}73\ \frac{N}{mm^2} < \sigma_e = 40\ \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

- feszültségi ábra a keresztmetszetben:



4.)



σ_e= 50 N/mm^2

Határozza meg a keresztmetszet nyomatéki teherbírását!

- főinercianyomaték a hajlítás tengelyére:

$$I_z = \frac{100 \cdot 200^3}{12} + \frac{100^4 \cdot \pi}{4} = 1{,}4521 \cdot 10^8\ mm^4$$

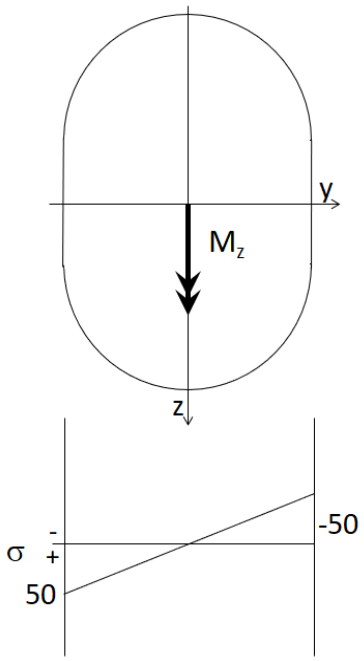
- keresztmetszeti tényező:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{1{,}4521 \cdot 10^8}{100} = 1{,}4521 \cdot 10^6\ mm^3$$

- nyomatéki teherbírás:

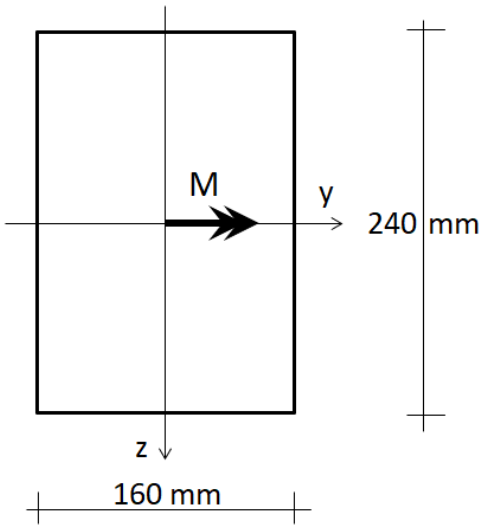
$$\sigma_{max} \leq \sigma_e$$
$$\frac{M_z}{W_z} \leq \sigma_e$$
$$\frac{M_z}{1{,}4521 \cdot 10^6} \leq 50$$
$$M_{z\,max} = 72{,}61\ kNm$$

- feszültségi ábra a keresztmetszetben:



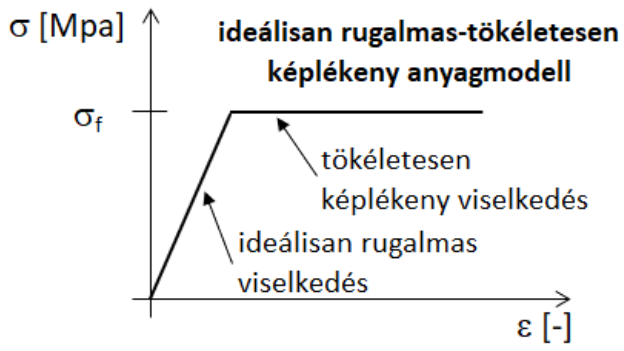
Mintapéldák rugalmas és képlékeny nyomatéki teherbírás

1.)



σ_f=230 MPa

a keresztmetszet anyagmodellje:



Határozza meg a keresztmetszet rugalmas és képlékeny teherbírását!

Rugalmas teherbírás meghatározása:

- inercianyomaték az y tengelyre:

$$I_y = \frac{160 \cdot 240^3}{12} = 1{,}8432 \cdot 10^8\ mm^4$$

- keresztmetszeti tényező:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{1{,}8432 \cdot 10^8}{120} = 1{,}536 \cdot 10^6\ mm^3$$

- rugalmas teherbírás az egyenes hajlítás képletével:

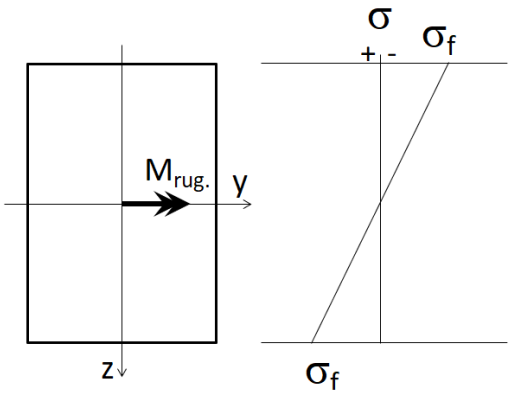
$$\sigma_{max} = \sigma_f$$

$$\frac{M_{rug}}{W_y} = \sigma_f$$

$$M_{rug} = W_y \cdot \sigma_f$$

$$M_{rug} = 1{,}536 \cdot 10^6 \cdot 230$$

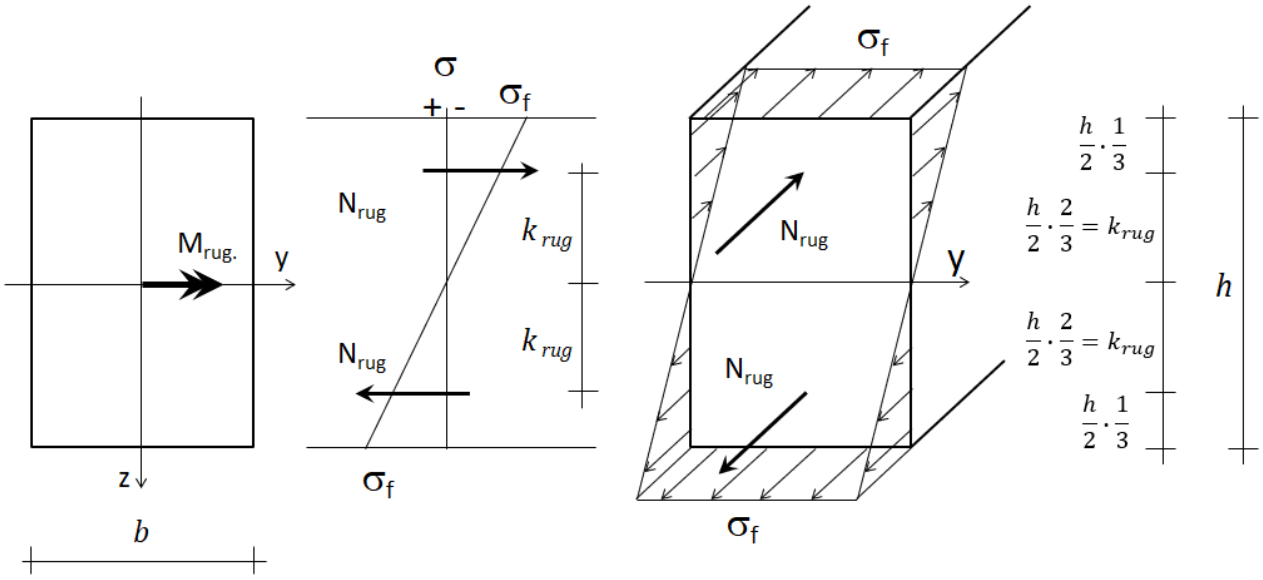
$$M_{rug} = 353{,}3\ kNm$$



Annál a nyomatéknál érjük el a keresztmetszet rugalmas teherbírását, amelynél a szélsőszál-feszültségek értéke éppen eléri σ_f értékét, hiszen ez jelenti a rugalmas viselkedés határát. A számításhoz a megtanult egyenes hajlítási képletet (Navier-formula) fel tudtuk használni, hiszen az lineárisan rugalmas anyagmodell esetén érvényes.

- rugalmas teherbírás eredőszámítással:

A keresztmetszet feszültségi diagramja jól szemlélteti a feszültségek felületmenti megoszló erőrendszer jellegét. Ennek a megoszló erőrendszernek számítható az eredője, amely nem más, mint a keresztmetszet igénybevétele, vagyis a hajlító nyomaték. Ha a feszültségi diagram szélsőszál-feszültségei megegyeznek σ_f értékével, akkor a megoszló erőrendszer eredője a rugalmas viselkedés határához tartozó nyomaték, vagyis a rugalmas teherbírás lesz.



vetületi egyenlet:

$$\sum F_i = N_{rug} - N_{rug} = \frac{b \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_f}{2} - \frac{b \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_f}{2} = 0 \quad (a\ feszültségi\ diagram\ térfogata\ 0.)$$

nyomatéki egyenlet az y tengelyre:

$$\sum M_{yi} = N_{rug} \cdot k_{rug} + N_{rug} \cdot k_{rug} = \frac{b \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_f}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{b \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_f}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} = M_{rug.}$$

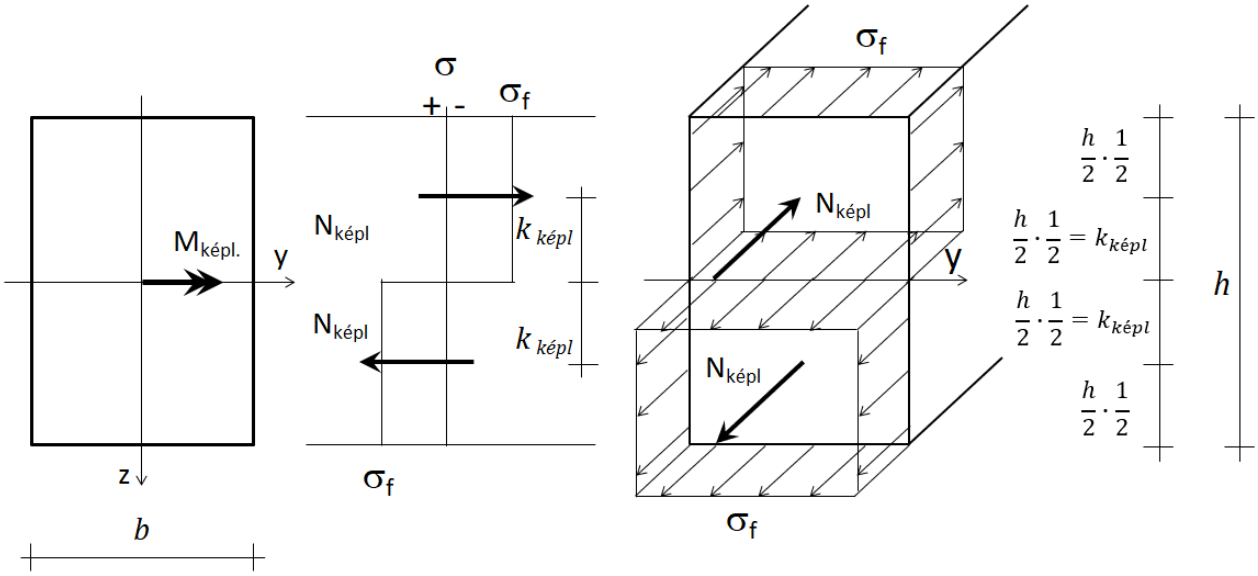
$$\sum M_{yi} = \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_f}{6} = M_{rug.}$$

$$\sum M_{yi} = \frac{160 \cdot 240^2 \cdot 230}{6} = 353{,}3\ kNm = M_{rug.}$$

A feszültségi ábra eredője esetünkben az M_{rug} rugalmas nyomatéki teherbírás. Az ilyen módon, eredőszámítás útján előállított nyomatéki eredő számítása rugalmas viselkedés mellett általában bonyolultabb megoldást jelent az előző számítás képletéhez (Navier-formula) képest, ezért ezt csak egyszerűbb geometriájú keresztmetszetek esetében érdemes így számítani.

Képlékeny teherbírás meghatározása:

Ha a nyomatékot tovább növeljük a rugalmas teherbíráshoz képest, akkor a keresztmetszet szélei képlékenyedni kezdenek. Minél tovább növeljük a nyomatékot, annál nagyobb tartomány válik képlékennyé. Ez addig alakítható, amíg a teljes keresztmetszet képlékennyé nem válik. Az ehhez az állapothoz tartozó nyomaték a képlékeny teherbírás, amely elérésével a teljes teherbírást kimerítjük és a nyomaték tovább nem növelhető, a



keresztmetszet tönkremegy.

- képlékeny teherbírás eredőszámítással:

A képlékeny teherbírás számításánál nem alkalmazhatjuk az egyenes hajlítás képletét (Navier-formula), mert az csak rugalmas viselkedés esetén használható. Így csak az eredőszámítással tudjuk előállítani a megoldást.

vetületi egyenlet:

$$\sum F_i = N_{képl} - N_{képl} = A_{fél} \cdot \sigma_f - A_{fél} \cdot \sigma_f = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_f - b \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_f = 0$$

A feszültségi diagram térfogata nulla tiszta hajlítás esetén, amely csak akkor teljesülhet, ha a húzott és nyomott zónához tartozó keresztmetszeti területek azonosak. Vagyis az ezeket a zónákat elválasztó képlékeny semleges tengelynek mindenképpen területfelezőnek kell lennie.

nyomatéki egyenlet az y tengelyre:

$$\sum M_{yi} = N_{képl} \cdot k_{képl} + N_{képl} \cdot k_{képl} = A_{fél} \cdot \sigma_f \cdot k_{képl} + A_{fél} \cdot \sigma_f \cdot k_{képl}$$

$$\sum M_{yi} = 2 \cdot A_{fél} \cdot \sigma_f \cdot k_{képl}$$

$$\sum M_{yi} = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_f \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{h}{2} \cdot \sigma_f \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} = M_{képl.}$$

$$\sum M_{yi} = \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_f}{4} = M_{képl.}$$

$$\sum M_{yi} = \frac{160 \cdot 240^2 \cdot 230}{4} = 529{,}92\ kNm = M_{képl.}$$

Az $A_{fél} \cdot k_{képl}$ összefüggés a félkeresztmetszet statikai nyomatéka, amely alapján a képlékeny teherbírás felírható a következőképpen:

$$M_{képl.} = 2 \cdot A_{fél} \cdot k_{képl} \cdot \sigma_f = 2 \cdot S'_{y\,fél} \cdot \sigma_f$$

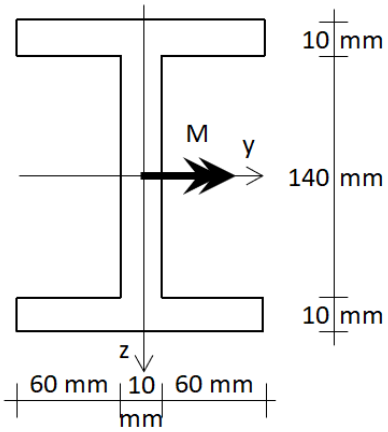
$$M_{képl.} = 2 \cdot 160 \cdot \frac{240}{2} \cdot \frac{240}{4} \cdot 230 = 529{,}92\ kNm$$

Határozza meg a keresztmetszet képlékeny teherbírási többletét!

$$c = \frac{M_{képl.}}{M_{rug.}} = \frac{529{,}92}{353{,}3} = 1{,}5$$

A téglalap keresztmetszet esetében, ha teljesen kihasználjuk a képlékenyedés adta tartalékot, akkor másfelszeres nagyságú nyomatéki teherbírást érhetünk el.

2.)



σ_f=270 MPa

Határozza meg a keresztmetszet rugalmas és képlékeny teherbírását!

Rugalmas teherbírás meghatározása:

- inercianyomaték az y tengelyre:

$$I_y = \frac{130 \cdot 160^3}{12} - \frac{120 \cdot 140^3}{12} = 1{,}6933 \cdot 10^7\ mm^4$$

- keresztmetszeti tényező:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{1{,}6933 \cdot 10^7}{80} = 2{,}1166 \cdot 10^5\ mm^3$$

- rugalmas teherbírás:

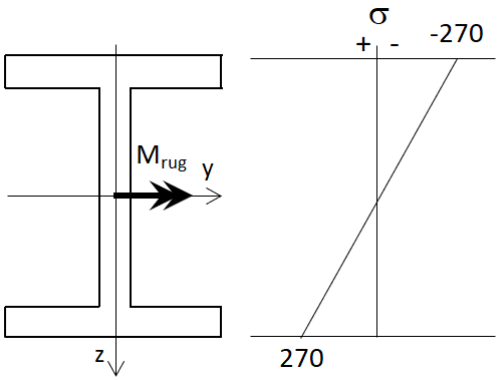
$$\sigma_{max} = \sigma_f$$

$$\frac{M_{rug}}{W_y} = \sigma_f$$

$$M_{rug} = W_y \cdot \sigma_f$$

$$M_{rug} = 2{,}1166 \cdot 10^5 \cdot 270$$

$$M_{rug} = 57{,}15\ kNm$$



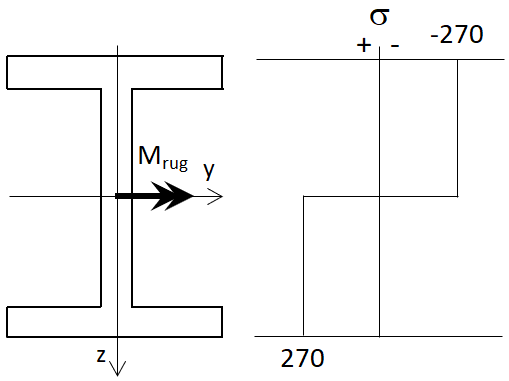
Képlékeny teherbírás meghatározása:

- félkeresztmetszet statikai nyomatéka az y tengelyre:

$$S'_{y\,fél} = 10 \cdot \frac{140}{2} \cdot \frac{140}{2} \cdot \frac{1}{2} + 130 \cdot 10 \cdot \left(\frac{140}{2} + \frac{10}{2}\right) = 1{,}22 \cdot 10^5\ mm^3$$

- képlékeny teherbírás:

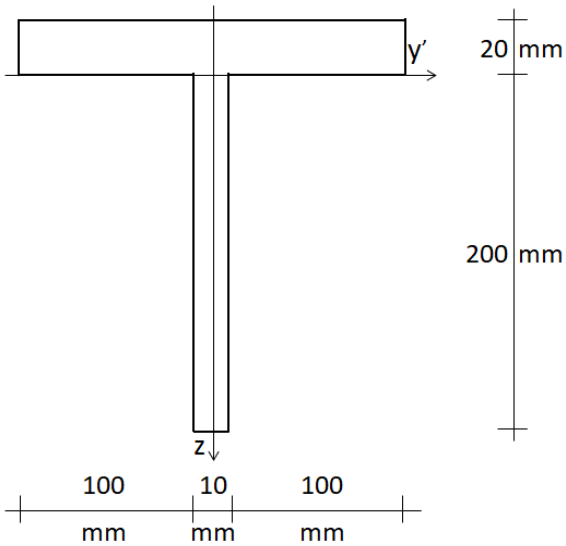
$$M_{képl.} = 2 \cdot S'_{y\,fél} \cdot \sigma_f = 2 \cdot 1{,}22 \cdot 10^5 \cdot 270 = 64{,}8\ kNm$$



Határozza meg a keresztmetszet képlékeny teherbírási többletét!

$$c = \frac{M_{képl.}}{M_{rug.}} = \frac{64{,}8}{57{,}15} = 1{,}134$$

3.)



σ_f=350 MPa

Határozza meg a keresztmetszet rugalmas és képlékeny teherbírását!

Rugalmas teherbírás meghatározása:

- súlypont:

$$z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{210 \cdot 20 \cdot (-10) + 10 \cdot 200 \cdot 100}{210 \cdot 20 + 10 \cdot 200} = 25{,}48\ mm$$

- inercianyomaték az y tengelyre:

$$I_y = \frac{210 \cdot 20^3}{3} + \frac{10 \cdot 200^3}{3} - (210 \cdot 20 + 10 \cdot 200) \cdot 25{,}48^2 = 2{,}3201 \cdot 10^7\ mm^4$$

- keresztmetszeti tényező:

$$W^{alsó}{}_y = \frac{I_y}{z_{alsó}} = \frac{2{,}3201 \cdot 10^7}{(200 - 25{,}48)} = 1{,}3294 \cdot 10^5\ mm^3$$

- rugalmas teherbírás:

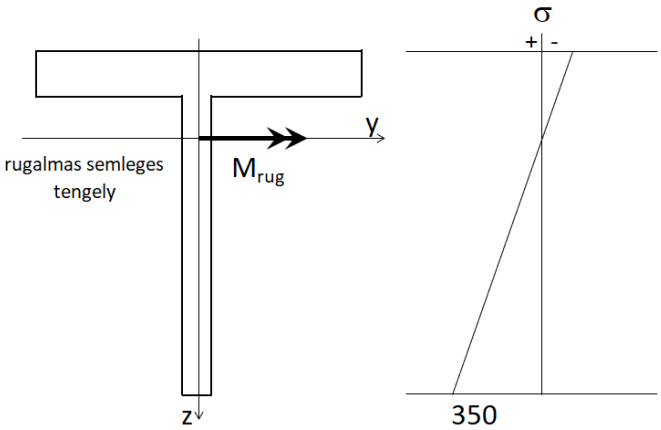
$$\sigma_{max} = \sigma_f$$

$$\frac{M_{rug}}{W^{alsó}{}_y} = \sigma_f$$

$$M_{rug} = W^{alsó}{}_y \cdot \sigma_f$$

$$M_{rug} = 1{,}3294 \cdot 10^5 \cdot 350$$

$$M_{rug} = 46{,}53\ kNm$$



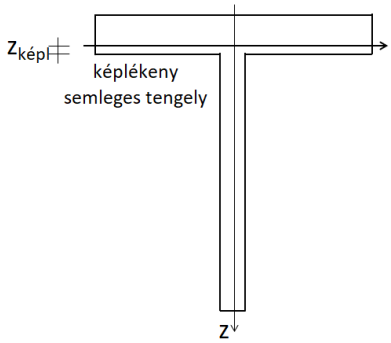
Képlékeny teherbírás meghatározása:

A vetületi egyensúly teljesüléséhez szükséges követelmény, hogy a keresztmetszet húzott és nyomott tartománya területileg azonos legyen képlékeny viselkedés esetén. Tehát a két tartományt elválasztó képlékeny semleges tengely minden esetben területfelező tengely kell, hogy legyen. Ha a hajlítás tengelye szimmetriatengely, akkor a rugalmas és a képlékeny semleges tengely helye is ez lesz, hiszen a szimmetriatengely biztosan felezi a keresztmetszeti területet. Abban az esetben, ha a hajlítás tengelye nem szimmetriatengely, mint jelenleg, akkor a rugalmas és a képlékeny semleges tengely nem esik egybe. A rugalmas semleges tengely mindig súlyponti tengely tiszta hajlítás esetén, a képlékeny semleges tengely pedig eltolódik ehhez képest, hogy a területfelezési feltételt tudja teljesíteni.

- a félterület és a képlékeny semleges tengely helyzete:

$$\frac{A}{2} = \frac{210 \cdot 20 + 10 \cdot 200}{2} = 3100\ mm^2$$

$$z_{képl.} = \frac{3100 - 10 \cdot 200}{210} = 5{,}238\ mm$$



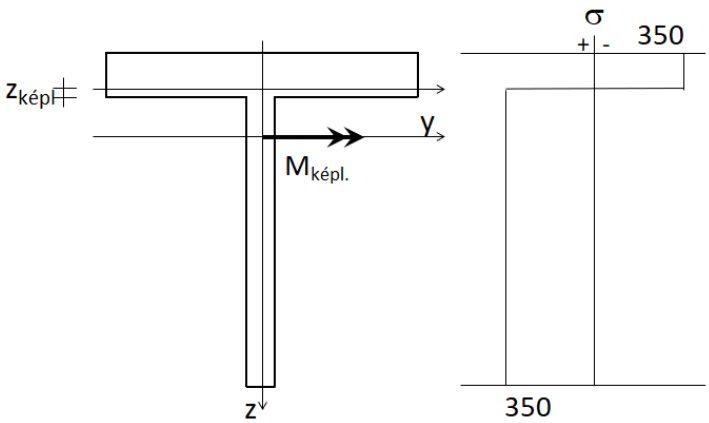
Mivel a borda területe (2000 mm^2) kisebb, mint a félterület, ezért a képlékeny semleges tengely a lemezrészbe fog metszeni. Ellenőrzésképpen meg lehet vizsgálni, hogy a tengely alatti és feletti keresztmetszeti terület azonos.

- félkeresztmetszet statikai nyomatéka az y tengelyre:

$$S'_{y\,fél} = 210 \cdot (20 - 5{,}238) \cdot \left(\frac{20 - 5{,}238}{2} + 5{,}238 + 25{,}48\right) = 1{,}1811 \cdot 10^5\ mm^3$$

- képlékeny teherbírás:

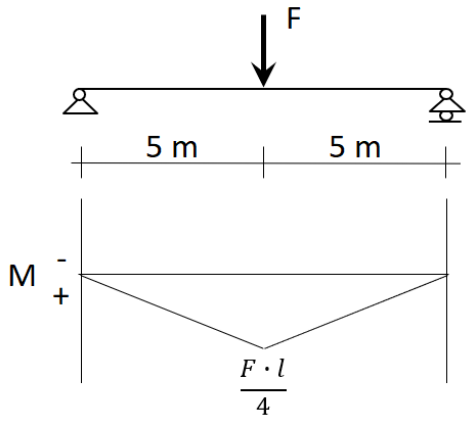
$$M_{képl.} = 2 \cdot S'_{y\,fél} \cdot \sigma_f = 2 \cdot 1{,}1811 \cdot 10^5 \cdot 350 = 82{,}68\ kNm$$



Határozza meg a keresztmetszet képlékeny teherbírási többletét!

$$c = \frac{M_{képl.}}{M_{rug.}} = \frac{82{,}68}{46{,}53} = 1{,}777$$

Határozza meg az alábbi tartón, hogy az F erő mekkora értékénél alakulnak ki a kapott teherbírási értékek!



- F erő a rugalmas teherbírás esetén:

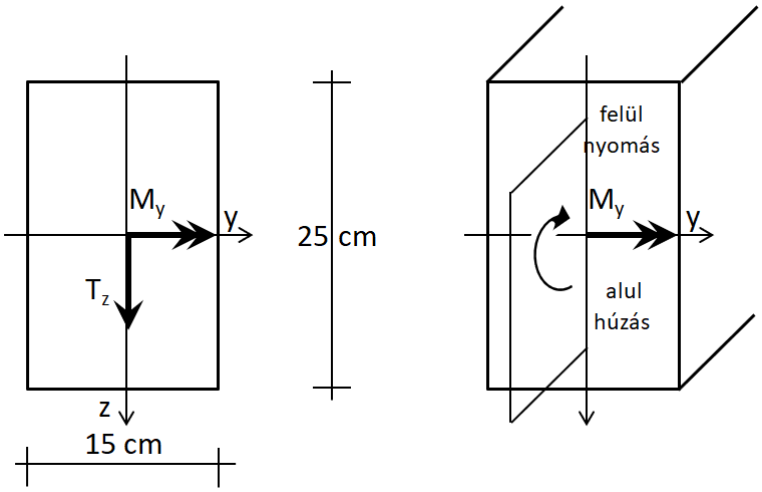
$$F_{rug} = \frac{M_{rug} \cdot 4}{l} = \frac{46{,}53 \cdot 4}{10} = 18{,}61\ kN$$

- F erő a rugalmas teherbírás esetén:

$$F_{képl} = \frac{M_{képl} \cdot 4}{l} = \frac{82{,}68 \cdot 4}{10} = 33{,}07\ kN$$

Mintapéldák hajlítással egyidejű nyírás

1.)



$M_y = 30\ kNm$

$T_z = 20\ kN$

$\sigma_e = 20 \dfrac{N}{mm^2}$

$\tau_e = 1{,}3 \dfrac{N}{mm^2}$

Ellenőrizze a keresztmetszetet hajlításra és nyírásra!

ellenőrzés hajlításra:

- tehetetlenségi nyomaték a hajlítás tengelyére (y):

$$I_y = \frac{150 \cdot 250^3}{12} = 1{,}9531 \cdot 10^8\ mm^4$$

- keresztmetszeti tényező:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{1{,}9531 \cdot 10^8}{125} = 1{,}5625 \cdot 10^6\ mm^3$$

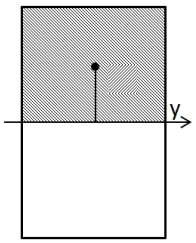
- maximális normálfeszültség ellenőrzése:

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{30 \cdot 10^6}{1{,}5625 \cdot 10^6} = 19{,}2\ \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_e = 20 \frac{N}{mm^2}$$

megfelel

ellenőrzés nyírásra:

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a maximális nyírófeszültség magasságában:



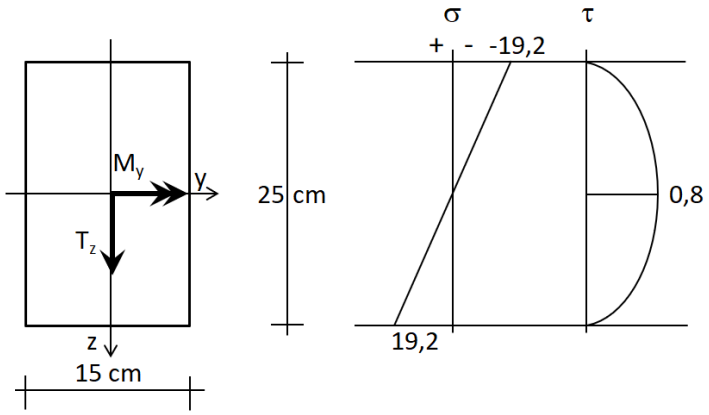
$$S'_y = 150 \cdot 125 \cdot \frac{125}{2} = 1{,}17188 \cdot 10^6\ mm^3$$

- maximális nyírófeszültség ellenőrzése:

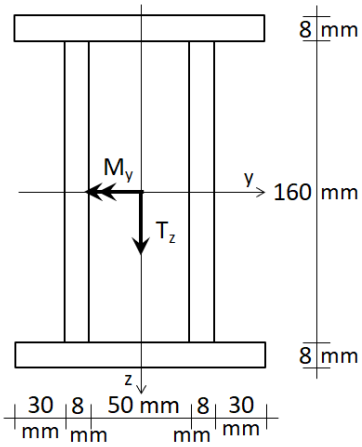
$$\tau_{max} = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{1{,}17188 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^3}{1{,}9531 \cdot 10^8 \cdot 150} = 0{,}80\ \frac{N}{mm^2} < \tau_e = 1{,}3 \frac{N}{mm^2}$$

megfelel

normál- és nyírófeszültségek eloszlása a km.-ben:



2.)



$$M_y = 50\ kNm$$

$$T_z = 30\ kN$$

$$\sigma_e = 235 \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_e = 140 \frac{N}{mm^2}$$

Ellenőrizze a keresztmetszetet hajlításra és nyírásra!

ellenőrzés hajlításra:

- tehetetlenségi nyomaték a hajlítás tengelyére (y):

$$I_y = \frac{126 \cdot 176^3}{12} - \frac{110 \cdot 160^3}{12} = 1{,}9697 \cdot 10^7\ mm^4$$

- keresztmetszeti tényező:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{1{,}9697 \cdot 10^7}{88} = 2{,}2383 \cdot 10^5 mm^3$$

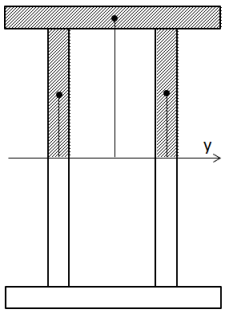
- maximális normálfeszültség ellenőrzése:

$$\sigma_{max} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{50 \cdot 10^6}{2{,}2383 \cdot 10^5} = 223{,}38\ \frac{N}{mm^2} \ < \ \sigma_e = 235 \frac{N}{mm^2}$$

$$megfelel$$

ellenőrzés nyírásra:

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a maximális nyírófeszültség magasságában:



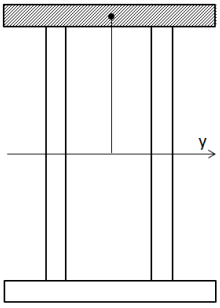
$$S'_y = 126 \cdot 8 \cdot 84 + 2 \cdot 8 \cdot 80 \cdot 40 = 1{,}3587 \cdot 10^5\ mm^3$$

- maximális nyírófeszültség ellenőrzése:

$$\tau_{max} = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{1{,}3587 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 10^3}{1{,}9697 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 8} = 12{,}93\ \frac{N}{mm^2} < \tau_e = 140 \frac{N}{mm^2}$$

megfelel

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a gerinc és az öv találkozásánál kialakuló nyírófeszültség magasságában:



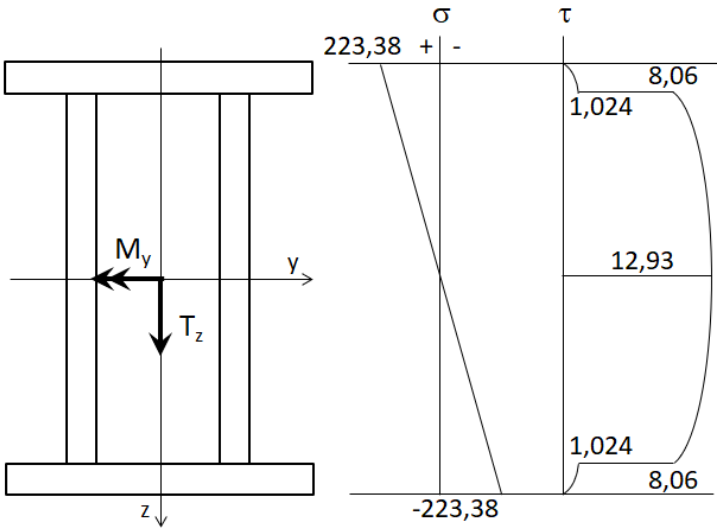
$$S'_y = 126 \cdot 8 \cdot 84 = 8{,}4672 \cdot 10^4\ mm^3$$

- nyírófeszültség a gerinc és az öv találkozásánál:

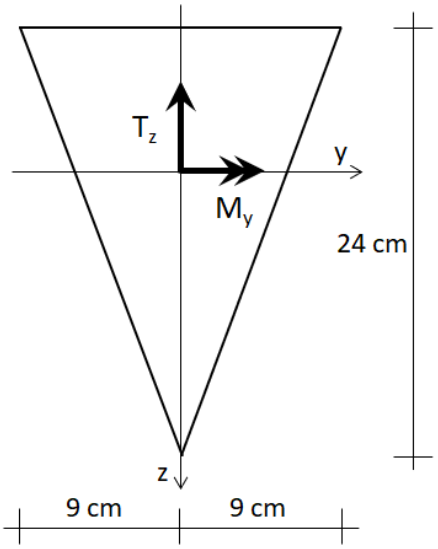
$$\tau_1 = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{8{,}4672 \cdot 10^4 \cdot 30 \cdot 10^3}{1{,}9697 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 8} = 8{,}060\ \frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_2 = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{8{,}4672 \cdot 10^4 \cdot 30 \cdot 10^3}{1{,}9697 \cdot 10^7 \cdot 126} = 1{,}024 \frac{N}{mm^2}$$

normál- és nyírófeszültségek eloszlása a km.-ben:



3.)



$M_y = 12\ kNm$

$T_z = 10\ kN$

$\sigma_e = 30 \frac{N}{mm^2}$

$\tau_e = 2{,}2 \frac{N}{mm^2}$

Ellenőrizze a keresztmetszetet hajlításra és nyírásra!

ellenőrzés hajlításra:

- tehetetlenségi nyomaték a hajlítás tengelyére (y):

$$\mathrm{I_y} = \frac{180 \cdot 240^3}{36} = 6{,}912 \cdot 10^7 mm^4$$

- keresztmetszeti tényezők:

$$\mathrm{W^{alsó}{}_y} = \frac{\mathrm{I_y}}{\mathrm{z_{alsó}}} = \frac{6{,}912 \cdot 10^7}{160} = 4{,}32 \cdot 10^5 mm^3$$

$$\mathrm{W^{felső}{}_y} = \frac{\mathrm{I_y}}{\mathrm{z_{felső}}} = \frac{6{,}912 \cdot 10^7}{80} = 8{,}64 \cdot 10^5 mm^3$$

- maximális normálfeszültségek ellenőrzése:

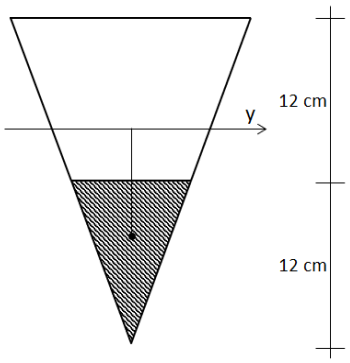
$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max}{}^{+} = \frac{\mathrm{M_y}}{\mathrm{W^{alsó}{}_y}} = \frac{12 \cdot 10^6}{4{,}32 \cdot 10^5} = 27{,}78\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} < \sigma_e = 30 \frac{N}{mm^2} \quad megfelel$$

$$\sigma_{\max}{}^{-} = \frac{\mathrm{M_y}}{\mathrm{W^{felső}{}_y}} = \frac{12 \cdot 10^6}{8{,}64 \cdot 10^5} = -13{,}89\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$$

ellenőrzés nyírásra:

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a maximális nyírófeszültség magasságában:

$$S'_y = 90 \cdot 120 \cdot 80 = 8{,}64 \cdot 10^5\ mm^3$$



- maximális nyírófeszültség függőleges (z) irányban:

$$\tau_{xz,max} = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{8{,}64 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^3}{6{,}912 \cdot 10^7 \cdot 90} = 1{,}389\ \frac{N}{mm^2}$$

- maximális nyírófeszültség vízszintes (y) irányban:

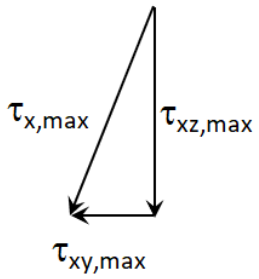
$$\frac{4{,}5}{12} = \frac{\tau_{xy,max}}{\tau_{xz,max}} \quad \rightarrow \quad \tau_{xy,max} = \frac{4{,}5}{12} \cdot \tau_{xz,max} = \frac{4{,}5}{12} \cdot 1{,}389 = 0{,}521 \frac{N}{mm^2}$$

- maximális nyírófeszültség a függőleges és a vízszintes komponensek összegzéséből és annak ellenőrzése:

$$\tau_{x,max} = \sqrt{\tau_{xz,max}{}^2 + \tau_{xy,max}{}^2} = \sqrt{1{,}389^2 + 0{,}521^2} =$$

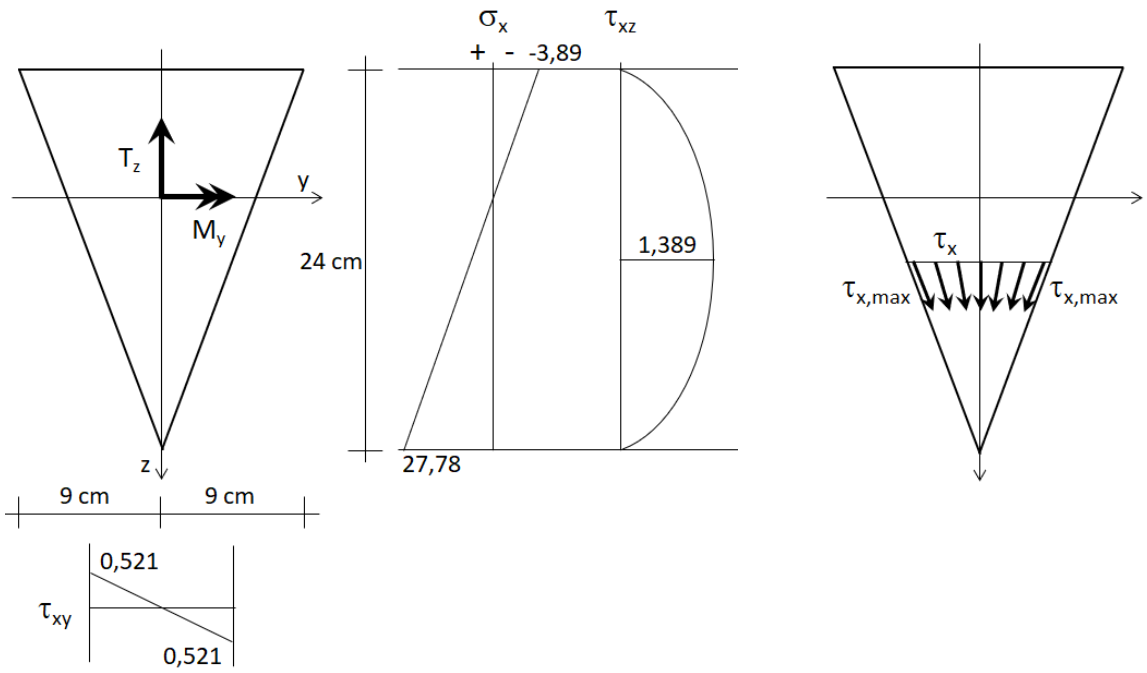
$$= 1{,}483 \frac{N}{mm^2} < \tau_e = 2{,}2 \frac{N}{mm^2}$$

megfelel

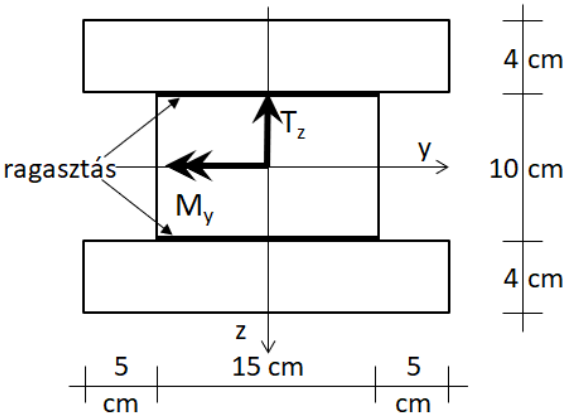


A maximális nyírófeszültség a keresztmetszet magasságának a felében (kivételesen nem a súlypont magasságában) alakul ki a keresztmetszet szélein. Az itt ébredő feszültség a keresztmetszet oldalélével párhuzamosan jön létre, aminek megfelelően a maximális nyírófeszültségi komponensek vektoriális összegzéséből számítható a maximális érték.

normál- és nyírófeszültségek eloszlása a km.-ben:



4.)



$M_y = 28\ kNm$

$T_z = 22\ kN$

$\sigma_e = 24 \frac{N}{mm^2}$

$\tau_e = 1{,}5 \frac{N}{mm^2}$

$\tau_{e,ragasztó} = 1{,}2 \frac{N}{mm^2}$

Ellenőrizze a keresztmetszetet hajlításra és nyírásra!

ellenőrzés hajlításra:

- tehetetlenségi nyomaték a hajlítás tengelyére (y):

$$\mathrm{I_y} = \frac{250 \cdot 180^3}{12} - \frac{100 \cdot 100^3}{12} = 1{,}1317 \cdot 10^8\ mm^4$$

- keresztmetszeti tényező:

$$\mathrm{W_y} = \frac{\mathrm{I_y}}{\mathrm{z_{max}}} = \frac{1{,}1317 \cdot 10^8}{90} = 1{,}2574 \cdot 10^6\ mm^3$$

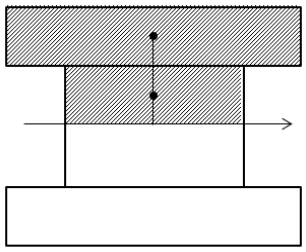
- maximális normálfeszültségek ellenőrzése:

$$\sigma_{\max} = \frac{\mathrm{M_y}}{\mathrm{W_y}} = \frac{28 \cdot 10^6}{1{,}2574 \cdot 10^6} = 22{,}27\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} < \sigma_\mathrm{e} = 24 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} \qquad \text{megfelel}$$

ellenőrzés nyírásra:

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka az alapanyag maximális nyírófeszültségének magasságában:

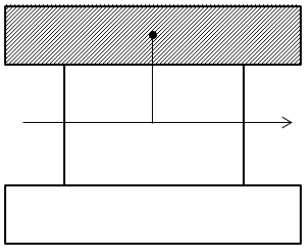
$$S'_y = 250 \cdot 40 \cdot 70 + 150 \cdot 50 \cdot 25 = 8{,}875 \cdot 10^5\ mm^3$$



- maximális nyírófeszültség az alapanyagban:

$$\tau_{max} = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{8{,}875 \cdot 10^5 \cdot 22 \cdot 10^3}{1{,}1317 \cdot 10^8 \cdot 150} = 1{,}150 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} < \tau_\mathrm{e} = 1{,}5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}$$

megfelel



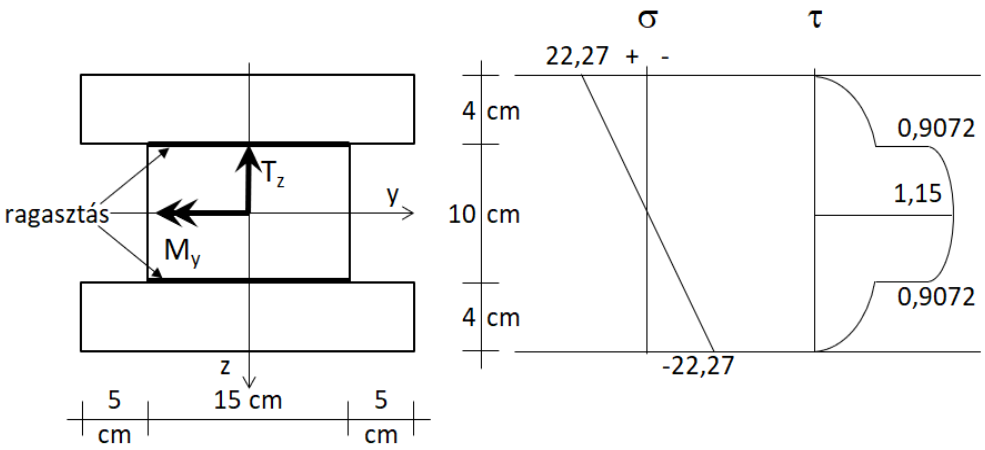
- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a ragasztó maximális nyírófeszültségének magasságában:

$$S'_y = 250 \cdot 40 \cdot 70 = 7{,}0 \cdot 10^5\ mm^3$$

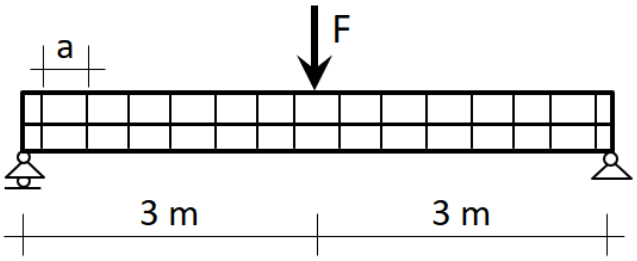
- maximális nyírófeszültség a ragasztóban:

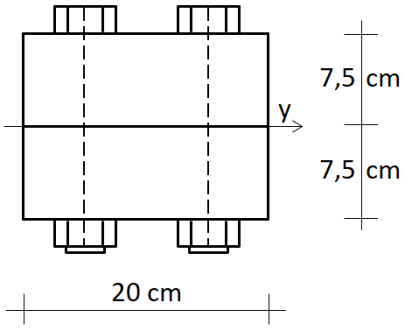
$$\tau_{rag.} = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{7{,}0 \cdot 10^5 \cdot 22 \cdot 10^3}{1{,}1317 \cdot 10^8 \cdot 150} = 0{,}9072\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} < \tau_{\mathrm{e,rag.}} = 1{,}2\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}} \quad \text{megfelel}$$

normál- és nyírófeszültségek eloszlása a km.-ben:



5.)

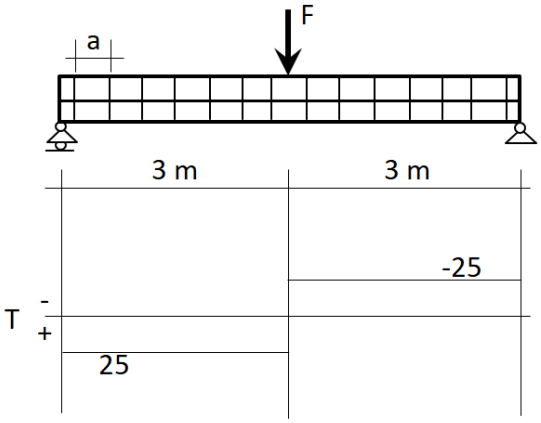




F=50 kN; H_e=45 kN; a=30 cm

Ellenőrizze a csavarozott kapcsolatot nyírásra!

nyíróerő ábra meghatározása:



$T_{z,max}$=25 kN

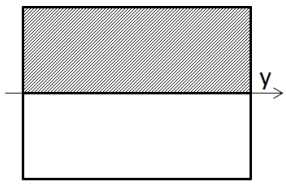
ellenőrzés a nyíróerő hatására kialakuló csúsztatóerőre:

- tehetetlenségi nyomaték az y tengelyre :

$$I_y = \frac{200 \cdot 150^3}{12} = 5{,}625 \cdot 10^7 mm^4$$

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a két elem határolófelületének magasságában:

$$S'_y = 200 \cdot 75 \cdot \frac{75}{2} = 5{,}625 \cdot 10^5\ mm^3$$



- a fajlagos (egységnyi hosszúságra vonatkozó) csúsztatóerő (vízszintes nyíróerő):

$$h = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y} = \frac{5{,}625 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^3}{5{,}625 \cdot 10^7} = 250 \frac{N}{mm}$$

- a csúsztatóerő az „a” hossz mentén:

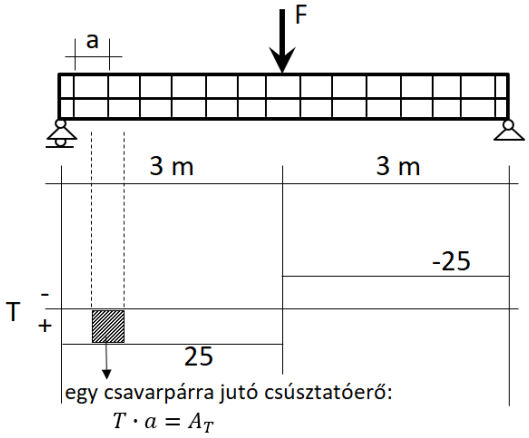
$$H = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y} \cdot a = \frac{5{,}625 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^3}{5{,}625 \cdot 10^7} \cdot 300 = 75\ \text{kN}$$

- a csavarokra megengedett csúsztatóerő értéke:

$$2 \cdot H_e = 2 \cdot 45 = 90\ kN \quad (két\ csavar)$$

- ellenőrzés:

$$H = 75\ kN < 2 \cdot H_e = 90\ kN \quad megfelel$$

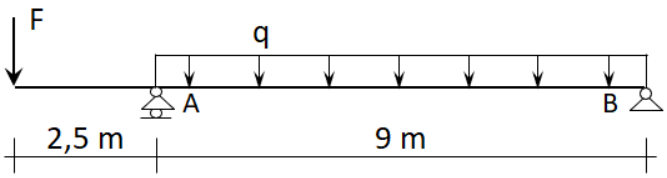


Határozza meg, hogy mekkora lehet „a” értéke, ha csak egy csavar köti össze a két elemet!

$$H = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y} \cdot a = \frac{5{,}625 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^3}{5{,}625 \cdot 10^7} \cdot a \leq H_e = 45\ kN$$

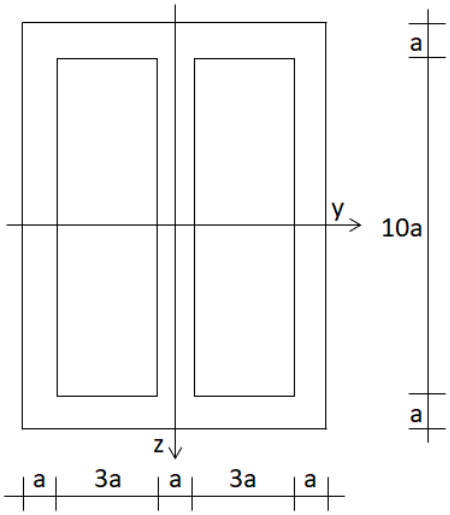
$$a_{max} = \frac{5{,}625 \cdot 10^7}{5{,}625 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^3} \cdot 45 \cdot 10^3 = 180\ mm$$

6.)



F= 90 kN; q= 20 kN/m

$\sigma_e = 40 \frac{N}{mm^2}$; $\tau_e = 5{,}0 \frac{N}{mm^2}$



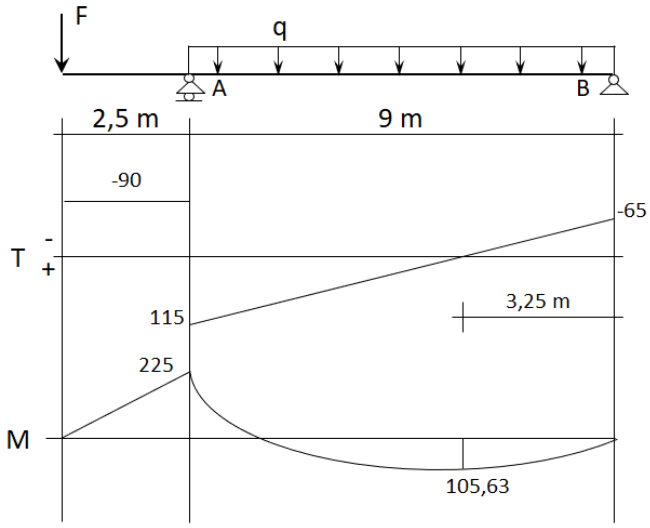
Méretezze a tartót hajlításra, valamint ellenőrizze hajlításra és nyírásra!

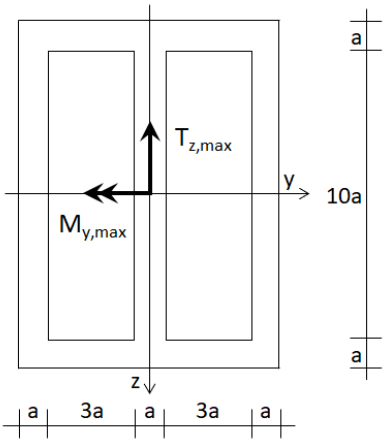
mértékadó igénybevételek meghatározása:

- A részletek mellőzésével megrajzolt igénybevételi ábrákból leolvasva:

  $T_{z,max}$=115 kN

  $M_{y,max}$=225 kNm (felül húzó nyomaték, mivel az ábrában felülre van mérve a kiindulási vonalhoz képest.)





A balra mutató nyomatékvektor felül húzást, alul nyomást fejt ki a km.-ben, amely így megfelel a maximális nyomaték előzőekben megállapított működésének.

méretezés hajlításra:

- tehetetlenségi nyomaték a hajlítás tengelyére (y):

$$I_y = \frac{9a \cdot (12a)^3}{12} - \frac{6a \cdot (10a)^3}{12} = 796a^4$$

- keresztmetszeti tényező:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{796a^4}{6a} = 132{,}67a^3$$

- maximális normálfeszültségre történő méretezés:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{225 \cdot 10^6}{132{,}67a^3} \leq \sigma_e = 40\frac{N}{mm^2}$$

$$a_{szüks} = \sqrt[3]{\frac{225 \cdot 10^6}{132{,}67 \cdot 40}} = 34{,}87\ mm$$

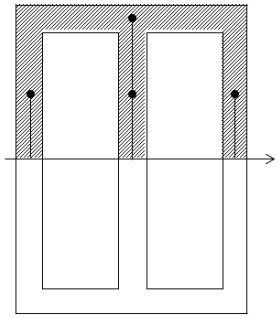
$$a_{alk} = 35\ mm\ \ (5\ mm - re\ kerekítve)$$

ellenőrzés hajlításra:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{225 \cdot 10^6}{132{,}67 \cdot 35^3} = 39{,}56\ \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_e = 40\frac{N}{mm^2} \qquad \text{megfelel}$$

ellenőrzés nyírásra:

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a maximális nyírófeszültség magasságában:



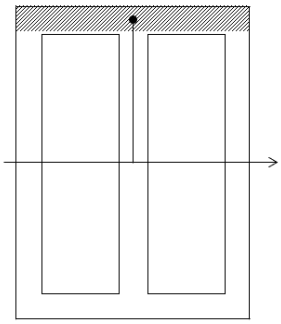
$$S'_y = 9 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 5{,}5 \cdot 35 + 3 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 35 \cdot 2{,}5 \cdot 35 =$$
$$= 3{,}7301 \cdot 10^6\ mm^3$$

- maximális nyírófeszültség az alapanyagban:

$$\tau_{max} = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{3{,}7301 \cdot 10^6 \cdot 115 \cdot 10^3}{796 \cdot 35^4 \cdot 3 \cdot 35} = 3{,}420\frac{N}{mm^2} < \tau = 5\frac{N}{mm^2}$$

megfelel

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a gerinc és az öv találkozásánál kialakuló nyírófeszültség magasságában:



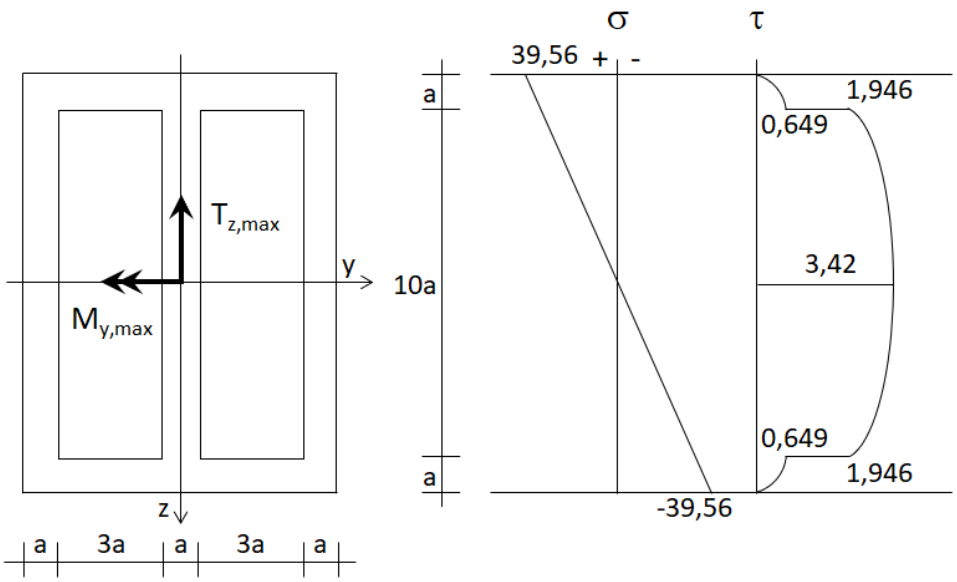
$$S'_y = 9 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 5{,}5 \cdot 35 = 2{,}1223 \cdot 10^6\ mm^3$$

- nyírófeszültségek a gerinc és az öv találkozásánál:

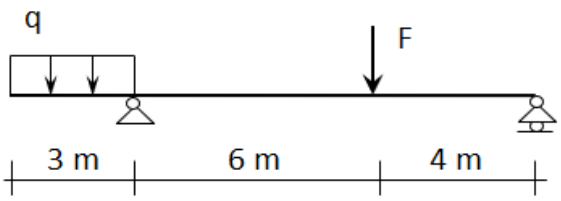
$$\tau_1 = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{2{,}1223 \cdot 10^6 \cdot 115 \cdot 10^3}{796 \cdot 35^4 \cdot 3 \cdot 35} = 1{,}946\ \frac{N}{mm^2}$$

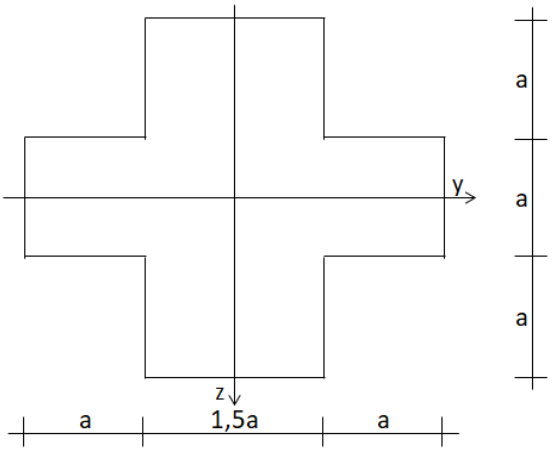
$$\tau_2 = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{2{,}1223 \cdot 10^6 \cdot 115 \cdot 10^3}{796 \cdot 35^4 \cdot 9 \cdot 35} = 0{,}649\ \frac{N}{mm^2}$$

normál- és nyírófeszültségek eloszlása a km.-ben:



7.)





q=30 kN/m; F=120 kN

$\sigma_e = 50\frac{N}{mm^2}$; $\tau_e = 7{,}0\frac{N}{mm^2}$

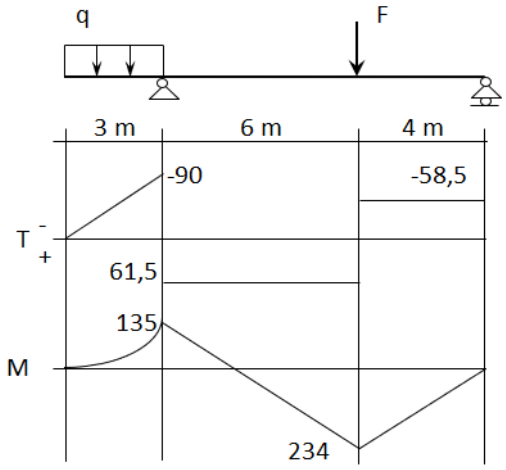
Méretezze a tartót hajlításra, valamint ellenőrizze hajlításra és nyírásra!

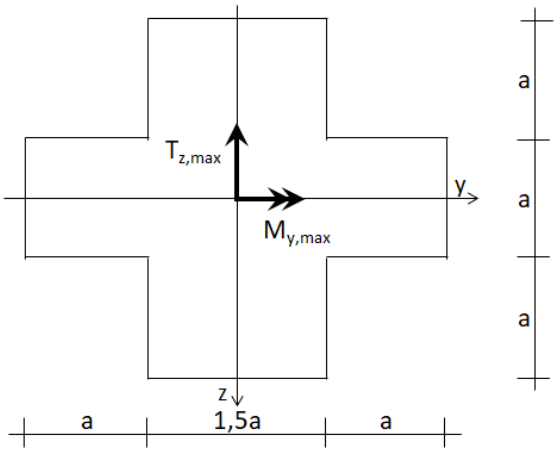
mértékadó igénybevételek meghatározása:

- A részletek mellőzésével megrajzolt igénybevételi ábrákból leolvasva:

  $T_{z,max}$=-90 kN

  $M_{y,max}$=234 kNm (alul húzó nyomaték, mivel az ábrában alulra van mérve a kiindulási vonalhoz képest.)





A jobbra mutató nyomatékvektor alul húzást, felül nyomást fejt ki a km.-ben, amely így megfelel a maximális nyomaték előzőekben megállapított működésének.

méretezés hajlításra:

- tehetetlenségi nyomaték a hajlítás tengelyére (y):

$$I_y = \frac{2a \cdot a^3}{12} - \frac{1{,}5a \cdot (3a)^3}{12} = 3{,}5417a^4$$

- keresztmetszeti tényező:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{3{,}5417a^4}{1{,}5a} = 2{,}3611a^3$$

- maximális normálfeszültségre történő méretezés:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{234 \cdot 10^6}{2{,}3611a^3} \leq \sigma_e = 50\frac{N}{mm^2}$$

$$a_{szüks} = \sqrt[3]{\frac{234 \cdot 10^6}{2{,}3611 \cdot 50}} = 125{,}62 \text{ mm}$$

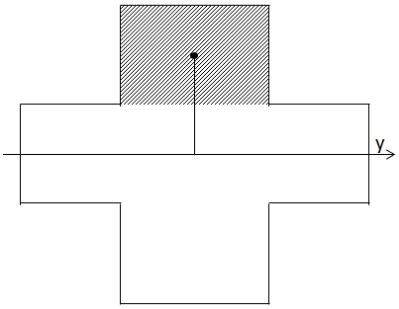
$$a_{alk} = 130 \text{ mm } (10 \text{ mm} - \text{re kerekítve})$$

ellenőrzés hajlításra:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{y,max}}{W_y} = \frac{234 \cdot 10^6}{2{,}3611 \cdot 130^3} = 45{,}11 \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_e = 50\frac{N}{mm^2} \qquad \text{megfelel}$$

ellenőrzés nyírásra:

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a maximális nyírófeszültség magasságában:



$$S'_y = 1{,}5 \cdot 130 \cdot 130 \cdot 130 = 3{,}2955 \cdot 10^6\ mm^3$$

- maximális nyírófeszültség:

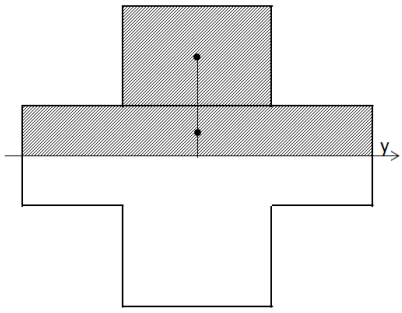
$$\tau_{max} = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{3{,}2955 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10^3}{3{,}5417 \cdot 130^4 \cdot 1{,}5 \cdot 130} = 1{,}504\frac{N}{mm^2} < \tau_e = 7\frac{N}{mm^2}$$

megfelel

$$\tau_1 = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{3{,}2955 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10^3}{3{,}5417 \cdot 130^4 \cdot 3{,}5 \cdot 130} = 0{,}6444\frac{N}{mm^2}$$

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a súlypont magasságában:

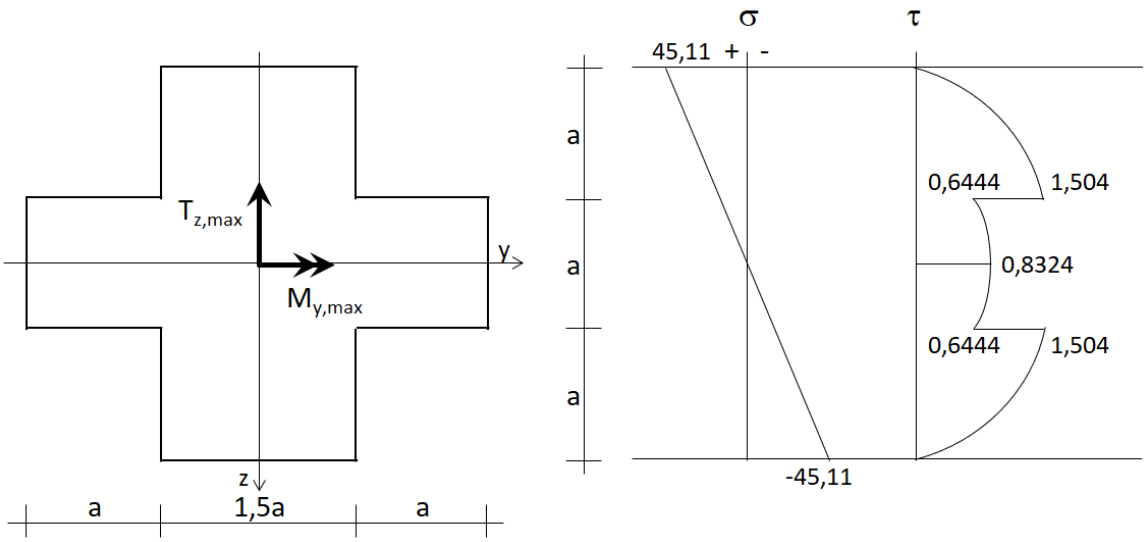
$$S'_y = 1{,}5 \cdot 130 \cdot 130 \cdot 130 + 3{,}5 \cdot 130 \cdot 0{,}5 \cdot 130 \cdot 0{,}25 \cdot 130 = \\ = 4{,}2567 \cdot 10^6\ mm^3$$



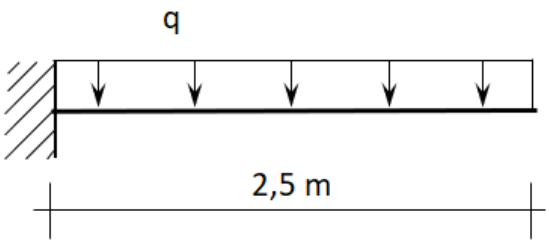
- nyírófeszültség a súlypont magasságában:

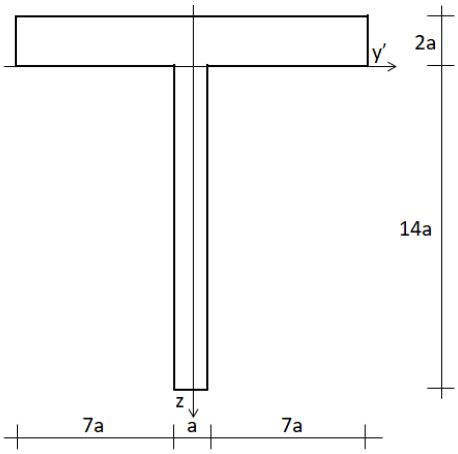
$$\tau_2 = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{4{,}2567 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10^3}{3{,}5417 \cdot 130^4 \cdot 3{,}5 \cdot 130} = 0{,}8324\ \frac{N}{mm^2}$$

normál- és nyírófeszültségek eloszlása a km.-ben:



8.)





q=15 kN/m

$\sigma_e = 275\frac{N}{mm^2}$; $\tau_e = 160\frac{N}{mm^2}$

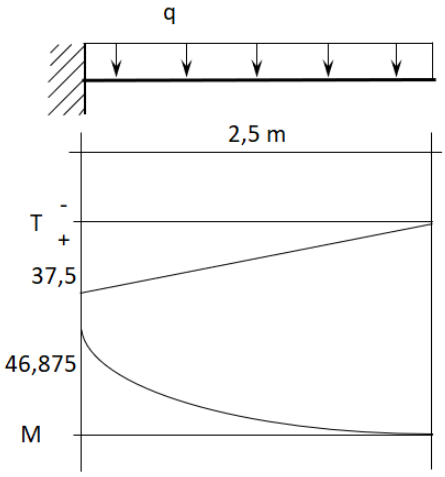
Méretezze a tartót hajlításra, valamint ellenőrizze hajlításra és nyírásra!

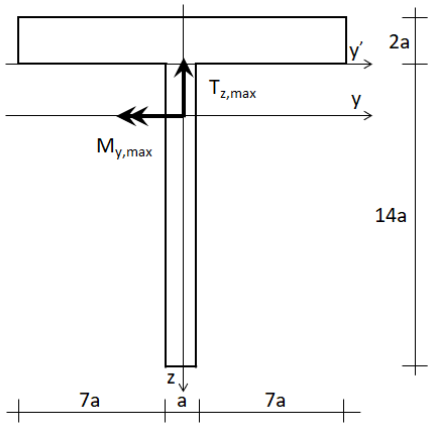
mértékadó igénybevételek meghatározása:

- A részletek mellőzésével megrajzolt igénybevételi ábrákból leolvasva:

  $T_{z,max}$=37,5 kN

  $M_{y,max}$=46,875 kNm (felül húzó nyomaték, mivel az ábrában felülre van mérve a kiindulási vonalhoz képest.)





A balra mutató nyomatékvektor felül húzást, alul nyomást fejt ki a km.-ben, amely így megfelel a maximális nyomaték előzőekben megállapított működésének.

méretezés hajlításra:

- a súlypont z_s koordinátája az y' tengelyhez képest:

$$z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{-15a \cdot 2a \cdot a + a \cdot 14a \cdot 7a}{15a \cdot 2a + a \cdot 14a} = 1{,}5455a$$

- tehetetlenségi nyomaték a hajlítás tengelyére (y):

$$\mathrm{I_y} = \frac{15a \cdot (2a)^3}{3} - \frac{a \cdot (14a)^3}{3} = 954{,}67a^4$$

- keresztmetszeti tényezők:

$$\mathrm{W}^{alsó}{}_{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{I_y}}{\mathrm{z_{alsó}}} = \frac{954{,}67a^4}{14a - 1{,}5455a} = 76{,}653a^3$$

$$\mathrm{W}^{felső}{}_{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{I_y}}{\mathrm{z_{felső}}} = \frac{954{,}67a^4}{2a + 1{,}5455a} = 269{,}26a^3$$

- maximális normálfeszültségre történő méretezés:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max}{}^{-} = \left|\frac{\mathrm{M_{y,max}}}{\mathrm{W}^{alsó}{}_{\mathrm{y}}}\right| = \left|-\frac{46{,}875 \cdot 10^6}{76{,}653a^3}\right| \leq \sigma_{\mathrm{e}}$$
$$= 275\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\mathrm{a_{szüks}} = \sqrt[3]{\frac{46{,}875 \cdot 10^6}{76{,}653 \cdot 275}} = 13{,}05\ \mathrm{mm}$$

$$\mathrm{a_{alk}} = 15\ \mathrm{mm}\ \ (5\ \mathrm{mm} - \mathrm{re\ kerekítve})$$

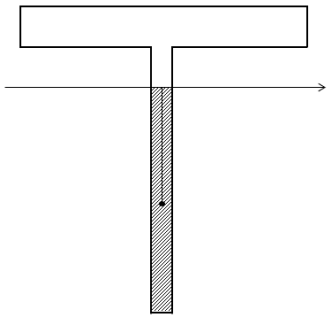
ellenőrzés hajlításra:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max}{}^{-} = \left|\frac{\mathrm{M_{y,max}}}{\mathrm{W^{alsó}{}_y}}\right| = \left|-\frac{46{,}875 \cdot 10^6}{76{,}653 \cdot 15^3}\right| = |-181{,}19|\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} < \sigma_{\mathrm{e}}$$
$$= 275\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\ \mathrm{megfelel}$$

$$\sigma_{\max}{}^{+} = \frac{\mathrm{M_y}}{\mathrm{W^{felső}{}_y}} = \frac{46{,}875 \cdot 10^6}{269{,}26 \cdot 15^3} = 51{,}58\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

ellenőrzés nyírásra:

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a maximális nyírófeszültség magasságában:



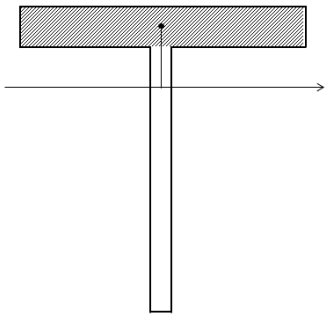
$$S'_y = (14 - 1{,}5455) \cdot 15 \cdot 15 \cdot \frac{(14-1{,}5455)\cdot 15}{2} = 2{,}6176 \cdot 10^5\ mm^3$$

- maximális nyírófeszültség:

$$\tau_{max} = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{2{,}6176\cdot 10^5 \cdot 37{,}5\cdot 10^3}{954{,}67\cdot 15^4 \cdot 15} = 13{,}54\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} < \tau_e = 160\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

megfelel

- az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka a gerinc és az öv találkozásánál kialakuló nyírófeszültségek magasságában:



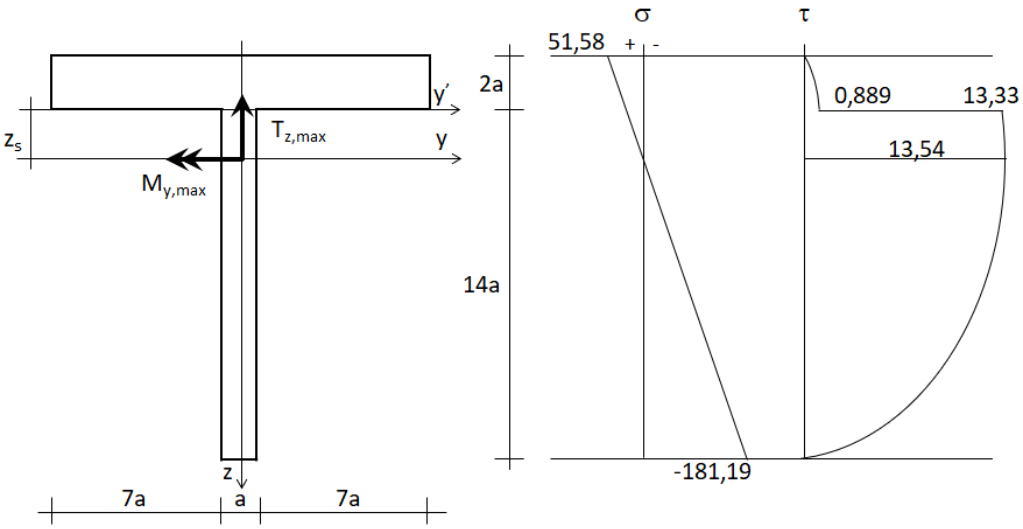
$$S'_y = 15 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 15 \cdot (15 + 1{,}5455 \cdot 15) = 2{,}5773 \cdot 10^5\ mm^3$$

- nyírófeszültségek a gerinc és az öv találkozásánál:

$$\tau_1 = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{2{,}5773 \cdot 10^5 \cdot 37{,}5 \cdot 10^3}{954{,}67 \cdot 15^4 \cdot 15} = 13{,}33\ \frac{N}{mm^2}$$

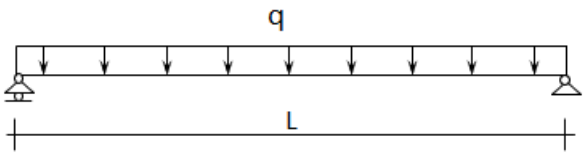
$$\tau_2 = \frac{S'_y \cdot T_z}{I_y \cdot b} = \frac{2{,}5773 \cdot 10^5 \cdot 37{,}5 \cdot 10^3}{954{,}67 \cdot 15^4 \cdot 15 \cdot 15} = 0{,}889\,\frac{N}{mm^2}$$

normál- és nyírófeszültségek eloszlása a km.-ben:



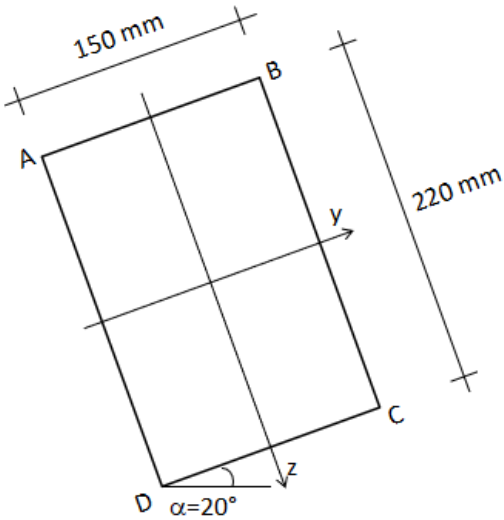
Mintapéldák ferde hajlítás

1.)



q=6 kN/m

L=7,0 m

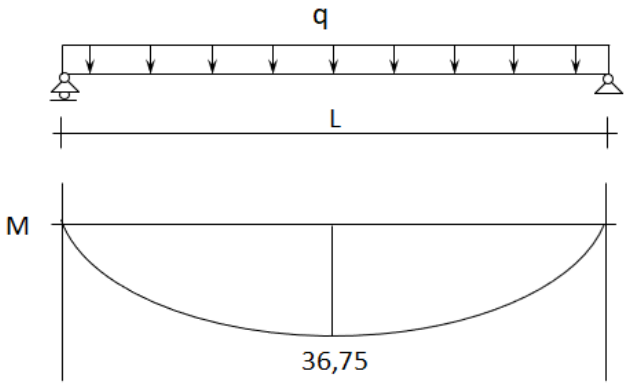


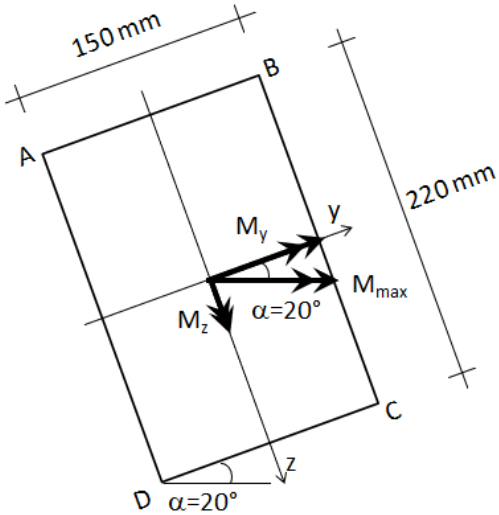
Határozza meg a km. sarokponti feszültségeit!

mértékadó igénybevételek meghatározása:

- A részletek mellőzésével megrajzolt igénybevételi ábrából leolvasva:

  M_{max}=36,75 kNm (alul húzó nyomaték, mivel az ábrában alulra van mérve a kiindulási vonalhoz képest.)





A jobbra mutató M_{max} nyomatékvektor alul húzást, felül nyomást fejt ki a km.-ben, amely így megfelel a maximális nyomaték előzőekben megállapított működésének. A nyomatékvektor viszont nem esik egy egyenesbe egyik km-i főiránnyal (y és z, mivel szimmetriatengelyek) sem. Ezért a km. igénybevétele ferde hajlítás. A ferdén hajlító nyomaték vektorát a főirányokba (y és z) eső komponenseire bontjuk. Az így kapott nyomatékok már egyenes hajlításként üzemelnek, a km. feszültségeit ennek megfelelően a két egyenes hajlítás egymásra halmozásával (szuperpozíciójával) állítjuk elő:

$$\sigma = \pm\frac{M_y}{I_y}z \pm \frac{M_z}{I_z}y$$

- a főirányokba eső (így egyenesen hajlító) nyomatéki komponensek:

$$M_y = M_1 = M_{max} \cdot \cos 20° = 36{,}75 \cdot \cos 20° = 34{,}53\ kNm$$

$$M_z = M_2 = M_{max} \cdot \sin 20° = 36{,}75 \cdot \sin 20° = 12{,}57\ kNm$$

sarokponti feszültségek meghatározása:

- km. főinercianyomatékai (a szimmetriatengely mindig főinercia tengely):

$$I_y = \frac{150 \cdot 220^3}{12} = 1{,}331 \cdot 10^8 mm^4 = I_1$$

$$I_z = \frac{220 \cdot 150^3}{12} = 6{,}1875 \cdot 10^7 mm^4 = I_2$$

- sarokponti feszültségek:

$$\sigma_A = -\frac{M_y}{I_y} z_A + \frac{M_z}{I_z} y_A = -\frac{34{,}53 \cdot 10^6}{1{,}331 \cdot 10^8} 110 + \frac{12{,}57 \cdot 10^6}{6{,}1875 \cdot 10^7} 75 = -28{,}54 + 15{,}24 = -13{,}3 \frac{N}{mm^2}$$

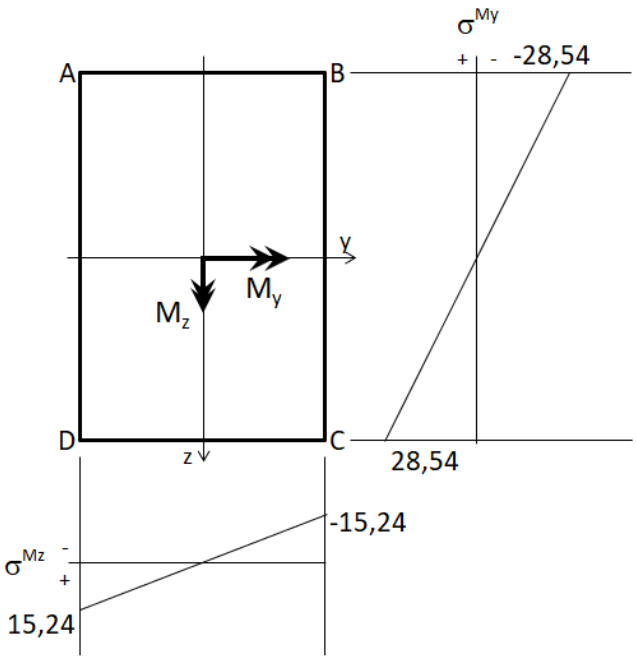
$$\sigma_B = -\frac{M_y}{I_y} z_B - \frac{M_z}{I_z} y_B = -\frac{34{,}53 \cdot 10^6}{1{,}331 \cdot 10^8} 110 - \frac{12{,}57 \cdot 10^6}{6{,}1875 \cdot 10^7} 75 = -28{,}54 - 15{,}24 = -43{,}78 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_C = \frac{M_y}{I_y} z_C - \frac{M_z}{I_z} y_C = \frac{34{,}53 \cdot 10^6}{1{,}331 \cdot 10^8} 110 - \frac{12{,}57 \cdot 10^6}{6{,}1875 \cdot 10^7} 75 = 28{,}54 - 15{,}24 = 13{,}3 \frac{N}{mm^2}$$

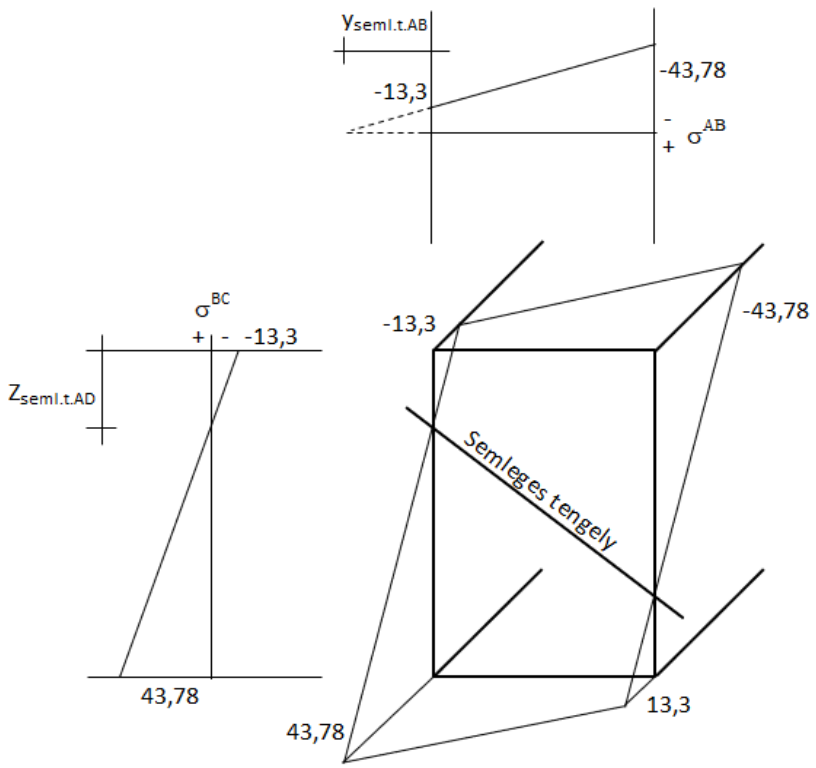
$$\sigma_D = \frac{M_y}{I_y} z_D + \frac{M_z}{I_z} y_D = \frac{34{,}53 \cdot 10^6}{1{,}331 \cdot 10^8} 110 + \frac{12{,}57 \cdot 10^6}{6{,}1875 \cdot 10^7} 75 = 28{,}54 + 15{,}24 = 43{,}78 \frac{N}{mm^2}$$

Ábrázolja a feszültségeloszlást a keresztmetszetben, majd határozza meg a semleges tengely metszéspontjait a AB és AD oldalakkal!

- feszültségeloszlás igénybevételenként:



- feszültségi test (km. feszültségeloszlásának térbeli ábrázolása):



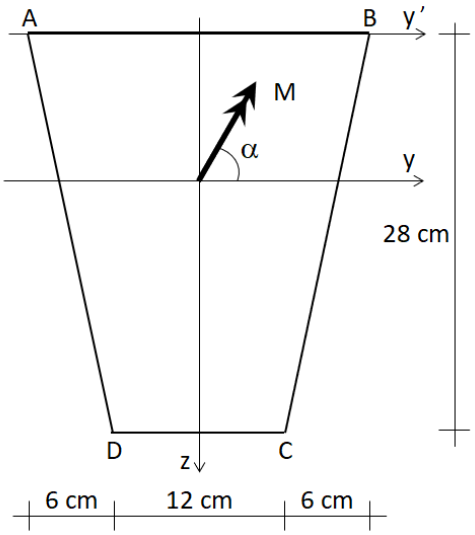
- semleges tengely helyzete a feszültségi test oldalvetületei alapján:

$$\frac{15}{(43{,}78-13{,}3)}=\frac{y_{seml.t.AB}}{13{,}3} \quad \rightarrow y_{seml.t.CD}=6{,}545\ cm$$

$$\frac{22}{(43{,}78+13{,}3)}=\frac{z_{seml.t.BC}}{13{,}3} \quad \rightarrow z_{seml.t.BC}=5{,}126\ cm$$

Ferde hajlításnál a semleges tengely minden esetben áthalad a km. súlypontján.

2.)

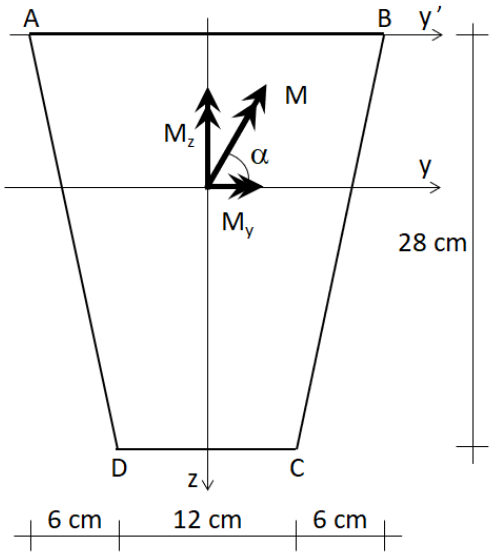


M=20 kNm

α=60°

$\sigma_e = 22\frac{N}{mm^2}$

Határozza meg a km. sarokponti feszültségeit és ellenőrizze a km-t!



A nyomatékvektor nem esik egy egyenesbe egyik km-i főiránnyal (y és z, mivel egyik szimmetriatengely) sem. Ezért a km. igénybevétele ferde hajlítás. A ferdén hajlító nyomaték vektorát a főirányokba (y és z) eső komponenseire bontjuk. Az így kapott nyomatékok már egyenes hajlításként üzemelnek, a km. feszültségeit ennek megfelelően a két egyenes hajlítás egymásra halmozásával (szuperpozíciójával) állítjuk elő:

$$\sigma = \pm\frac{M_y}{I_y}z \pm \frac{M_z}{I_z}y$$

- a főirányokba eső (így egyenesen hajlító) nyomatéki komponensek:

$$M_y = M_1 = M \cdot \cos\alpha = 20 \cdot \cos 60° = 10\ kNm$$

$$M_z = M_2 = M \cdot \sin\alpha = 20 \cdot \sin 60° = 17{,}32\ kNm$$

sarokponti feszültségek meghatározása:

- km. területe:

$$A = 2 \cdot \frac{60 \cdot 280}{2} + 120 \cdot 280 = 5{,}04 \cdot 10^4\ mm^2$$

- km. súlypontja:

$$z_s = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{2 \cdot \frac{60 \cdot 280}{2} \cdot \frac{280}{3} + 120 \cdot 280 \cdot 140}{5{,}04 \cdot 10^4} = 124{,}44\ \mathrm{mm}$$

- km. főinercianyomatékai (a szimmetriatengely és a rá merőleges súlyponti tengely mindig főinercia tengely):

$$I_y = 2 \cdot \frac{60 \cdot 280^3}{12} + \frac{120 \cdot 280^3}{3} - 5{,}04 \cdot 10^4 \cdot 124{,}44^2 = 3{,}1714 \cdot 10^8 mm^4 = I_1$$

$$I_z = 2 \cdot \left(\frac{280 \cdot 60^3}{36} + \frac{280 \cdot 60}{2} \cdot \left(\frac{60}{3} + \frac{120}{2}\right)^2\right) + \frac{280 \cdot 120^3}{12} = 1{,}512 \cdot 10^8 mm^4 = I_2$$

- sarokponti feszültségek (a tagokat a húzás-nyomás előjelszabálya alapján összegezzük):

$$\sigma_A = -\frac{M_y}{I_y}z_A - \frac{M_z}{I_z}y_A = -\frac{10 \cdot 10^6}{3{,}1714 \cdot 10^8}124{,}44 - \frac{17{,}32 \cdot 10^6}{1{,}512 \cdot 10^8}120 = -3{,}923 - 13{,}746 = -17{,}669\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = -\frac{M_y}{I_y}z_B + \frac{M_z}{I_z}y_B = -\frac{10 \cdot 10^6}{3{,}1714 \cdot 10^8}124{,}44 + \frac{17{,}32 \cdot 10^6}{1{,}512 \cdot 10^8}120 = -3{,}923 + 13{,}746 = 9{,}823\frac{N}{mm^2}$$

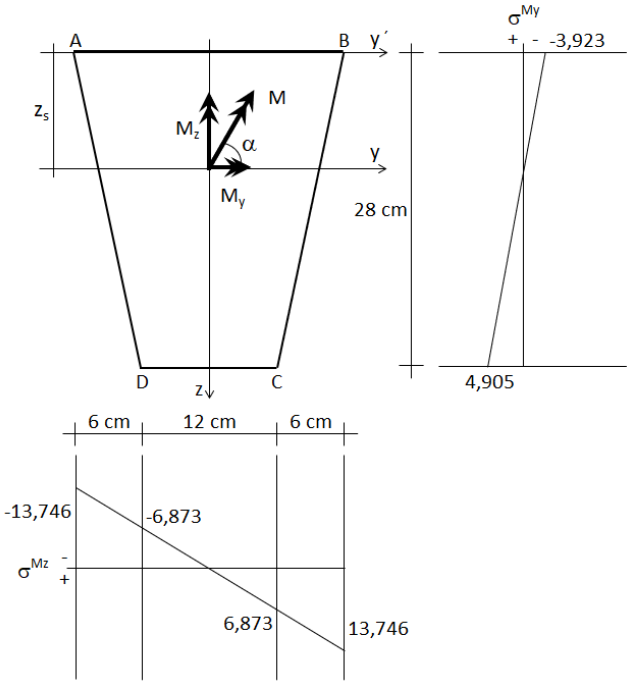
$$\sigma_C = \frac{M_y}{I_y}z_C + \frac{M_z}{I_z}y_C = \frac{10 \cdot 10^6}{3{,}1714 \cdot 10^8}(280 - 124{,}44) + \frac{17{,}32 \cdot 10^6}{1{,}512 \cdot 10^8}60 = 4{,}905 + 6{,}873 = 11{,}778\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_D = \frac{M_y}{I_y} z_D - \frac{M_z}{I_z} y_D = \frac{10 \cdot 10^6}{3{,}1714 \cdot 10^8}(280 - 124{,}44) - \frac{17{,}32 \cdot 10^6}{1{,}512 \cdot 10^8} 60 = 4{,}905 - 6{,}873 = -1{,}968 \frac{N}{mm^2}$$

ellenőrzés:

$$\sigma_{max} = |\sigma_A| = |-17{,}669| \frac{N}{mm^2} < \sigma_e = 22 \frac{N}{mm^2} \qquad megfelel$$

Ábrázolja a feszültségeloszlást a keresztmetszetben!



Határozza meg az M nyomaték maximális értékét, amelyre a km. még megfelel!

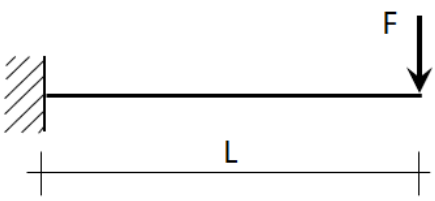
$$\sigma_{max} = \sigma_A = \left| -\frac{M_y}{I_y} z_A - \frac{M_z}{I_z} y_A \right| \leq \sigma_e$$

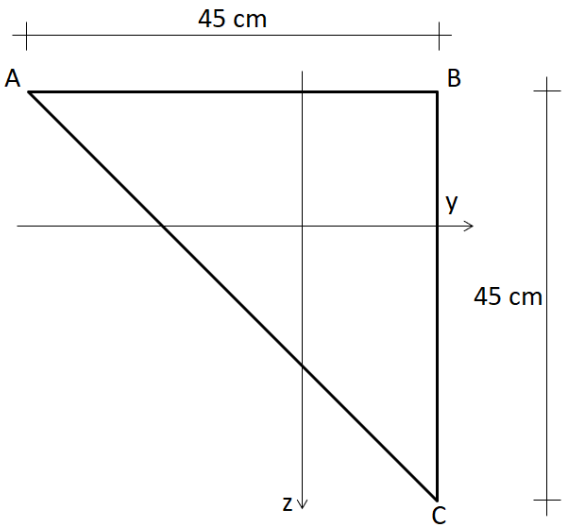
$$\left| -\frac{M \cdot 10^6 \cdot \cos 60°}{3{,}1714 \cdot 10^8} 124{,}44 - \frac{M \cdot 10^6 \cdot \sin 60°}{1{,}512 \cdot 10^8} 120 \right| \leq \sigma_e = 22 \frac{N}{mm^2}$$

$$0{,}19619 \cdot M + 0{,}68732 \cdot M \leq \sigma_e = 22 \frac{N}{mm^2}$$

$$M_{max} = 24{,}9\ kNm$$

3.)





F=40 kN

L=3,0 m

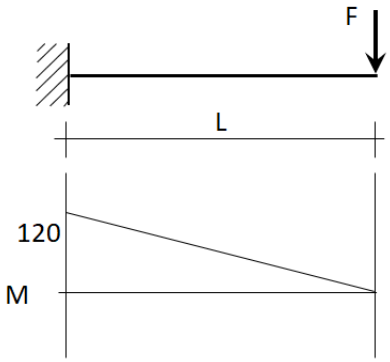
$\sigma_e = 40 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$

Határozza meg a km. sarokponti feszültségeit és ellenőrizze a km.-t!

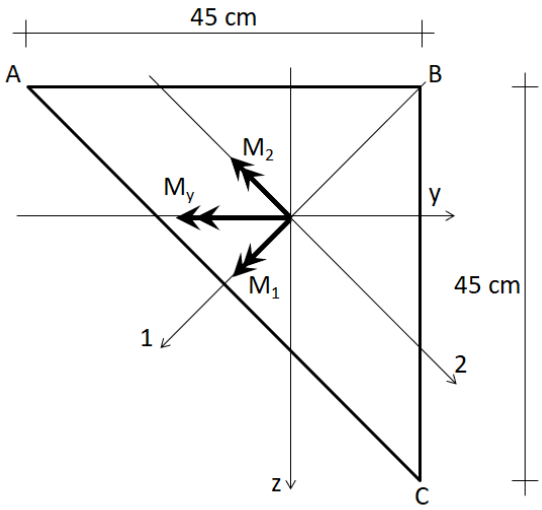
mértékadó igénybevételek meghatározása:

- A részletek mellőzésével megrajzolt igénybevételi ábrából leolvasva:

  $M_{y,max}$=120 kNm (felül húzó nyomaték, mivel az ábrában felülre van mérve a kiindulási vonalhoz képest.)



A jobbra mutató $M_{y,max}$ nyomatékvektor felül húzást, alul nyomást fejt ki a km.-ben, amely így megfelel a maximális nyomaték előzőekben megállapított működésének.



A nyomatékvektor viszont nem esik egy egyenesbe egyik km-i főiránnyal (1 és 2, mivel az egyik szimmetriatengely) sem. Ezért a km. igénybevétele ferde hajlítás. A ferdén hajlító nyomaték vektorát a főirányokba (1 és 2) eső komponenseire bontjuk. Az így kapott nyomatékok már egyenes hajlításként üzemelnek, a km. feszültségeit ennek megfelelően a két egyenes hajlítás egymásra halmozásával (szuperpozíciójával) állítjuk elő:

$$\sigma = \pm \frac{M_1}{I_1} s_2 \pm \frac{M_2}{I_2} s_1$$

- a főirányokba eső (így egyenesen hajlító) nyomatéki komponensek:

$$M_1 = M_{y,max} \cdot \cos 45° = 120 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 84{,}85\ kNm$$

$$M_2 = M_{y,max} \cdot \sin 45° = 120 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 84{,}85\ kNm$$

sarokponti feszültségek meghatározása:

- km. főinercianyomatékai (a szimmetriatengely és a rá merőleges súlyponti tengely mindig főinercia tengely):

$$I_1 = 2 \cdot \frac{450 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (450 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^3}{12} = 1{,}7086 \cdot 10^9 mm^4$$

A háromszöget két másik háromszögre bontottuk az 1. főtengely mentén, majd a háromszögek oldalára felírva az inercianyomatékokat és azokat összegezve, közvetlenül előállítható az 1. főinercianyomaték.

$$I_2 = \frac{450\sqrt{2} \cdot (450 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^3}{36} = 5{,}6953 \cdot 10^8 mm^4$$

A háromszög átfogója párhuzamos a 2. főtengellyel, így erre a tengelyre közvetlenül felírható a teljes km. inercianyomatéka.

- sarokponti feszültségek (a tagokat a húzás-nyomás előjelszabálya alapján összegezzük):

$$\sigma_A = \frac{M_1}{I_1} s_{2A} - \frac{M_2}{I_2} s_{1A} = \frac{84{,}85 \cdot 10^6}{1{,}7086 \cdot 10^9} \cdot 450 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{84{,}85 \cdot 10^6}{5{,}6953 \cdot 10^8} \cdot 450 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} = 15{,}80 - 15{,}80$$
$$= 0 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = \frac{M_1}{I_1} s_{2B} + \frac{M_2}{I_2} s_{1B} = \frac{84{,}85 \cdot 10^6}{1{,}7086 \cdot 10^9} \cdot 0 + \frac{84{,}85 \cdot 10^6}{5{,}6953 \cdot 10^8} \cdot 450 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3}$$
$$= 0 + 31{,}60 = 31{,}60 \frac{N}{mm^2}$$

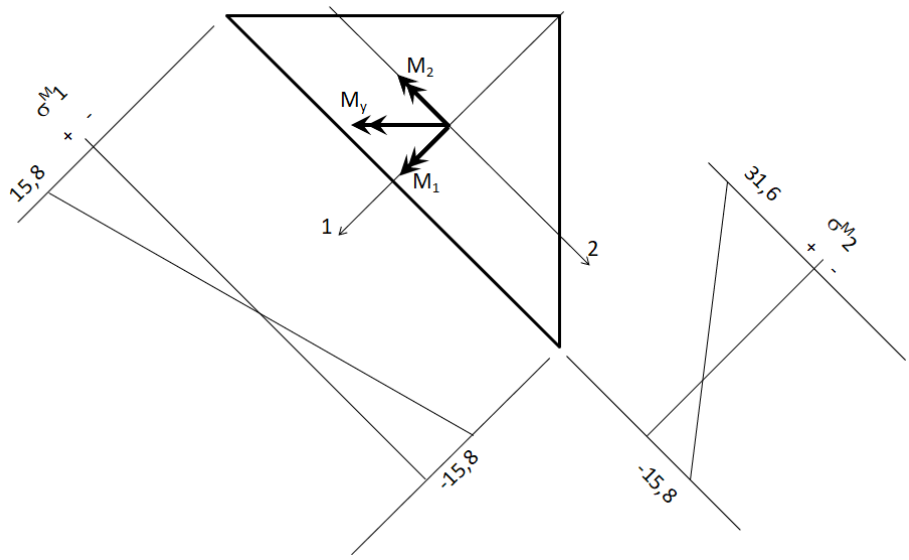
$$\sigma_C = -\frac{M_1}{I_1} s_{2C} - \frac{M_2}{I_2} s_{1C} = -\frac{84{,}85 \cdot 10^6}{1{,}7086 \cdot 10^9} \cdot 450 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{84{,}85 \cdot 10^6}{5{,}6953 \cdot 10^8} \cdot 450 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} =$$
$$= -15{,}80 - 15{,}80 = -31{,}60 \frac{N}{mm^2}$$

ellenőrzés:

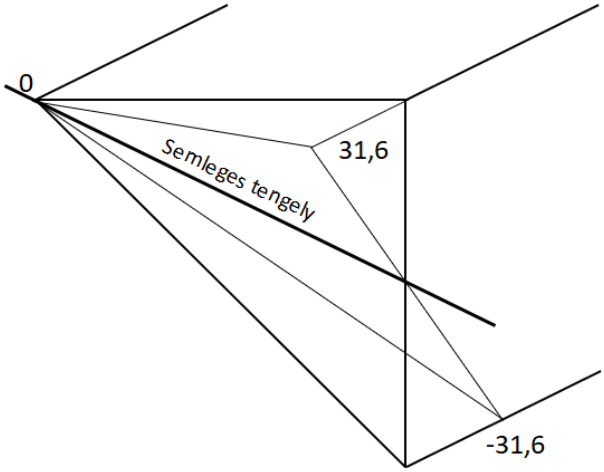
$$\sigma_{max} = \sigma_B = |\sigma_C| = 31{,}6 \frac{N}{mm^2} < \sigma_e = 40 \frac{N}{mm^2} \qquad megfelel$$

Ábrázolja a feszültségeloszlást a keresztmetszetben!

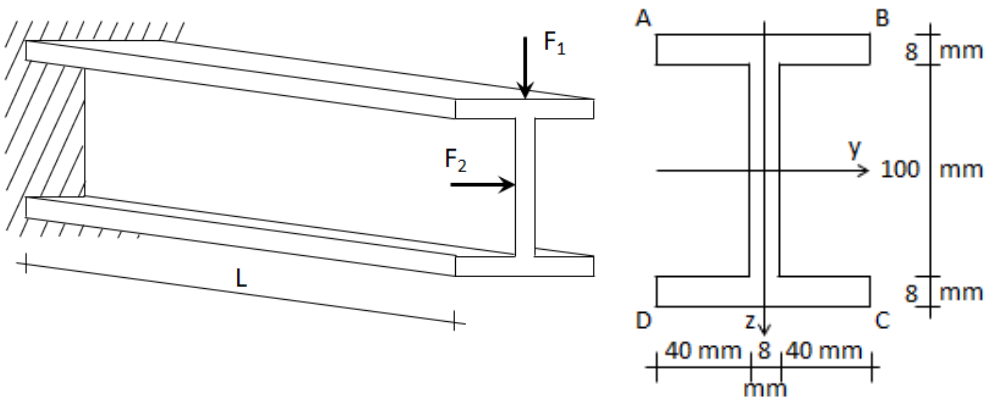
- feszültségeloszlás igénybevételenként:



- feszültségi test (km. feszültségeloszlásának térbeli ábrázolása):



4.)



L=2,8 m

F_1=1,8 kN

F_2=1,2 kN

$\sigma_e = 275 \frac{N}{mm^2}$

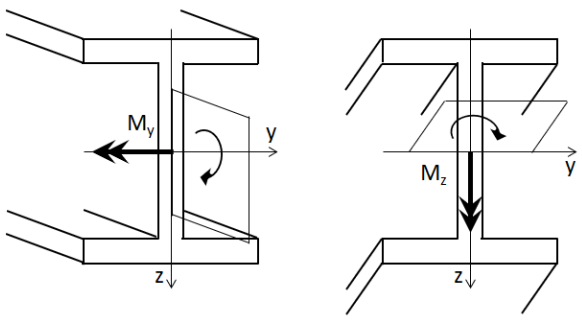
Határozza meg a km. sarokponti feszültségeit és ellenőrizze a km.-t!

mértékadó igénybevételek meghatározása:

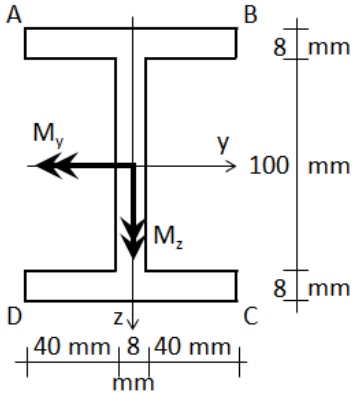
- a befogási nyomatékok az y és a z főtengely körül:

$$M_y = F_1 \cdot L = 1{,}8 \cdot 2{,}8 = 5{,}04\ \text{kNm}$$

$$M_z = F_2 \cdot L = 1{,}2 \cdot 2{,}8 = 3{,}36\ \text{kNm}$$



Az F_1 erő az y, az F_2 erő a z tengely körül forgat. Az F_1 erő által okozott nyomatékok a tartó keresztmetszeteiben felül okoznak húzást, alul nyomást, az F_2 erő által okozott nyomatékok pedig a km. bal oldalán okoznak húzást, a jobb oldalán nyomást. A balra és a lefelé mutató nyomatékvektorok felelnek meg ennek a működésnek.



Az y és a z tengely a km. főinerciatengelyei, mivel szimmetriatengelyek. Ezért a kialakuló ezen tengelyek körül forgató, mindkét irányú nyomaték egyenes hajlításként működik. A km. feszültségeit ennek megfelelően a ferde hajlításhoz hasonlóan a két egyenes hajlítás egymásra halmozásával (szuperpozíciójával) állítjuk elő:

$$\sigma = \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

sarokponti feszültségek meghatározása:

- km. főinercianyomatékai (a szimmetriatengely mindig főinercia tengely):

$$I_y = \frac{88 \cdot 116^3}{12} - \frac{80 \cdot 100^3}{12} = 4{,}7799 \cdot 10^6 mm^4 = I_1$$

$$I_z = 2 \cdot \frac{8 \cdot 88^3}{12} + \frac{100 \cdot 8^3}{12} = 9{,}1290 \cdot 10^5 mm^4 = I_2$$

- sarokponti feszültségek (a tagokat a húzás-nyomás előjelszabálya alapján összegezzük):

$$\sigma_A = \frac{M_y}{I_y} z_A + \frac{M_z}{I_z} y_A = \frac{5{,}04 \cdot 10^6}{4{,}7799 \cdot 10^6} 58 + \frac{3{,}36 \cdot 10^6}{9{,}1290 \cdot 10^5} 44 = 61{,}156 + 161{,}95 = 223{,}11 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = \frac{M_y}{I_y} z_B - \frac{M_z}{I_z} y_B = \frac{5{,}04 \cdot 10^6}{4{,}7799 \cdot 10^6} 58 - \frac{3{,}36 \cdot 10^6}{9{,}1290 \cdot 10^5} 44 = 61{,}156 - 161{,}95 = -100{,}79 \frac{N}{mm^2}$$

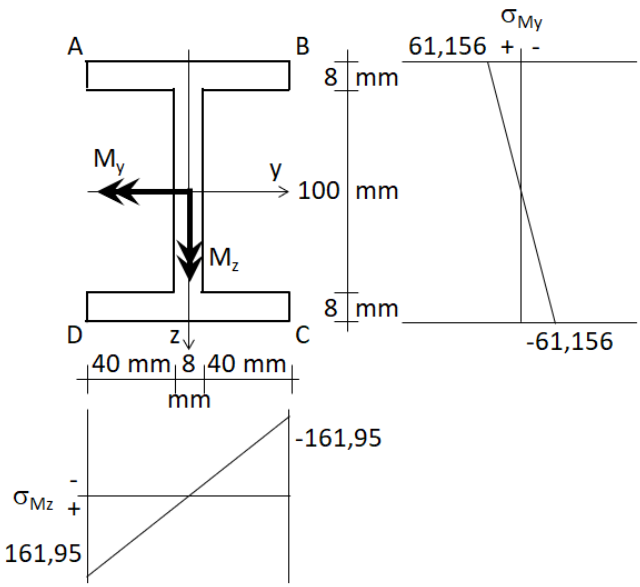
$$\sigma_C = -\frac{M_y}{I_y} z_C - \frac{M_z}{I_z} y_C = -\frac{5{,}04 \cdot 10^6}{4{,}7799 \cdot 10^6} 58 - \frac{3{,}36 \cdot 10^6}{9{,}1290 \cdot 10^5} 44 = -61{,}156 - 161{,}95 = -223{,}11 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_D = -\frac{M_y}{I_y} z_D + \frac{M_z}{I_z} y_D = -\frac{5{,}04 \cdot 10^6}{4{,}7799 \cdot 10^6} 58 + \frac{3{,}36 \cdot 10^6}{9{,}1290 \cdot 10^5} 44 = -61{,}156 + 161{,}95 = 100{,}79 \frac{N}{mm^2}$$

ellenőrzés:

$$\sigma_{max} = \sigma_A = |\sigma_C| = 223{,}11 \frac{N}{mm^2} < \sigma_e = 275 \frac{N}{mm^2} \qquad megfelel$$

Ábrázolja a feszültségeloszlást a keresztmetszetben!



Határozza meg az F_1 erő maximális értékét a többi paraméter változatlan értéke mellett, hogy a km. még megfeleljen!

$$\sigma_{max} = \sigma_A = |\sigma_C| = \left|\frac{M_y}{I_y}\mathrm{z} + \frac{M_z}{I_z}\mathrm{y}\right| \leq \sigma_e$$

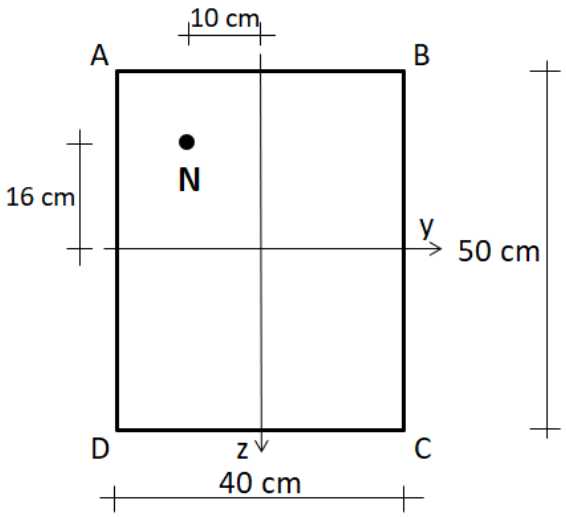
$$\left|\frac{\mathrm{F}_1 \cdot 10^3 \cdot 2{,}8 \cdot 10^3}{4{,}7799 \cdot 10^6} 58 + \frac{3{,}36 \cdot 10^6}{9{,}1290 \cdot 10^5} 44\right| \leq \sigma_e = 275 \frac{N}{mm^2}$$

$$\mathrm{F}_1 \cdot 33{,}976 + 161{,}95 \leq \sigma_e = 275 \frac{N}{mm^2}$$

$$\mathrm{F}_{1,\max} = 3{,}327 \text{ kN}$$

Külpontos nyomás mintapéldák

1.)



N= -750 kN

Az N erő a súlyponttól eltérő támadáspontban fejti ki a hatását, a km. mindkét főinercia tengelye (y és z) körül forgat, ezért az általa okozott igénybevétel kétszeresen külpontos nyomás. A km. feszültségeit ennek megfelelően számítjuk a nyomóerő és a két nyomaték együttes hatásából :

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

Határozza meg a keresztmetszet sarokponti feszültségeit!

- km. területe: $A = 400 \cdot 500 = 200000\ mm^2$
- km. főinercianyomatékai (a szimmetriatengely mindig főinercia tengely):

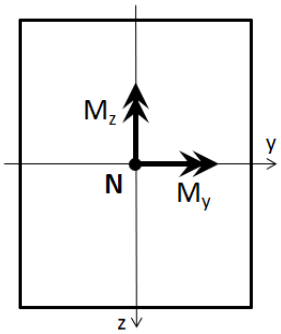
$$I_y = \frac{400 \cdot 500^3}{12} = 4{,}1667 \cdot 10^9 mm^4 = I_1$$

$$I_z = \frac{500 \cdot 400^3}{12} = 2{,}6667 \cdot 10^9 mm^4 = I_2$$

- a nyomóerő (külpontosságából adódó) nyomatékai a főinercia tengelyekre:

$$M_y = M_1 = 750 \cdot 0{,}16 = 120\ kNm$$

$$M_z = M_2 = 750 \cdot 0{,}10 = 75\ kNm$$



- a sarokponti feszültségek:

$$\sigma_A = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_A - \frac{M_z}{I_z} y_A = -\frac{750 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} - \frac{120 \cdot 10^6}{4{,}1667 \cdot 10^9} 250 - \frac{75 \cdot 10^6}{2{,}6667 \cdot 10^9} 200 =$$

$$= -3{,}75 - 7{,}20 - 5{,}625 = -16{,}575 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_B + \frac{M_z}{I_z} y_B = -\frac{750 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} - \frac{120 \cdot 10^6}{4{,}1667 \cdot 10^9} 250 + \frac{75 \cdot 10^6}{2{,}6667 \cdot 10^9} 200$$

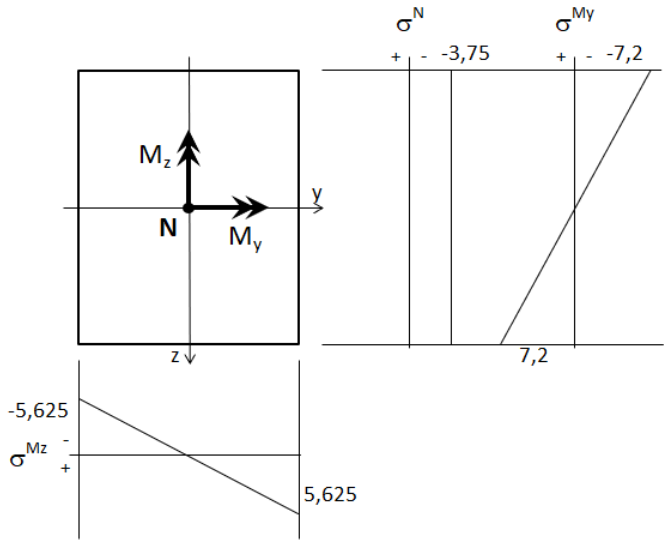
$$= -3{,}75 - 7{,}20 + 5{,}625 = -5{,}325 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_C = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_C + \frac{M_z}{I_z} y_C = -\frac{750 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} + \frac{120 \cdot 10^6}{4{,}1667 \cdot 10^9} 250 + \frac{75 \cdot 10^6}{2{,}6667 \cdot 10^9} 200$$
$$= -3{,}75 + 7{,}20 + 5{,}625 = 9{,}075 \frac{N}{mm^2}$$

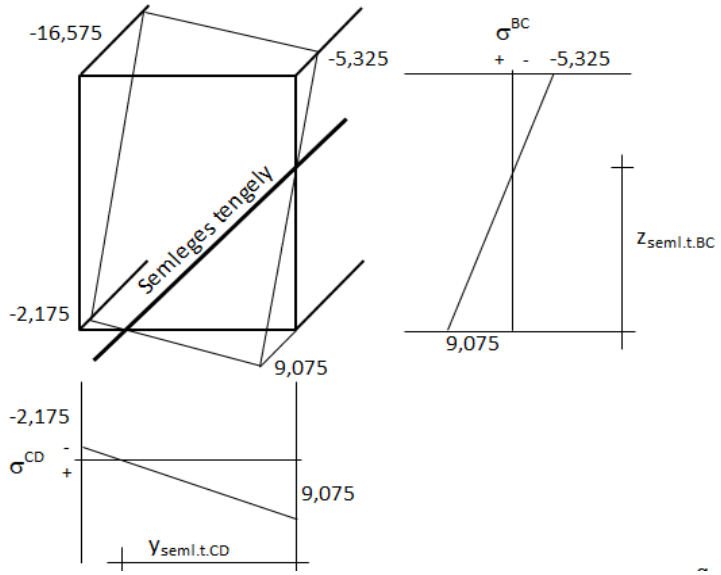
$$\sigma_D = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_D - \frac{M_z}{I_z} y_D = -\frac{750 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} + \frac{120 \cdot 10^6}{4{,}1667 \cdot 10^9} 250 - \frac{75 \cdot 10^6}{2{,}6667 \cdot 10^9} 200$$
$$= -3{,}75 + 7{,}20 - 5{,}625 = -2{,}175 \frac{N}{mm^2}$$

Ábrázolja a feszültségeloszlást a keresztmetszetben, majd határozza meg a semleges tengely metszéspontjait a BC és CD oldalakkal!

- feszültségeloszlás igénybevételenként:



- feszültségi test (km. feszültségeloszlásának térbeli ábrázolása):



- semleges tengely helyzete a feszültségi test oldalvetületei alapján:

$$\frac{40}{(2{,}175 + 9{,}075)} = \frac{y_{seml.t.CD}}{9{,}075} \quad \rightarrow y_{seml.t.CD} = 32{,}267\ cm$$

$$\frac{50}{(5{,}325 + 9{,}075)} = \frac{z_{seml.t.BC}}{9{,}075} \quad \rightarrow z_{seml.t.BC} = 31{,}510\ cm$$

Határozza meg az N erőnek azt a maximális értékét, amely hatására a km. maximális feszültségei még megfelelnek a σ_e=25 N/mm^2-re!

- a km. maximális feszültsége az N=750 kN hatására:

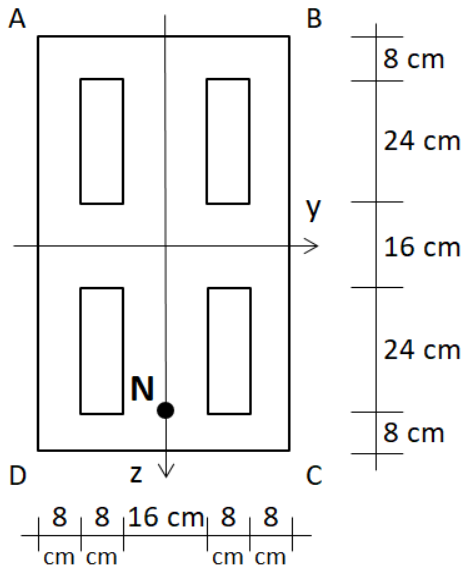
  σ_{max}= $|\sigma_A|$=|-16,575| N/mm^2 < σ_e=25 $\frac{N}{mm^2}$

- N_{max} meghatározása:

  $$\sigma_A = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_A - \frac{M_z}{I_z} y_A = -\frac{N}{2\cdot 10^5} - \frac{N\cdot 160}{4{,}1667\cdot 10^9} 250 - \frac{N\cdot 100}{2{,}6667\cdot 10^9} 200 \leq \sigma_e = 25 \frac{N}{mm^2}$$

  $$N_{max} = 1131{,}22\ kN$$

2.)



N= -1,5 MN

Az N erő a súlyponttól eltérő támadáspontban fejti ki a hatását, a km. egyik főinercia tengelye (y) körül forgat, ezért az általa okozott igénybevétel egyszeresen külpontos nyomás. A km. feszültségeit ennek megfelelően számítjuk a nyomóerő és a nyomaték együttes hatásából :

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z$$

Határozza meg a keresztmetszet sarokponti feszültségeit, majd ellenőrizze a keresztmetszetet a σ_e =30 N/mm^2 értékre!

- km. területe: $A = 480 \cdot 800 - 4 \cdot 80 \cdot 240 = 3{,}072 \cdot 10^5\ mm^2$

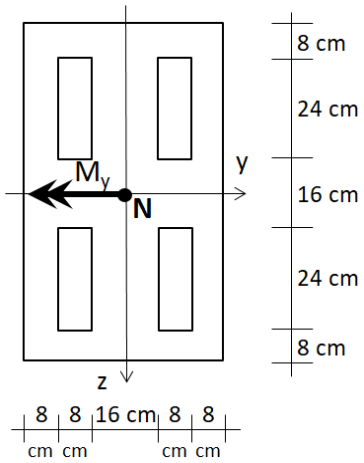
- km. főinercianyomatéka y tengelyre (a szimmetriatengely mindig főinercia tengely):

  $$I_y = \frac{480 \cdot 800^3}{12} - 4 \cdot [\frac{80 \cdot 240^3}{12} + 80 \cdot 240 \cdot \left(\frac{160}{2} + \frac{240}{2}\right)^2] == 1{,}70394 \cdot 10^{10} mm^4 = I_1$$

- nyomóerő (külpontosságából adódó) nyomatékai a főinercia tengelyekre:

  $$M_y = M_1 = 1500 \cdot (\frac{0{,}16}{2} + 0{,}24) = 480\ kNm$$

  $$M_z = M_2 = 1500 \cdot 0 = 0\ kNm$$



- a sarokponti feszültségek:

$$\sigma_A = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_A = -\frac{1500 \cdot 10^3}{3{,}072 \cdot 10^5} + \frac{480 \cdot 10^6}{1{,}70394 \cdot 10^{10}} 400 = -4{,}883 + 11{,}268 = 6{,}385 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_B = -\frac{1500 \cdot 10^3}{3{,}072 \cdot 10^5} + \frac{480 \cdot 10^6}{1{,}70394 \cdot 10^{10}} 400 = -4{,}883 + 11{,}268 = 6{,}385 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_C = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_C = -\frac{1500 \cdot 10^3}{3{,}072 \cdot 10^5} - \frac{480 \cdot 10^6}{1{,}70394 \cdot 10^{10}} 400 = -4{,}883 - 11{,}268$$
$$= -16{,}151 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_D = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_D = -\frac{1500 \cdot 10^3}{3{,}072 \cdot 10^5} - \frac{480 \cdot 10^6}{1{,}70394 \cdot 10^{10}} 400 = -4{,}883 - 11{,}268$$
$$= -16{,}151 \frac{N}{mm^2}$$

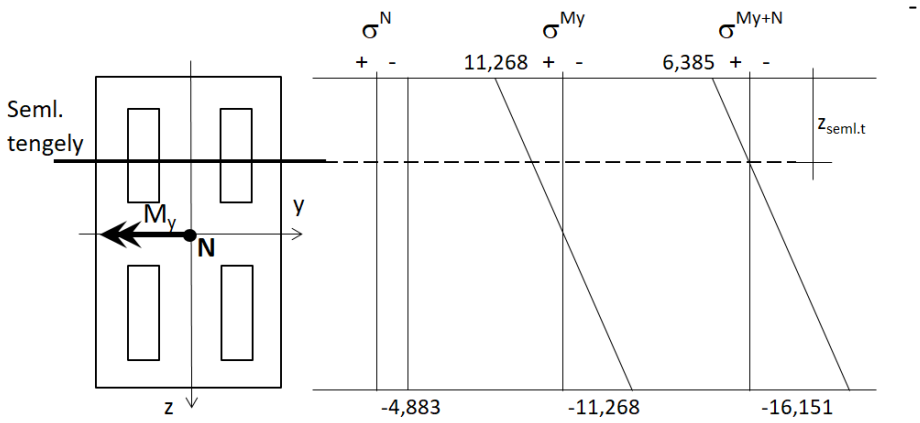
- ellenőrzés:

σ_{max}= $|\sigma_C|$= $|\sigma_D|$=|-16,151| N/mm^2 < σ_e=30 $\frac{N}{mm^2}$

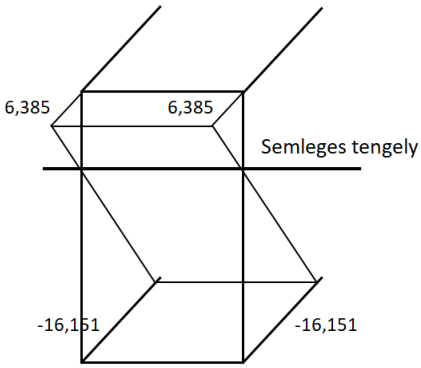
megfelel

Ábrázolja a feszültségeloszlást a keresztmetszetben, majd határozza meg a semleges tengely metszéspontját a BC oldallal!

- feszültségeloszlás igénybevételenként és azok összesítésével:



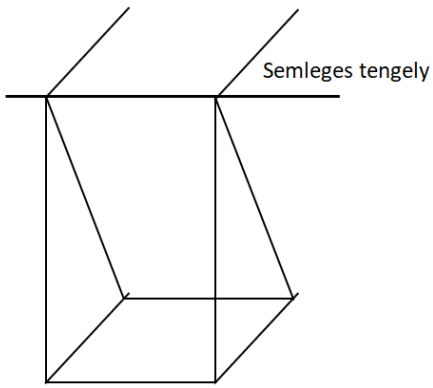
- feszültségi test (km. feszültségeloszlásának térbeli ábrázolása):



- semleges tengely helyzete a feszültségi test oldalvetületei alapján:

$$\frac{80}{(6{,}385 + 16{,}151)} = \frac{z_{seml.t.}}{6{,}385} \quad \rightarrow z_{seml.t.} = 22{,}67\ cm$$

Határozza meg az N erő „e" külpontosságának maximális értékét, amely mellett nem ébred húzás a keresztmetszetben!



$$\sigma_A = \sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z = 0$$

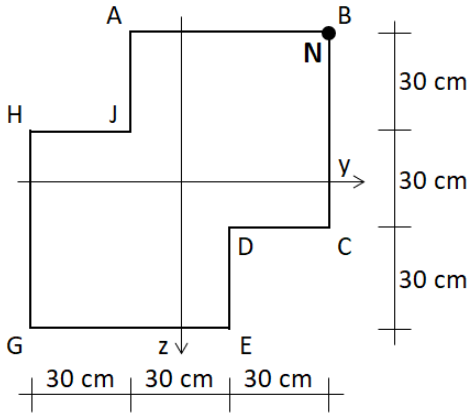
$$\sigma_A = \sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_{max}}{I_y} z = 0$$

$$\sigma_A = \sigma_B = -\frac{1{,}5 \cdot 10^6}{3{,}072 \cdot 10^5} + \frac{1{,}5 \cdot 10^6 \cdot e_{max}}{1{,}70394 \cdot 10^{10}} 400 = 0$$

$$e_{max} = 138{,}67mm$$

A semleges tengely e_{max} külpontosság mellett az AB oldalon halad át, vagyis a teljes keresztmetszet nyomásnak van kitéve.

3.)



N=-2 MN

Az N erő a súlyponttól eltérő támadáspontban fejti ki a hatását, a km. egyik főinercia tengelye (1) körül forgat, ezért az általa okozott igénybevétel egyszeresen külpontos nyomás. A km. feszültségeit ennek megfelelően számítjuk a nyomóerő és a nyomaték együttes hatásából :

$$\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_1}{I_1} s_1$$

Határozza meg a keresztmetszet sarokponti feszültségeit!

- km. területe:

$$A = 900 \cdot 900 - 2 \cdot 300 \cdot 300 = 6{,}3 \cdot 10^5 mm^2$$

- km. főinercianyomatéka 1 tengelyre (a szimmetriatengely mindig főinercia tengely):

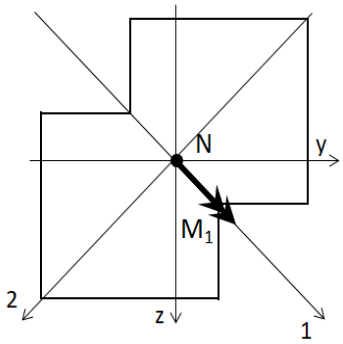
$$I_1 = \frac{900 \cdot 900^3}{12} - 2 \cdot \frac{300 \cdot 300^3}{12} = 5{,}3325 \cdot 10^{10} mm^4$$

(a négyzetnek az összes súlyponti tengelyén azonos az inercianyomatéka, így a csúcsain áthaladó tengelyeken és az oldalakkal párhuzamos tengelyeken is.)

- nyomóerő (külpontosságából adódó) nyomatékai a főinercia tengelyekre:

$$M_1 = 2000 \cdot \left(\frac{0{,}30}{2} + 0{,}30\right) \cdot \sqrt{2} = 1272{,}79\ kNm$$

$$M_2 = 2000 \cdot 0 = 0\ kNm$$



- a sarokponti feszültségek:

$$\sigma_A = -\frac{N}{A} - \frac{M_1}{I_1} s_{1A} = -\frac{2000 \cdot 10^3}{6{,}3 \cdot 10^5} - \frac{1272{,}79 \cdot 10^6}{5{,}3325 \cdot 10^{10}} \cdot 300 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3{,}175 - 5{,}063$$
$$= -8{,}245 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_B = -\frac{N}{A} - \frac{M_1}{I_1} s_{1B} = -\frac{2000 \cdot 10^3}{6{,}3 \cdot 10^5} - \frac{1272{,}79 \cdot 10^6}{5{,}3325 \cdot 10^{10}} \cdot 450 \cdot \sqrt{2} = -3{,}175 - 15{,}19$$
$$= -18{,}365 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_C = -\frac{N}{A} - \frac{M_1}{I_1} s_{1C} = -\frac{2000 \cdot 10^3}{6{,}3 \cdot 10^5} - \frac{1272{,}79 \cdot 10^6}{5{,}3325 \cdot 10^{10}} \cdot 300 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3{,}175 - 5{,}070$$
$$= -8{,}245 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_D = -\frac{N}{A} - \frac{M_1}{I_1} s_{1D} = -\frac{2000 \cdot 10^3}{6{,}3 \cdot 10^5} - \frac{1272{,}79 \cdot 10^6}{5{,}3325 \cdot 10^{10}} \cdot 0 = -3{,}175 - 0 = -3{,}175 \frac{N}{mm^2}$$

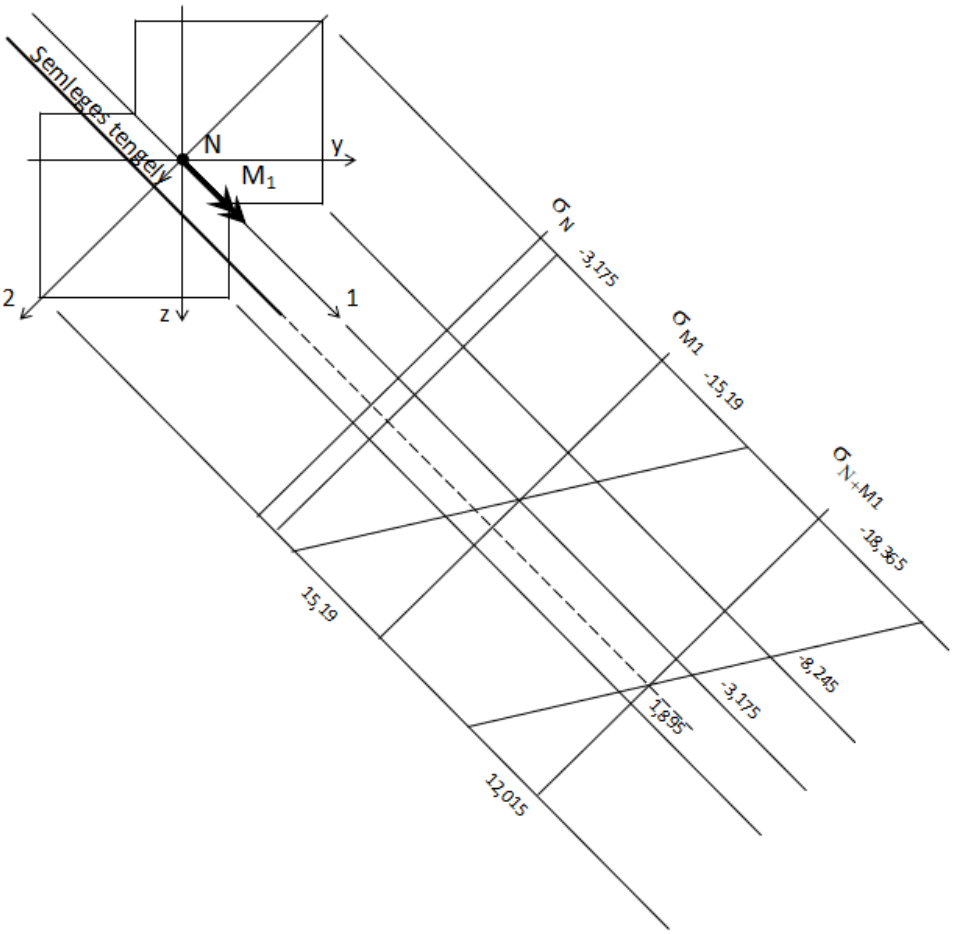
$$\sigma_E = -\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} s_{1E} = -\frac{2000 \cdot 10^3}{6{,}3 \cdot 10^5} + \frac{1272{,}79 \cdot 10^6}{5{,}3325 \cdot 10^{10}} \cdot 300 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3{,}175 + 5{,}070 = 1{,}895 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_G = -\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} s_{1G} = -\frac{2000 \cdot 10^3}{6{,}3 \cdot 10^5} + \frac{1272{,}79 \cdot 10^6}{5{,}3325 \cdot 10^{10}} \cdot 450 \cdot \sqrt{2} = -3{,}175 + 15{,}19 =$$
$$= 12{,}015 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_H = -\frac{N}{A} + \frac{M_1}{I_1} s_{1H} = -\frac{2000 \cdot 10^3}{6{,}3 \cdot 10^5} + \frac{1272{,}79 \cdot 10^6}{5{,}3325 \cdot 10^{10}} \cdot 300 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3{,}175 + 5{,}070 =$$
$$= 1{,}895 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_J = -\frac{N}{A} - \frac{M_1}{I_1} s_{1J} = -\frac{2000 \cdot 10^3}{6{,}3 \cdot 10^5} - \frac{1272{,}79 \cdot 10^6}{5{,}3325 \cdot 10^{10}} \cdot 0 = -3{,}175 - 0 = \; = -3{,}175 \frac{N}{mm^2}$$

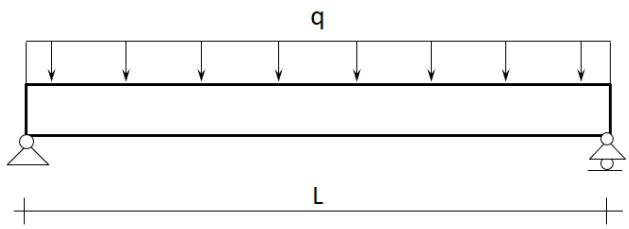
Ábrázolja a feszültségeloszlást a keresztmetszetben!

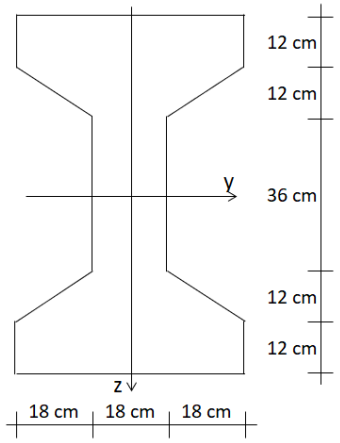


4.)a.)

q=40 kN/m

L=10,0 m





A tartó keresztmetszeteire y tengely körül forgató hajlító nyomatékok hatnak, a km. feszültségeit ennek megfelelően számítjuk: $\sigma = \frac{M_y}{I_y} z$

Határozza meg a hajlított tartó szélsőszál feszültségeit!

- maximális nyomaték:

$$\mathrm{M_{y,max}} = \frac{\mathrm{q \cdot L^2}}{8} = \frac{40 \cdot 10^2}{8} = 500\ \mathrm{kNm}$$

- km. területe: $A = 2 \cdot 540 \cdot 120 + 4 \cdot \frac{120 \cdot 180}{2} + 180 \cdot 600 = 2{,}808 \cdot 10^5 mm^2$

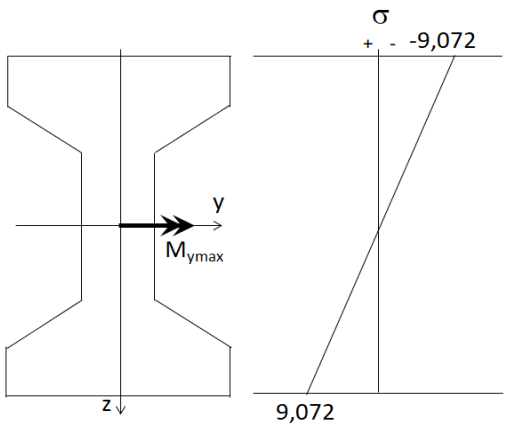
- km. főinercianyomatéka y tengelyre (a szimmetriatengely mindig főinercia tengely):

$$I_y = 2 \cdot \left(\frac{540 \cdot 120^3}{12} + 540 \cdot 120 \cdot 360^2 \right) + 4 \cdot \left(\frac{180 \cdot 120^3}{36} + \frac{120 \cdot 180}{2} \cdot 260^2 \right) + \frac{180 \cdot 600^3}{12} = 2{,}3147 \cdot 10^{10} mm^4$$

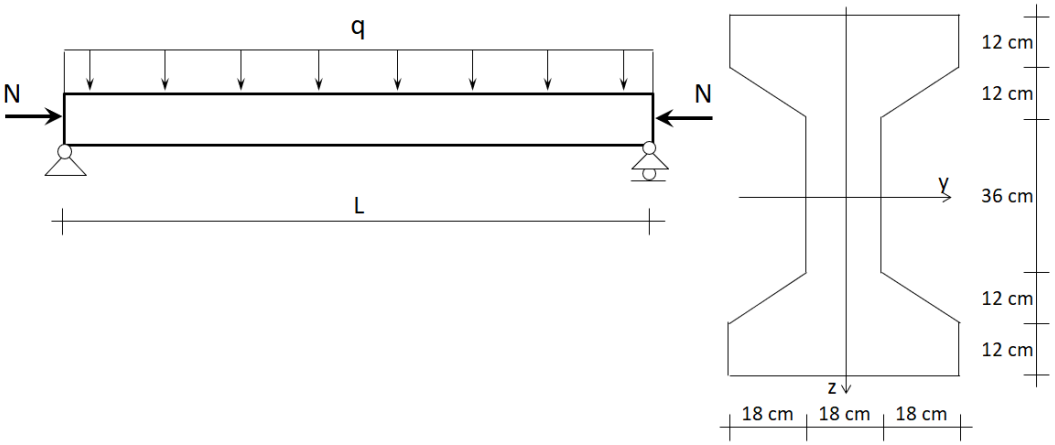
- a szélsőszál feszültségek:

$$\sigma = \frac{M_{y,max}}{I_y} z_{max} = \frac{500 \cdot 10^6}{2{,}3147 \cdot 10^{10}} 420 = 9{,}0724\ \frac{N}{mm^2}$$

Ábrázolja a feszültségeloszlást a keresztmetszetben!



b.)



q=40 kN/m

L=10,0 m

N=3000 kN

A tartó keresztmetszeteire az y tengely körül forgató hajlító nyomatékok mellett egy súlyponton áthaladó nyomóerő is működik, a km. feszültségeit ennek megfelelően számítjuk a nyomóerő és a nyomaték együttes hatásából: $\sigma = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z$

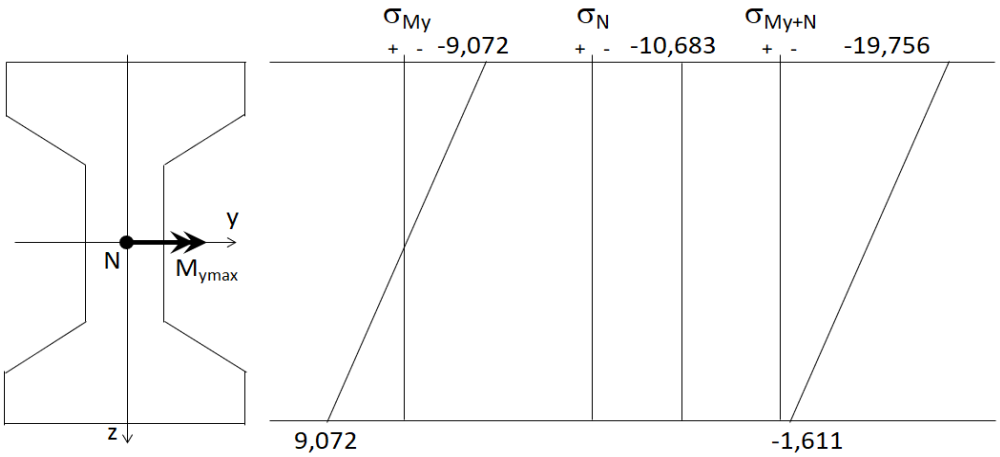
Határozza meg a hajlított és nyomott tartó szélsőszál feszültségeit!

- a maximális nyomaték, a km. területe és inercianyomatéka megegyezik az a.) feladatrészben számoltakkal.
- a szélsőszál feszültségek:

$$\sigma_{alsó} = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_{max} = -\frac{3000 \cdot 10^3}{2{,}808 \cdot 10^5} + \frac{500 \cdot 10^6}{2{,}3147 \cdot 10^{10}} 420 = -10{,}6838 + 9{,}0724$$
$$= -1{,}6114 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{felső} = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} z_{max} = -\frac{3000 \cdot 10^3}{2{,}808 \cdot 10^5} - \frac{500 \cdot 10^6}{2{,}3147 \cdot 10^{10}} 420 = -10{,}6838 - 9{,}072$$
$$= -19{,}756 \frac{N}{mm^2}$$

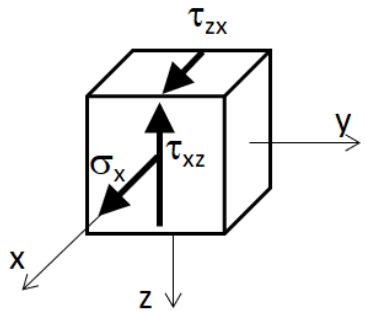
Ábrázolja a feszültségeloszlást a keresztmetszetben!



Megállapítható, hogy a hajlítás mellett működő megfelelő nagyságú nyomóerő hatására megszűnt a km-ben a húzófeszültség.

Mintapéldák feszültségi állapot, főfeszültségek

1.)



σ_x=75 MPa

τ_{xz}=50 MPa

Határozza meg a pont főfeszültségeit, valamint rajzolja meg a feszültségi állapot Mohr-körét!

- főfeszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}{}^2}$$

- az összefüggés első tagja a kör középpontját adja meg, a második tag pedig a kör sugarát

$$\sigma_{1,2} = \frac{75+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{75-0}{2}\right)^2 + 50^2} = 37{,}5 \pm 62{,}5$$

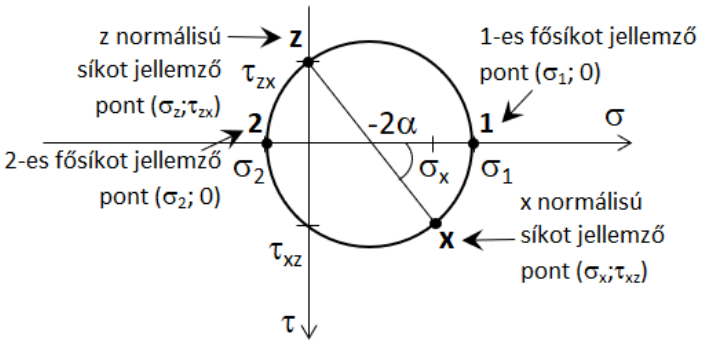
$\sigma_1 = 100\ MPa$ (a σ_1 mindig a maximum)

$\sigma_2 = -25\ MPa$ (a σ_2 mindig a minimum)

- főirányokhoz tartozó elfordulási szög:

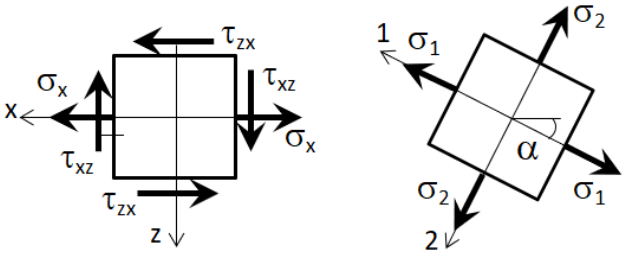
$$\tan 2\alpha = \frac{2\cdot\tau_{xz}}{\sigma_x-\sigma_z} = \frac{2\cdot 50}{75-0} = 1{,}333 \qquad \rightarrow \alpha = 26{,}57°$$

- feszültségi Mohr-kör:



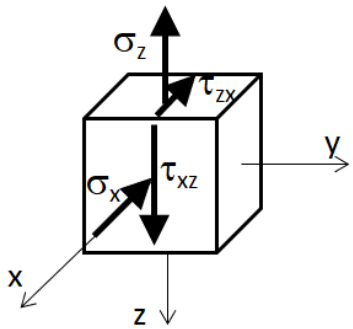
A τ_{zx} és a τ_{xz} egymás ellentettje a dualitás tétele alapján. A σ_z 0 értékű, az σ_x meg van adva kiindulási értékként. A σ feszültség akkor pozitív, ha húzást okoz. A nyírófeszültségek esetében pedig a pozitív normálfeszültséget óra járásával megegyező 90°-os elfordítással kapjuk meg a pozitív előjelű értéket. Az ennek alapján megállapított négy paramétert mérjük fel a koordináta-rendszerben. Így megkapjuk az elemi hasáb két feszültségeket tartalmazó síkját (x és z, mivel y feszültségmentes) jellemző pontot. A pontokat összekötő vonal a kör átmérője, amelynek a σ tengellyel alkotott metszéspontja a kör középpontja. Ennek alapján a kör megrajzolható, amely elmetszi két pontban a σ tengelyt. Ennek a

két metszéspontnak a vízszintes koordinátái lesznek a főfeszültségek. A függőleges koordináta, vagyis a nyírófeszültségek értéke itt 0. A kör kerületén végtelen sok pont felvehető, amelyek mindegyike a hasábhoz hozzárendelhető végtelen sok síkhelyzet valamelyikét jellemzi, vagyis koordinátáival adja meg a síkon működő σ és τ feszültségeket. A kör kerületén fekvő pontok közül a σ tengellyel alkotott metszéspontok vízszintes koordinátái a szélső értékek, vagyis a legnagyobb és a legkisebb σ értékek, amelyeket főfeszültségeknek hívunk. Ez a megállapítás a hasáb vonatkozásában is ugyanezt jelenti, vagyis a felvehető valamennyi síkon működő normálfeszültség közül a főfeszültségek értéke a legnagyobb és a legkisebb, valamint ezekben a síkhelyzetekben nincs nyírófeszültség.



A kiindulási síkokhoz (x; z) képest az y tengely körül α szöggel elfordulva kapjuk meg azt a két síkhelyzetet a végtelen sok síkhelyzet közül, ahol a legnagyobb (σ_1) és a legkisebb (σ_2) normálfeszültség keletkezik, valamint ezeken a síkokon és csak ezeken a síkokon nem alakul ki nyírófeszültség. Az így meghatározott síkokat főfeszültségi síkoknak hívjuk, a normálisaik által meghatározott irányokat főirányoknak.

2.)



σ_x=-40 MPa

σ_z=60 MPa

τ_{xz}=-30 MPa

Határozza meg a pont főfeszültségeit, valamint rajzolja meg a feszültségi állapot Mohr-körét!

- főfeszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-40 + 60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-40 - 60}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 10 \pm 58{,}31$$

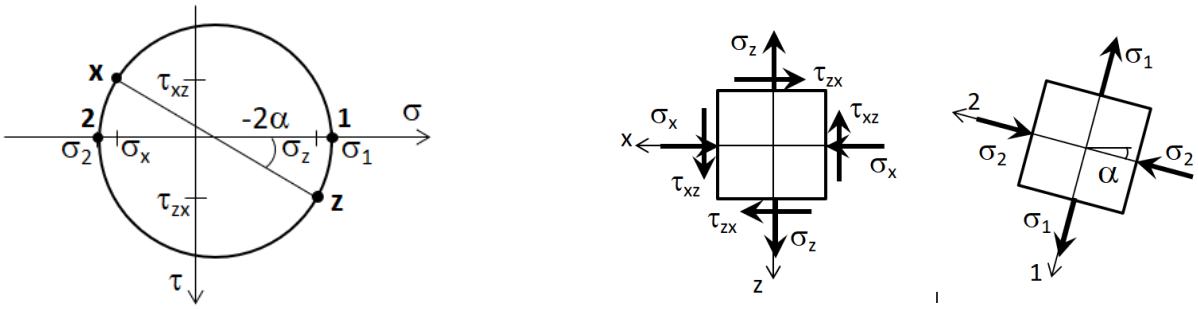
$\sigma_1 = 68{,}31\ MPa$ (a σ_1 mindig a maximum)

$\sigma_2 = -48{,}31\ MPa$ (a σ_2 mindig a minimum)

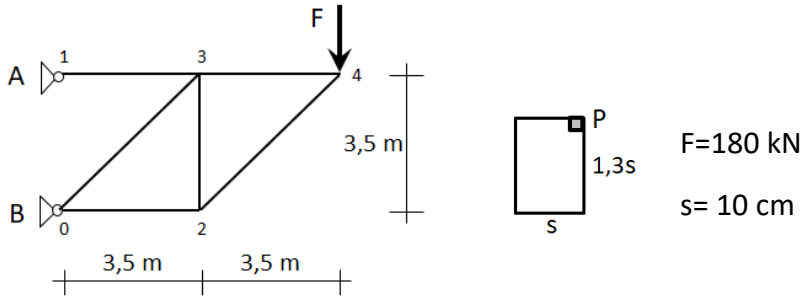
- főirányokhoz tartozó elfordulási szög:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot (-30)}{-40 - 60} = 0{,}60 \qquad \rightarrow \alpha = 15{,}48°$$

- feszültségi Mohr-kör és az elemi hasáb fősíkbeli helyzete:



3.)



F=180 kN

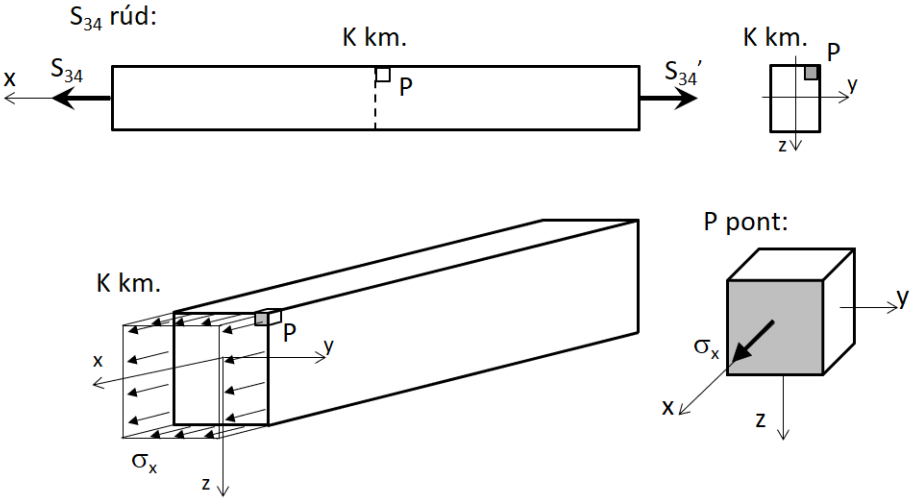
s= 10 cm

Határozza meg az S_{34} rúd K keresztmetszete P pontjának főfeszültségeit, valamint rajzolja meg a pont feszültségi állapotának Mohr-körét!

- keresztmetszeti feszültség:

S_{34}=180 kN (Húzott)

$$\sigma_x = \frac{S_{34}}{A} = \frac{180 \cdot 10^3}{130 \cdot 100} = 13{,}85\ MPa$$



A rúderő a km. síkjára merőlegesen működik, melynek hatására a P pont x normálisú síkjában húzófeszültség keletkezik. Az elemi hasáb beszürkített x normálisú síkja a keresztmetszeti síkban fekszik, vagyis a keresztmetszeti feszültség a hasáb ezen síkjában működik.

- főfeszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{13{,}85}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13{,}85 - 0}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{13{,}85}{2} \pm \frac{13{,}85}{2}$$

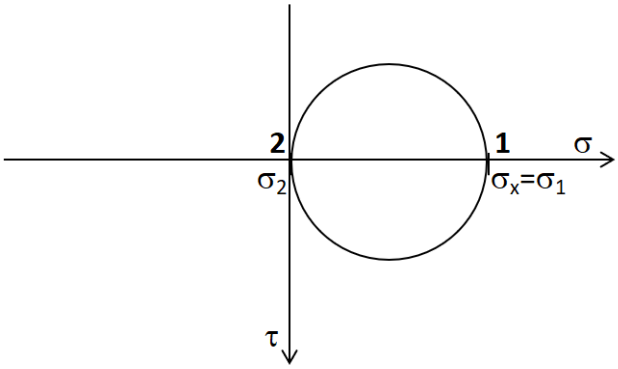
$\sigma_1 = 13{,}85\ MPa$

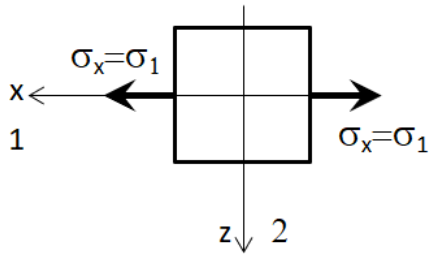
$\sigma_2 = 0\ MPa$

- főirányokhoz tartozó elfordulási szög:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot 0}{13{,}85 - 0} = 0 \qquad \rightarrow \alpha = 0°$$

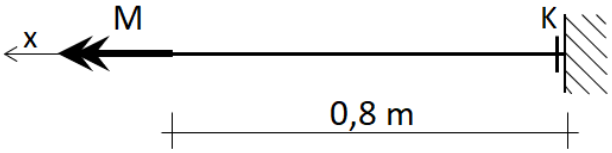
- feszültségi Mohr-kör és az elemi hasáb főfeszültségi helyzete:

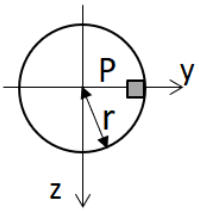




A kiindulási x normálisú sík az 1. főfeszültségi sík. A P pont a tiszta húzás feszültségi állapotában van.

4.)





M=15 kNm

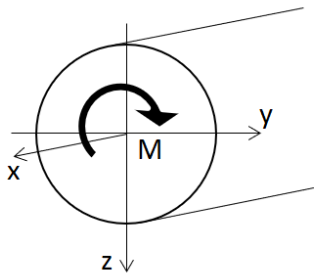
r= 5 cm

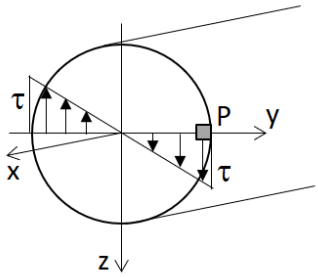
Határozza meg a csavart tartó K keresztmetszete P pontjának főfeszültségeit, valamint rajzolja meg a pont feszültségi állapotának Mohr-körét!

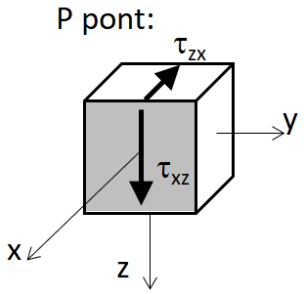
- keresztmetszeti feszültség a P pontban:

$$\tau_{xz} = -\frac{M}{I_0} r = -\frac{15 \cdot 10^6}{\frac{50^4 \cdot \pi}{2}} \cdot 50 = -76{,}39\ MPa$$

Az x normálisú síkban a pozitív (húzó) normálfeszültség -90°-os elfordításával kapjuk meg a síkban meghatározott nyírófeszültséget, ezért ennek előjele is negatív lesz.







Az elemi hasáb beszürkített x normálisú síkja a keresztmetszeti síkban fekszik, vagyis a keresztmetszeti feszültség a hasáb ezen síkjában működik. A csavarónyomaték a km.

síkjában forgat, melynek hatására a P pont x normálisú síkjában egy lefelé mutató z irányú nyírófeszültséget okoz. A hasáb z normálisú síkjában a nyírófeszültség dualitásbeli párja alakul ki.

- főfeszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{0+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + (-76{,}39)^2} = 0 \pm 76{,}39$$

$$\sigma_1 = 76{,}39\ MPa$$

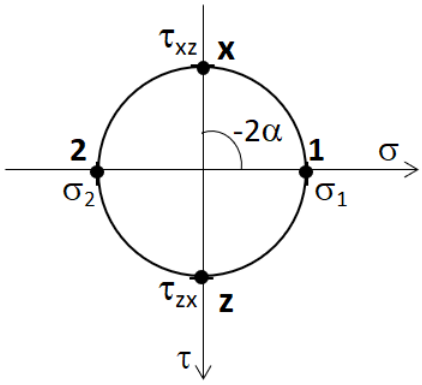
$$\sigma_2 = -76{,}39\ MPa$$

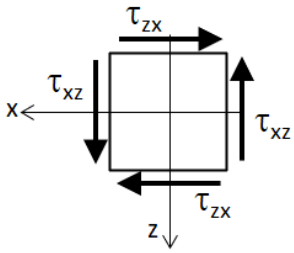
- főirányokhoz tartozó elfordulási szög:

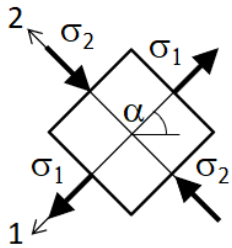
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot (-76{,}39)}{0 - 0}$$

$$\alpha = 45° \ \text{(tangens fv.} -\text{nek } 90° - \text{nál van szakadási helye)}$$

- feszültségi Mohr-kör és az elemi hasáb fősíkbeli helyzete:

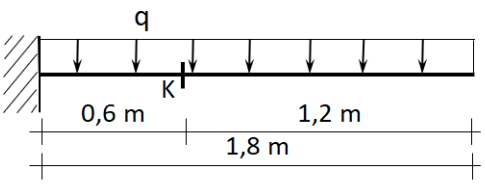




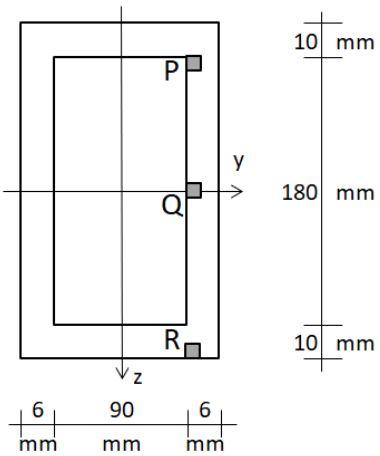


A P pont a tiszta nyírás feszültségi állapotában van.

5.)



q=12 kN/m



Határozza meg a hajlított-nyírt tartó K keresztmetszete P pontjának főfeszültségeit, valamint rajzolja meg a pont feszültségi állapotának Mohr-körét!

- K km. igénybevételei:

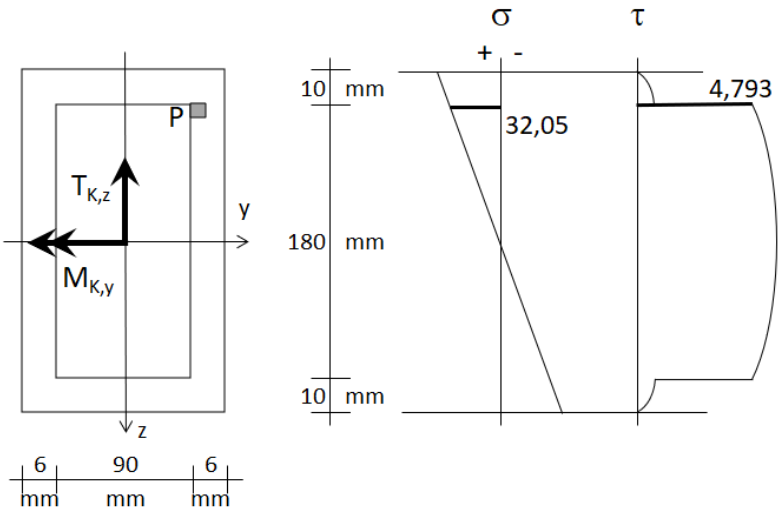
$$T_{K,z} = 12 \cdot 1{,}2 = 14{,}4\ kN$$

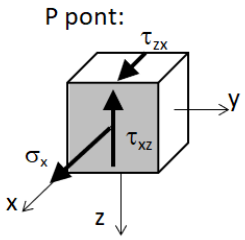
$$M_{K,y} = 12 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}6 = 8{,}64\ kNm$$

- keresztmetszeti feszültségek a P pontban:

$$\sigma_x = \frac{M_{K,y}}{I_y} z_p = \frac{8{,}64 \cdot 10^6}{\frac{102 \cdot 200^3}{12} - \frac{90 \cdot 180^3}{12}} \cdot 90 = 32{,}05\ MPa$$

$$\tau_{xz} = \frac{S'_y \cdot T_{K,z}}{I_y \cdot b} = \frac{102 \cdot 10 \cdot 95 \cdot 14{,}4 \cdot 10^3}{\left(\frac{102 \cdot 200^3}{12} - \frac{90 \cdot 180^3}{12}\right) \cdot 12} = 4{,}793 MPa$$





Az elemi hasáb beszürkített x normálisú síkja a keresztmetszeti síkban fekszik, vagyis a keresztmetszeti feszültségek a hasáb ezen síkjában működnek. A hajlítónyomaték az y tengely körül forgat, a km. felső részét húzza, az alsót nyomja. Ennek hatására a P pont x normálisú síkjában húzófeszültséget okoz. A nyíróerő z irányban felfelé mutat, ezáltal az x normálisú síkban egy felfelé mutató z irányú nyírófeszültséget hoz létre. A hasáb z normálisú síkjában a nyírófeszültség dualitásbeli párja alakul ki.

- főfeszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{32{,}05 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{32{,}05 - 0}{2}\right)^2 + 4{,}793^2} = 16{,}25 \pm 16{,}94$$

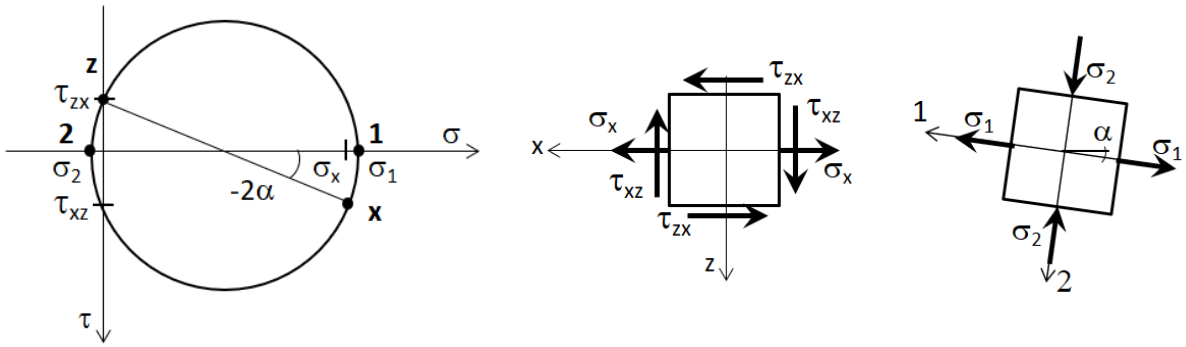
$$\sigma_1 = 33{,}19\ MPa$$

$$\sigma_2 = -0{,}69\ MPa$$

- főirányokhoz tartozó elfordulási szög:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot 4{,}793}{32{,}05 - 0} = 0{,}299 \qquad \rightarrow \alpha = 8{,}326°$$

- feszültségi Mohr-kör és az elemi hasáb főfeszültségi helyzete:

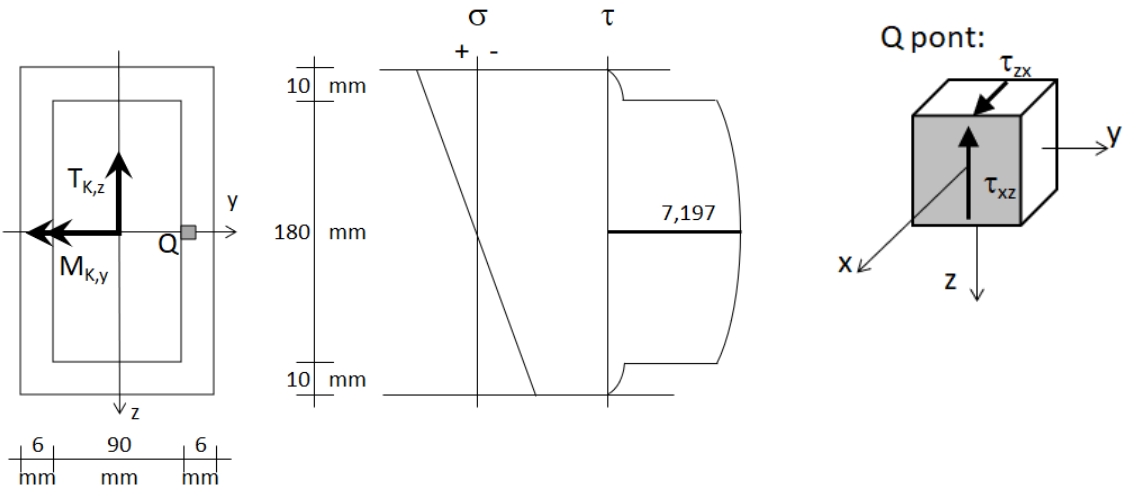


Határozza meg a hajlított-nyírt tartó K keresztmetszete Q pontjának főfeszültségeit, valamint rajzolja meg a pont feszültségi állapotának Mohr-körét!

- keresztmetszeti feszültségek a Q pontban:

$$\sigma_x = \frac{M_{K,y}}{I_y} z_Q = \frac{8{,}64 \cdot 10^6}{\frac{102 \cdot 200^3}{12} - \frac{90 \cdot 180^3}{12}} \cdot 0 = 0\ MPa$$

$$\tau_{xz} = \frac{S'_y \cdot T_{K,z}}{I_y \cdot b} = \frac{(102 \cdot 10 \cdot 95 + 2 \cdot 6 \cdot 90 \cdot 45) \cdot 14{,}4 \cdot 10^3}{\left(\frac{102 \cdot 200^3}{12} - \frac{90 \cdot 180^3}{12}\right) \cdot 12} = 7{,}197\ MPa$$



A Q pont a hajlítónyomaték semleges tengelyén fekszik, ezért a nyomaték hatására nem alakul ki feszültség ebben a pontban. A nyíróerő z irányban felfelé mutat, ezáltal a pont x normálisú síkjában egy felfelé mutató z irányú nyírófeszültséget hoz létre. A hasáb z normálisú síkjában a nyírófeszültség dualitásbeli párja alakul ki.

- főfeszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{0+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + 7{,}197^2} = 0 \pm 7{,}197$$

$$\sigma_1 = 7{,}197\ MPa$$

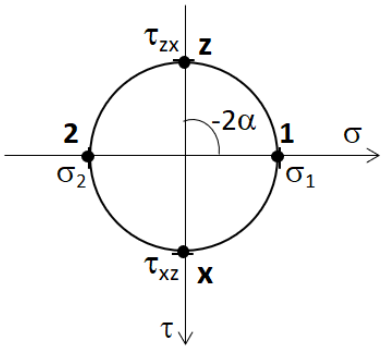
$$\sigma_2 = -7{,}197\ MPa$$

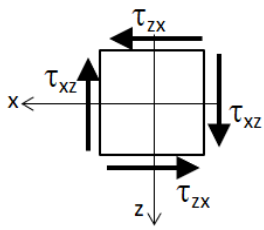
- főirányokhoz tartozó elfordulási szög:

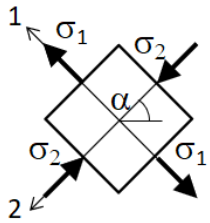
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot 7{,}197}{0-0}$$

$\alpha = 45°$ (tangens fv. $-$nek $90°$ $-$ nál van szakadási helye

- feszültségi Mohr-kör és az elemi hasáb főfeszültségi helyzete:







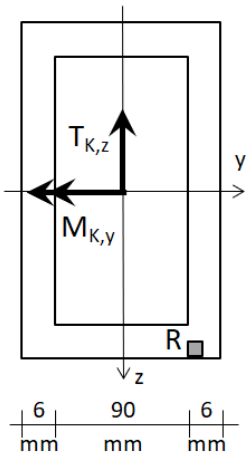
A Q pont a tiszta nyírás feszültségi állapotában van.

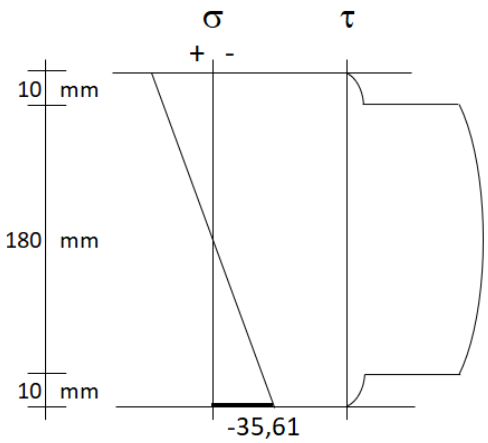
Határozza meg a hajlított-nyírt tartó K keresztmetszete R pontjának főfeszültségeit, valamint rajzolja meg a pont feszültségi állapotának Mohr-körét!

- keresztmetszeti feszültségek a R pontban:

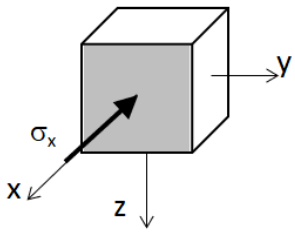
$$\sigma_x = -\frac{M_{K,y}}{I_y} z_R = -\frac{8{,}64 \cdot 10^6}{\frac{102 \cdot 200^3}{12} - \frac{90 \cdot 180^3}{12}} \cdot 100 = -35{,}61\ MPa$$

$$\tau_{xz} = \frac{S'_y \cdot T_{K,z}}{I_y \cdot b} = \frac{0 \cdot 14{,}4 \cdot 10^3}{\left(\frac{102 \cdot 200^3}{12} - \frac{90 \cdot 180^3}{12}\right) \cdot 12} = 0\ MPa$$





R pont:



A hajlítónyomaték az y tengely körül forgat, a km. felső részét húzza, az alsót nyomja. Ennek hatására az R pont x normálisú síkjában nyomófeszültséget okoz. A nyíróerő a keresztmetszet szélső pontjaiban nem okoz feszültséget, mivel ezen pontokban a dualitás nem tud érvényesülni, így az R pontban sem.

- főfeszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-35{,}61 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-35{,}61 - 0}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{-35{,}61}{2} \pm \frac{35{,}61}{2}$$

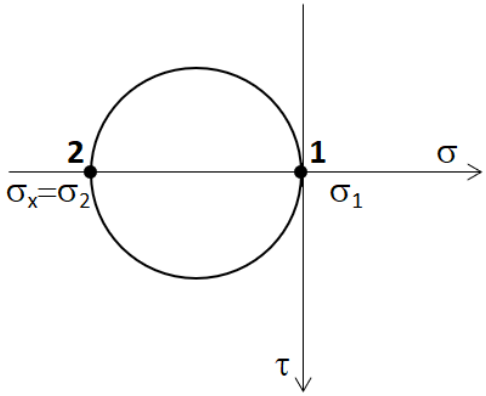
$$\sigma_1 = 0\ MPa$$

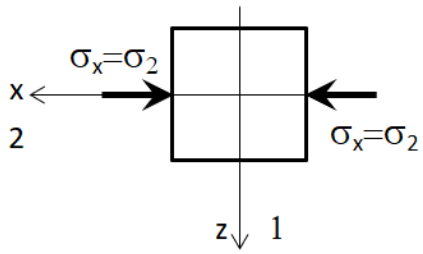
$$\sigma_2 = -35{,}61\ MPa$$

- főirányokhoz tartozó elfordulási szög:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2 \cdot 0}{-35{,}61 - 0} \qquad \rightarrow \quad \alpha = 0°$$

- feszültségi Mohr-kör és az elemi hasáb főfeszültségi helyzete:

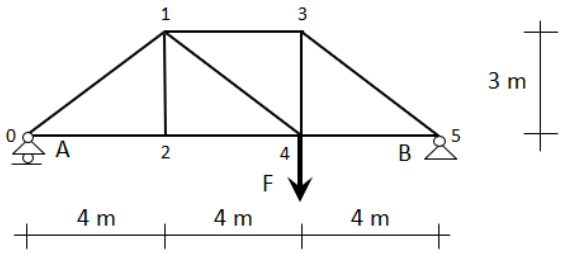




Az R pont a tiszta nyomás feszültségi állapotában van.

Mintapéldák általános Hooke-törvény

1.)

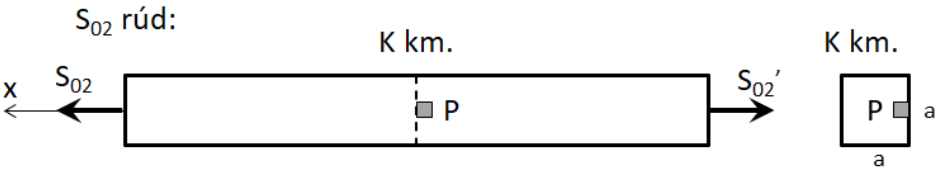


F=375 kN

E=10^4 MPa

ν=0,3

a=10 cm



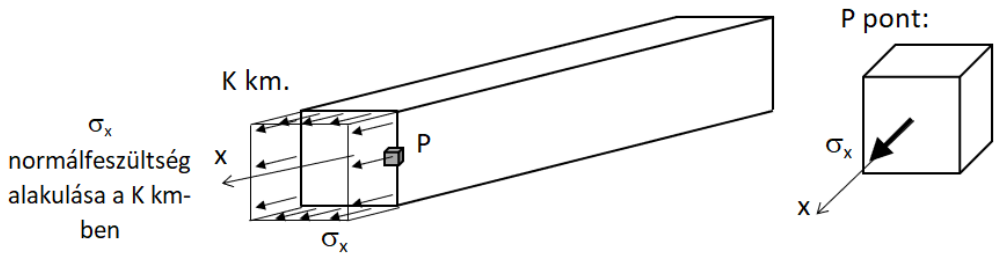
Határozza meg az S_{02} rúd K km.-nek P pontjában az egyes irányokhoz tartozó fajlagos megnyúlásokat!

- S_{02} rúderő:

$$S_{02} = A \cdot \frac{4}{3} = F \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = 375 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = 166{,}67\ kN$$

- feszültség a P pont x normálisú síkjában:

$$\sigma_x = \frac{S_{02}}{A} = \frac{166{,}67 \cdot 10^3}{100 \cdot 100} = 16{,}667\ MPa$$



- a P pont fajlagos megnyúlásai (egységnyi hosszúságú elemhez tartozó megnyúlások):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{16{,}667}{10^4} = 1{,}667 \cdot 10^{-3}$$

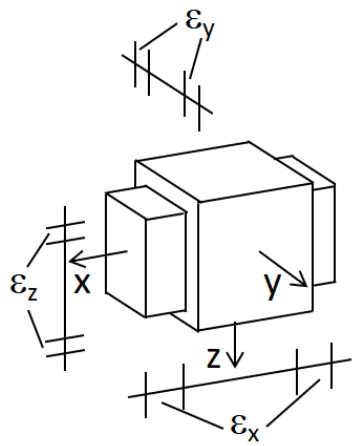
(fajlagos megnyúlás a feszültség irányában az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} = -0{,}3 \cdot \frac{16{,}667}{10^4} = -0{,}3 \cdot 1{,}667 \cdot 10^{-3} = -5 \cdot 10^{-4}$$

(harántkontrakció, vagyis fajlagos megnyúlás a feszültség irányára merőlegesen az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} = -0{,}3 \cdot \frac{16{,}667}{10^4} = -0{,}3 \cdot 1{,}667 \cdot 10^{-3} = -5 \cdot 10^{-4}$$

(harántkontrakció, vagyis fajlagos megnyúlás a feszültség irányára merőlegesen az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)



Az x irányú feszültség hatására vele azonos irányban megnyúlás keletkezett, rá merőleges irányban (y és z) pedig a feszültség előjelével ellentétes alakváltozás (összenyomódás) jött létre, amelyet harántkontrakciónak nevezünk. Tehát egy adott irányú feszültség mindhárom egymásra merőleges irányban alakváltozást okoz.

Határozza meg a rúd alakváltozását hossz- és keresztirányban is!

- a rúd hosszirányú alakváltozása (megnyúlás):

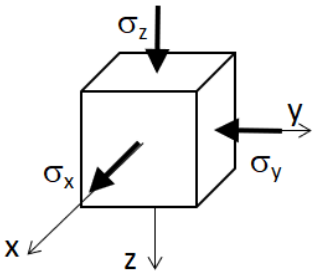
$$\Delta L = \varepsilon_x \cdot L = \frac{\sigma_x}{E} \cdot L = \frac{S_{02} \cdot L}{E \cdot A} = 1{,}667 \cdot 10^{-3} \cdot 4000 = 6{,}667\ mm$$

- a rúd keresztirányú alakváltozása:

$$\Delta a = \varepsilon_y \cdot a = \varepsilon_z \cdot a = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \cdot a = -5 \cdot 10^{-4} \cdot 100 = -0{,}05\ mm$$

A húzóerő hatására a rúd hosszirányú mérete megnőtt, a keresztirányú mérete pedig lecsökkent.

2.)



σ_x=45 MPa

σ_y=-15 MPa

σ_z=-25 MPa

E=10^5MPa

ν=0,35

Határozza meg a pont egyes irányaihoz tartozó fajlagos megnyúlásokat!

- a σ_x hatására kialakuló fajlagos megnyúlások:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{45}{10^5} = 4{,}50 \cdot 10^{-4}$$

(fajlagos megnyúlás a feszültség irányában az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} = -0{,}35 \cdot \frac{45}{10^5} = -0{,}35 \cdot 4{,}50 \cdot 10^{-4} = -1{,}575 \cdot 10^{-4}$$

(harántkontrakció, vagyis fajlagos megnyúlás a feszültség irányára merőlegesen az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} = -0{,}35 \cdot \frac{45}{10^5} = -0{,}35 \cdot 4{,}50 \cdot 10^{-4} = -1{,}575 \cdot 10^{-4}$$

(harántkontrakció, vagyis fajlagos megnyúlás a feszültség irányára merőlegesen az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

- a σ_y hatására kialakuló fajlagos megnyúlások:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{-15}{10^5} = -1{,}50 \cdot 10^{-4}$$

(fajlagos megnyúlás a feszültség irányában az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

$$\varepsilon_x = -\nu \cdot \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = -0{,}35 \cdot \frac{-15}{10^5} = -0{,}35 \cdot (-1{,}50 \cdot 10^{-4}) = 0{,}525 \cdot 10^{-4}$$

(harántkontrakció, vagyis fajlagos megnyúlás a feszültség irányára merőlegesen az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = -0{,}35 \cdot \frac{-15}{10^5} = -0{,}35 \cdot (-1{,}50 \cdot 10^{-4}) = 0{,}525 \cdot 10^{-4}$$

(harántkontrakció, vagyis fajlagos megnyúlás a feszültség irányára merőlegesen az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

- a σ_z hatására kialakuló fajlagos megnyúlások:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{-25}{10^5} = -2{,}50 \cdot 10^{-4}$$

(fajlagos megnyúlás a feszültség irányában az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

$$\varepsilon_x = -\nu \cdot \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = -0{,}35 \cdot \frac{-25}{10^5} = -0{,}35 \cdot (-2{,}50 \cdot 10^{-4}) = 0{,}875 \cdot 10^{-4}$$

(harántkontrakció, vagyis fajlagos megnyúlás a feszültség irányára merőlegesen az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = -0{,}35 \cdot \frac{-25}{10^5} = -0{,}35 \cdot (-2{,}50 \cdot 10^{-4}) = 0{,}875 \cdot 10^{-4}$$

(harántkontrakció, vagyis fajlagos megnyúlás a feszültség irányára merőlegesen az egyszerű Hooke-tv. felhasználásával)

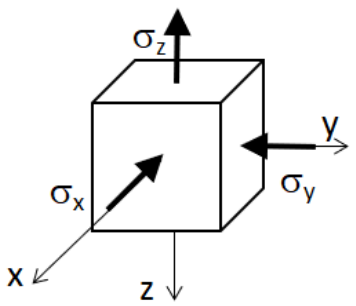
- a feszültségek együttes hatására kialakuló fajlagos megnyúlások az általános Hooke-tv. felhasználásával:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{10^5} \cdot [45 - 0{,}35 \cdot (-15 - 25)] = \\ = 5{,}9 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)\right] = \frac{1}{10^5} \cdot [-15 - 0{,}35 \cdot (45 - 25)] = \\ = -2{,}2 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{10^5} \cdot [-25 - 0{,}35 \cdot (45 - 15)] = \\ = -3{,}55 \cdot 10^{-4}$$

3.)



σ_x=-110 MPa

σ_y=-70 MPa

σ_z=90 MPa

E=3*10^4 MPa

ν=0,4

Határozza meg a pont egyes irányaihoz tartozó fajlagos megnyúlásokat!

- a feszültségek együttes hatására kialakuló fajlagos megnyúlások az általános Hooke-tv. felhasználásával:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \cdot [-110 - 0{,}4 \cdot (-70 + 90)] = \\ = -3{,}933 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)\right] = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \cdot [-70 - 0{,}4 \cdot (-110 + 90)] = \\ = -2{,}067 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \cdot [90 - 0{,}4 \cdot (-110 - 70)] = \\ = 5{,}40 \cdot 10^{-3}$$

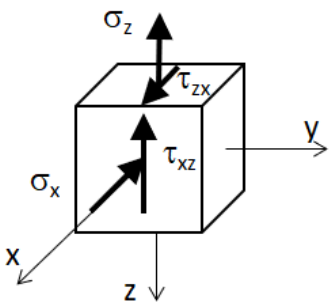
Határozza meg, mekkorának kell lennie a σ_x feszültségnek a többi paraméter változatlan értéke mellett, hogy az ε_z ne haladja meg a $4 \cdot 10^{-3}$ értéket!

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \leq 4 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{3 \cdot 10^4} \cdot [90 - 0{,}4 \cdot (\sigma_x - 70)] \leq 4 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_x \geq -5MPa$$

4.)



σ_x=-140 MPa

σ_z=80 MPa

τ_{xz}=50 MPa

E=2*10^5 MPa

ν=0,3

Határozza meg a pont főfeszültségeit a megadott feszültségi értékek segítségével, majd számítsa ki a főirányokhoz tartozó fajlagos megnyúlásokat!

- főfeszültségek meghatározása:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2} = \frac{-140 + 80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-140 - 80}{2}\right)^2 + 50^2}$$

$$\sigma_1 = -30 + 120{,}83 = 90{,}83\ MPa$$

$$\sigma_2 = -30 - 120{,}83 = -150{,}83\ MPa$$

$$\sigma_3 = 0$$

- fajlagos megnyúlások a főirányokban az általános Hooke-tv. felhasználásával:

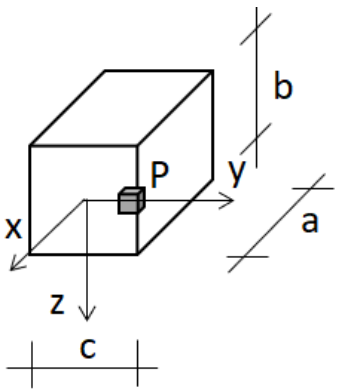
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [90{,}83 - 0{,}3 \cdot (-150{,}83 + 0)] = 6{,}804 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-150{,}83 - 0{,}3 \cdot (90{,}83 + 0)] = -8{,}904 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0{,}3 \cdot (90{,}83 - 150{,}83)] = 9{,}00 \cdot 10^{-5}$$

Mintapéldák általános Hooke-törvény hőmérséklet-változás esetén

1.)



a=40 cm

b=25 cm

c=20 cm

ΔT=35 C°

α=1,2*10^{-5} 1/C°

Határozza meg a test P pontjában az egyes irányokhoz tartozó fajlagos megnyúlásokat a hőmérséklet-változás hatására!

$$\varepsilon_x = \alpha \cdot \Delta T = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 35 = 4{,}2 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \alpha \cdot \Delta T = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 35 = 4{,}2 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \alpha \cdot \Delta T = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 35 = 4{,}2 \cdot 10^{-4}$$

A hőmérséklet-változás hatására mindhárom irányban azonos mértékű fajlagos megnyúlás keletkezik.

Határozza meg a test alakváltozását mindegyik irányban!

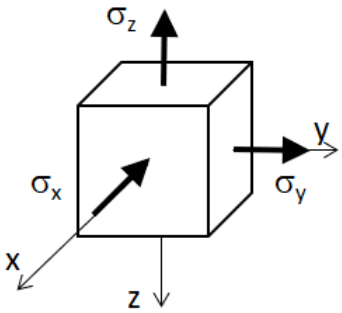
$$\Delta a = \varepsilon_x \cdot a = \alpha \cdot \Delta T \cdot a = 4{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 400 = 0{,}168\, mm$$

$$\Delta c = \varepsilon_y \cdot c = \alpha \cdot \Delta T \cdot c = 4{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 200 = 0{,}084\, mm$$

$$\Delta b = \varepsilon_z \cdot b = \alpha \cdot \Delta T \cdot b = 4{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 250 = 0{,}105\, mm$$

A hőmérséklet növekedésével minden irányban méretnövekedés alakul ki.

2.)



σ_x=-35 MPa

σ_y=55 MPa

σ_z=20 MPa

E=10^5 MPa

ν=0,3

ΔT=30 C°

α=10^{-5} 1/C°

Határozza meg a pont egyes irányaihoz tartozó fajlagos megnyúlásokat!

- a feszültségek hatására kialakuló fajlagos megnyúlások:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{10^5} \cdot [-35 - 0{,}3 \cdot (55 + 20)] = -5{,}75 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)\right] = \frac{1}{10^5} \cdot [55 - 0{,}35 \cdot (-35 + 20)] = 6{,}025 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{10^5} \cdot [20 - 0{,}35 \cdot (-35 + 55)] = 1{,}30 \cdot 10^{-4}$$

- a hőmérséklet-változás hatására kialakuló fajlagos megnyúlások:

$$\varepsilon_x = \alpha \cdot \Delta T = 10^{-5} \cdot 30 = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \alpha \cdot \Delta T = 10^{-5} \cdot 30 = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \alpha \cdot \Delta T = 10^{-5} \cdot 30 = 3 \cdot 10^{-4}$$

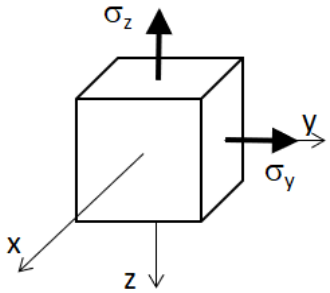
- a feszültségek és a hőmérséklet-változás hatására kialakuló fajlagos megnyúlások az általános Hooke-tv. felhasználásával:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T = -5{,}75 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-4} = -2{,}75 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T = 6{,}025 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-4} = 9{,}025 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T = 1{,}30 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-4} = 4{,}3 \cdot 10^{-4}$$

3.)



σ_y=70 MPa

σ_z=50 MPa

E=8*10^4 MPa

ν=0,4

ΔT=-20 C°

α=0,8*10^{-5} 1/C°

Határozza meg, mekkora σ_x esetén nem keletkezik x irányú fajlagos megnyúlás! Ezután számítsa ki a többi irányban is az alakváltozásokat!

- σ_x meghatározása:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{8 \cdot 10^4} \cdot [\sigma_x - 0{,}4 \cdot (70 + 50)] + 0{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot (-20) = 0$$

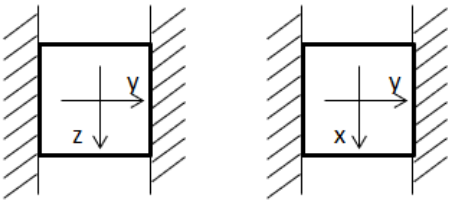
$$\sigma_x = 60{,}8\ MPa$$

- fajlagos megnyúlások meghatározása:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T = \frac{1}{8 \cdot 10^4} \cdot [70 - 0{,}4 \cdot (60{,}8 + 50)] + 0{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot (-20) = \\ = 1{,}61 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T = \frac{1}{8 \cdot 10^4} \cdot [50 - 0{,}4 \cdot (60{,}8 + 70)] + 0{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot (-20) = \\ = -1{,}89 \cdot 10^{-4}$$

4.)



$E=2*10^5$ MPa $\Delta T=50$ C°

$\nu=0,3$ $\alpha=1,2*10^{-5}$ 1/C°

Határozza meg, mekkora feszültségek és fajlagos megnyúlások keletkeznek a hőmérséklet-változás hatására a hasábban, ha az alakváltozás gátolt y irányban!

- számítás nélkül megállapítható értékek:

  $\varepsilon_y = 0$ - mivel y irányban gátolt az alakváltozás, vagyis nem jöhet létre megnyúlás ezen irányban

  $\sigma_x = 0$ - mivel x irányban nem gátolt az alakváltozás, így nincs szükség az alakváltozás létrejöttét meggátoló feszültség kialakulására ezen irányban

  $\sigma_z = 0$ - mivel z irányban nem gátolt az alakváltozás, így nincs szükség az alakváltozás létrejöttét meggátoló feszültség kialakulására ezen irányban

- számítással megállapítható értékek:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha \cdot \Delta T = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\sigma_y - 0{,}3 \cdot (0 + 0)\right] + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = 0$$

$\sigma_y = -120\ MPa$ – ekkora feszültség szükséges ahhoz, hogy y irányban ne keletkezzen alakváltozás a hőmérséklet-változás hatására

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0{,}3 \cdot (-120 + 0)] + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 50$$

$\varepsilon_x = 7{,}8 \cdot 10^{-4}$ – az y irányú feszültség és a hőmérséklet-változás hatására kialakuló fajlagos megnyúlás x irányban

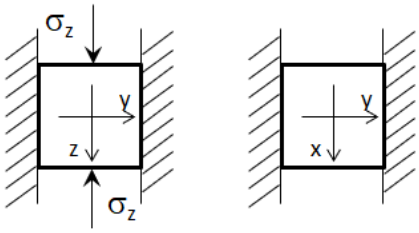
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0{,}3 \cdot (0 - 120)] + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 50$$

$\varepsilon_z = 7{,}8 \cdot 10^{-4}$ – az y irányú feszültség és a hőmérséklet-változás hatására kialakuló fajlagos megnyúlás z irányban

Megállapítható, hogy három ismeretlen paraméter számítható az általános Hooke-tv. három egyenletével.

5.)



σ_z=-80 MPa ΔT=40 C°

E=2*10^5 MPa α=1,2*10^{-5} 1/C°

ν=0,3

Határozza meg, mekkora feszültségek és fajlagos megnyúlások keletkeznek a hőmérséklet-változás és a feszültség hatására a hasábban, ha az alakváltozás gátolt y irányban!

- számítás nélkül megállapítható értékek:

  $\varepsilon_y = 0$ - mivel y irányban gátolt az alakváltozás, vagyis nem jöhet létre megnyúlás ezen irányban

  $\sigma_x = 0$ - mivel x irányban nem gátolt az alakváltozás, így nincs szükség az alakváltozás létrejöttét meggátoló feszültség kialakulására ezen irányban

  $\sigma_z = -80\ MPa$

- számítással megállapítható értékek:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha \cdot \Delta T = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[\sigma_y - 0{,}3 \cdot (0 - 80)\right] + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 40 = 0$$

$\sigma_y = -120\ MPa$ – ekkora feszültség szükséges ahhoz, hogy y irányban ne keletkezzen alakváltozás a hőmérséklet-változás és a z irányú feszültség hatására

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0{,}3 \cdot (-120 - 80)] + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 40$$

$\varepsilon_x = 7{,}8 \cdot 10^{-4}$ – az y és z irányú feszültség, valamint a hőmérséklet-változás hatására kialakuló fajlagos megnyúlás x irányban

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-80 - 0{,}3 \cdot (0 - 120)] + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 40$$

$\varepsilon_z = 2{,}6 \cdot 10^{-4}$ – az y és z irányú feszültség, valamint a hőmérséklet-változás hatására kialakuló fajlagos megnyúlás z irányban

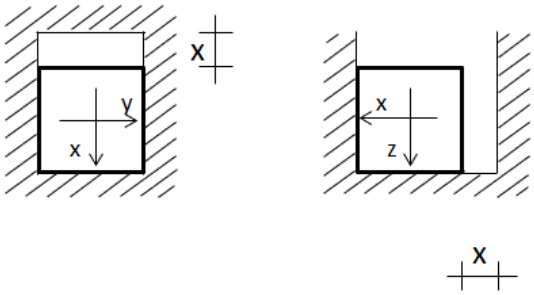
Határozza meg, mekkora hőmérséklet-változás esetén nem alakul ki feszültség az oldallapokban (y irányban)!

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha \cdot \Delta T = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0{,}3 \cdot (0 - 80)] + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta T = 0$$

$\Delta T = -10\ C°$ – a z irányú feszültség mellett ekkora hőmérséklet-változás esetén nem jön létre gátolt hőtágulás y irányban, vagyis nem alakul ki feszültség és fajlagos megnyúlás sem. A z irányú feszültség pont ugyanakkora megnyúlást okoz y irányban, mint amekkora összenyomódást a hőmérséklet-változás.

6.)



$E=1{,}5*10^5$ MPa

$\nu=0{,}35$

$x=3*10^{-4}$

$\alpha=10^{-5}$ 1/C°

Határozza meg, mekkora hőmérséklet-változás esetén tűnik el éppen a hasáb és az oldalfal közötti x távolság!

- számítás nélkül megállapítható értékek:

  $\varepsilon_y = 0$ - mivel y irányban gátolt az alakváltozás, vagyis nem jöhet létre megnyúlás ezen irányban

  $\sigma_x = 0$ - mivel x irányban nem gátolt az alakváltozás (a keletkező megnyúlás éppen az x távolsággal egyenlő), így nincs szükség az alakváltozás létrejöttét meggátoló feszültség kialakulására ezen irányban

  $\sigma_z = 0$ - mivel z irányban nem gátolt az alakváltozás, így nincs szükség az alakváltozás létrejöttét meggátoló feszültség kialakulására ezen irányban

  $\varepsilon_x = x = 3 \cdot 10^{-4}$

- számítással megállapítható értékek:

  $$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \cdot \Delta T = 3 \cdot 10^{-4}$$
  $$\rightarrow \sigma_y; \Delta T$$

  $$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \cdot \Delta T = 0 \qquad \rightarrow \sigma_y; \Delta T$$

  Mindkét egyenlet két ismeretlent tartalmaz (ΔT; σ_y), ezért egyenletrendszerként oldhatóak meg.

  $$\varepsilon_x = \frac{1}{1{,}5 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0{,}35 \cdot (\sigma_y + 0)] + 10^{-5} \cdot \Delta T = 3 \cdot 10^{-4}$$

  $$\varepsilon_x = -0{,}2333 \cdot \sigma_y + \Delta T = 30$$

  $$\Delta T = 30 + 0{,}2333 \cdot \sigma_y$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{1{,}5 \cdot 10^5} \cdot \left[\sigma_y - 0{,}35 \cdot (0 + 0)\right] + 10^{-5} \cdot \Delta T = 0$$

$$\varepsilon_y = 0{,}6667 \cdot \sigma_y + \Delta T = 0$$

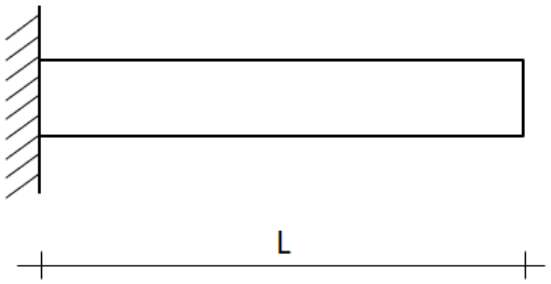
$$\varepsilon_y = 0{,}6667 \cdot \sigma_y + 30 + 0{,}2333 \cdot \sigma_y = 0$$

$$\sigma_y = -33{,}33\ MPa$$

$$\Delta T = 30 + 0{,}2333 \cdot \sigma_y = 30 + 0{,}2333 \cdot (-33{,}33) = 22{,}22\ C°$$

Mintapéldák hőmérséklet-változás hatása tartószerkezetek esetében

1.)



L=2,6 m

ΔT=28 C°

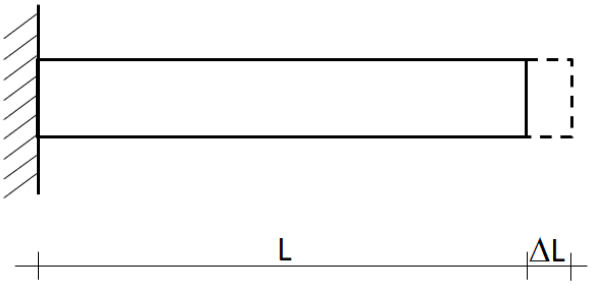
α=10^{-5} 1/C°

E=1,2*10^5 MPa

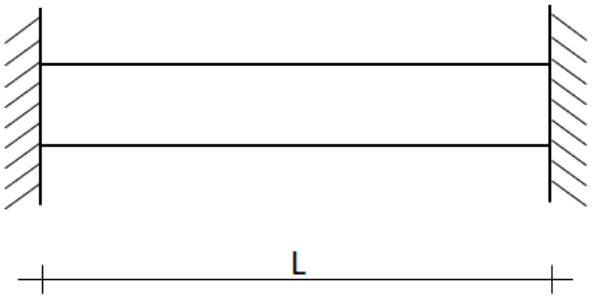
A=5000 mm^2

Határozza meg a tartó hosszváltozásának mértékét a hőmérséklet-változás hatására!

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta \mathrm{T} \cdot L = 10^{-5} \cdot 28 \cdot 2600 = 0{,}728\, mm$$



2.)



L=2,6 m

ΔT=28 C°

α=10^{-5} 1/C°

E=1,2*10^5 MPa

A=5000 mm^2

Határozza meg, mekkora feszültség keletkezik a keresztmetszetekben a hőmérséklet-változás hatására!

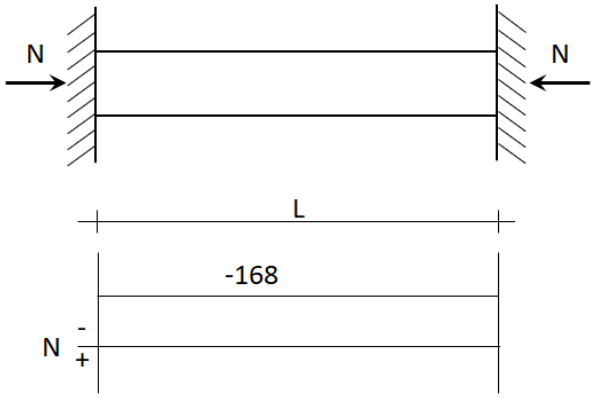
$\Delta L = 0$ - a két oldalon befogott tartó esetében a hőmérséklet-változás hatására nem tud létrejönni a megnyúlás (gátolt hőtágulás valósul meg), vagyis értéke 0 lesz. A keresztmetszetekben normálfeszültségek, eredőjükként normálerők keletkeznek, amelyek megakadályozzák a tengelyirányú alakváltozás, megnyúlás kialakulását.

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta \mathrm{T} \cdot L + \frac{N \cdot L}{E \cdot A} = 0$$

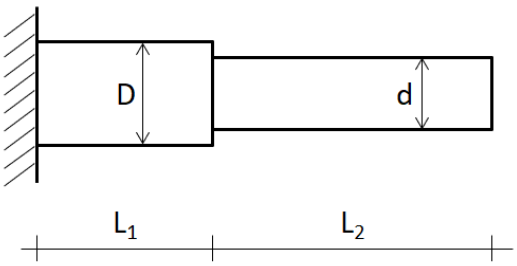
$$\Delta L = 10^{-5} \cdot 28 \cdot 2600 + \frac{N \cdot 2600}{1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 5000} = 0$$

$$N = -168\ kN$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-168 \cdot 10^3}{5000} = -33{,}6\ MPa$$



3.)



L_1=0,8 m ΔT=32 C°

L_2=1,2 m α=1,2*10^{-5} 1/C°

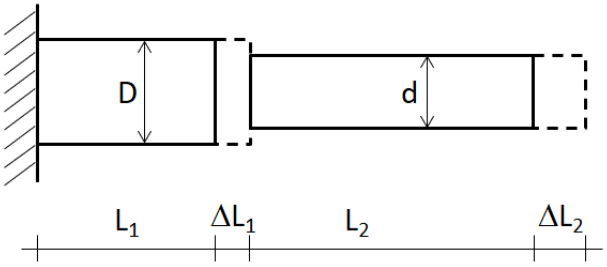
D=10 cm E=2*10^5 MPa

d=7 cm

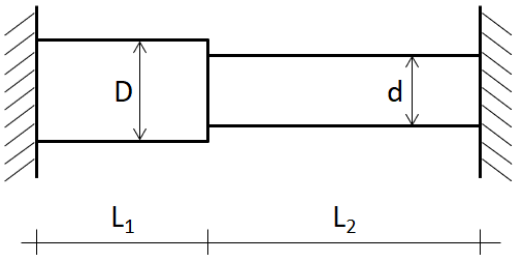
Határozza meg a tartó hosszváltozásának mértékét a hőmérséklet-változás hatására!

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_1 = \alpha \cdot \Delta \mathrm{T} \cdot L_1 + \alpha \cdot \Delta \mathrm{T} \cdot L_2$$

$$\Delta L = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 32 \cdot 800 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 32 \cdot 1200 = 0{,}307 + 0{,}461 = 0{,}768\ mm$$



4.)



L_1=0,8 m ΔT=32 C°

L_2=1,2 m α=1,2*10^{-5} 1/C°

D=10 cm E=2*10^5 MPa

d=7 cm

Határozza meg, mekkora feszültség keletkezik a kör alakú keresztmetszetekben a hőmérséklet-változás hatására!

$\Delta L = 0$ - ezen tartó esetében is gátolt hőtágulás valósul meg, vagyis tengelyirányú megnyúlásának értéke 0 lesz. A keresztmetszetekben az egyes szakaszok eltérő keresztmetszeti területe miatt eltérő normálfeszültségek ébrednek, amelyek eredőiként létrejövő normálerőknek viszont azonosnak kell lennie. A normálfeszültségeknek és a normálerőnek akkorának kell

lenniük, hogy a hőmérséklet-változás hatására kialakulni akaró tengelyirányú alakváltozások, megnyúlások létrejöttét megakadályozzák.

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L + \frac{N \cdot L_1}{E \cdot A_1} + \frac{N \cdot L_2}{E \cdot A_2} = 0$$

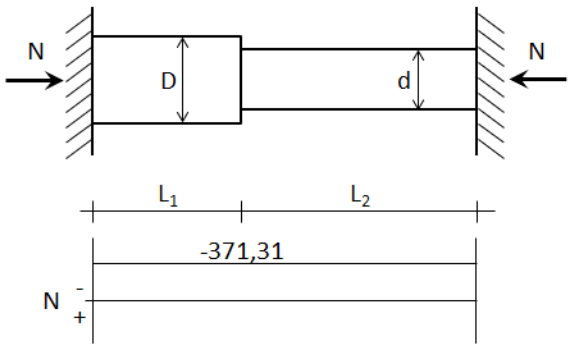
$$\Delta L = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 32 \cdot (800 + 1200) + \frac{N \cdot 800}{2 \cdot 10^5 \cdot \frac{100^2 \cdot \pi}{4}} + \frac{N \cdot 1200}{2 \cdot 10^5 \cdot \frac{70^2 \cdot \pi}{4}} = 0$$

$$\Delta L = 0{,}768 + 2{,}068 \cdot 10^{-6} \cdot N = 0$$

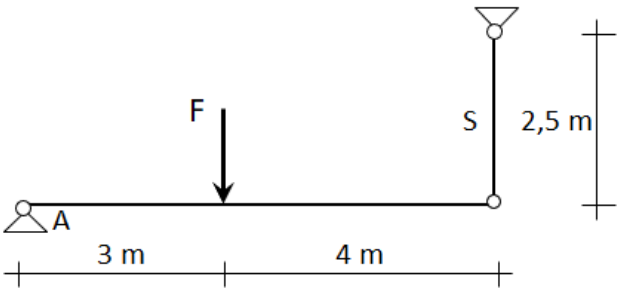
$$N = -371{,}31\ kN$$

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} = \frac{-371{,}31 \cdot 10^3}{\frac{100^2 \cdot \pi}{4}} = -47{,}28\ MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_2} = \frac{-371{,}31 \cdot 10^3}{\frac{70^2 \cdot \pi}{4}} = -96{,}48\ MPa$$



5.)



F=250 kN

ΔT=25 C°

α=1,2*10^{-5} 1/C°

E=2*10^5 MPa

A=1500 mm^2

Határozza meg, mekkora hosszváltozást szenved az S rúd a terhelés és a hőmérséklet-változás hatására!

- a rúderő meghatározása:

$$S = F \cdot \frac{3}{7} = 250 \cdot \frac{3}{7} = 107{,}14\ kN$$

- hosszváltozás a terhelés hatására:

$$\Delta L = \frac{S \cdot L}{E \cdot A} = \frac{107{,}14 \cdot 10^3 \cdot 2500}{2 \cdot 10^5 \cdot 1500} = 0{,}893\ mm$$

- hosszváltozás a hőmérséklet-változás hatására:

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 25 \cdot 2500 = 0{,}75\ mm$$

- hosszváltozás a terhelés és a hőmérséklet-változás együttes hatására:

$$\Delta L = \frac{S \cdot L}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 0{,}893 + 0{,}75 = 1{,}643\ mm$$

Számítsa ki, mekkora feszültség ébred a rúd keresztmetszeteiben!

$$\sigma = \frac{S}{A} = \frac{107{,}14 \cdot 10^3}{1500} = 71{,}43 \text{ MPa}$$

arúdkeresztmetszetekben csak a rúderő hatására keletkezik feszültség, mivel a hőmérséklet-változás okozta alakváltozás szabadon végbe mehet, vagyis nincs gátolt hőtágulás.

Határozza meg, mekkora lehet az F erő maximuma a többi paraméter változatlan értéke mellett, ha a rúd megnyúlására megengedett érték ΔL_e=2 mm!

$$\Delta L = \frac{S \cdot L}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L \leq \Delta L_e$$

$$\Delta L = \frac{S \cdot 2500}{2 \cdot 10^5 \cdot 1500} + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 25 \cdot 2500 \leq 2$$

$$S_{max} = 150\ kN$$

$$F_{max} = S_{max} \cdot \frac{7}{3} = 150 \cdot \frac{7}{3} = 350\ kN$$

Határozza meg, mekkora lehet a ΔT hőmérséklet-változás maximuma a többi paraméter változatlan értéke mellett, ha a rúd megnyúlására megengedett érték ΔL_e=2 mm!

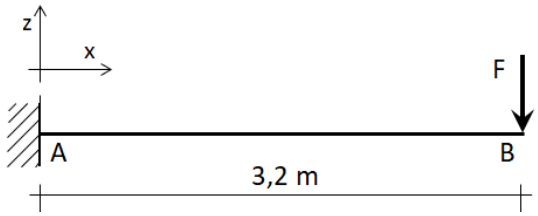
$$\Delta L = \frac{S \cdot L}{E \cdot A} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L \leq \Delta L_e$$

$$\Delta L = \frac{107{,}14 \cdot 10^3 \cdot 2500}{2 \cdot 10^5 \cdot 1500} + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta T \cdot 2500 \leq 2$$

$$\Delta T_{max} = 36{,}91\ C°$$

Mintapéldák munkatételek

1.)

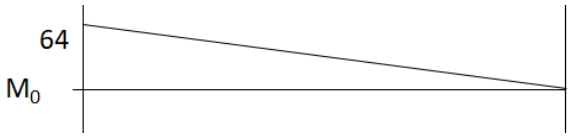


F=20 kN

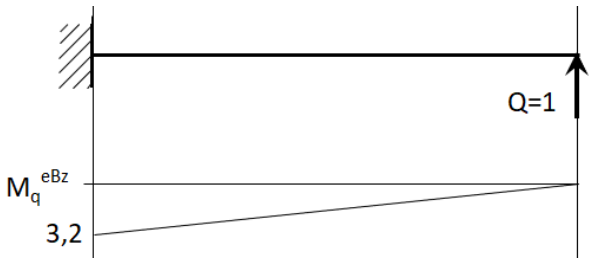
EI=60000 kNm^2 (hajlító merevség)

Határozza meg a B pont abszolút eltolódását (e_{Bz}) a terhelés hatására!

- nyomatéki ábra megrajzolása a kezdeti teherből (F):



- az e_{Bz}-vel munkát végző egységnyi virtuális erő felvétele és a hatására kialakuló nyomatéki ábra megrajzolása:



A B pontban egy függőleges eltolódással a mechanikai munka (W=F*s) összefüggése alapján egy B pontban működő függőleges erő végezhet munkát. Ennek megfelelően vegyünk fel egy erőt, melynek nagyságát egynek, irányát a pozitív tengelyiránnyal megegyezőnek választjuk. Mivel ez az erő eredetileg nincs a tartón, mi képzeljük oda a megfelelő összefüggés felírásának érdekében, ezért virtuális erőnek hívjuk.

- az idegen munkák tételének felírása és a kérdéses elmozdulás meghatározása:

  $W_k = W_b$

  A tétel kimondja, hogy a külső munka megegyezik a belső (alakváltozási) munkával (energia-változással).

  $$Q \cdot e_{Bz} = \int \frac{M_0 \cdot M_q{}^{e_{Bz}}}{EI} dx$$

  Külső munkát külső erő (virtuális erő) végez a kérdéses kezdeti teher okozta eltolódáson, amely az összefüggés bal oldalán található. Mivel nem ugyanaz végzi a munkát, mint aki okozta az elmozdulást, ezért idegen munkáról beszélünk. Belső munkát belső erők (a virtuális erő okozta nyomatéki igénybevételek) végeznek a tartó kezdeti teher okozta deformációin, amely az összefügés jobb oldalán található és a tartó hossza mentén történő szorzatintegrálként jelenik meg. Ebben az esetben is idegen munkáról beszélünk. Az energiamegmaradás alapján a két oldal egyenlő.

  $$Q \cdot (e_{Bz}) = \int M_0 \cdot M_q{}^{e_{Bz}} dx$$

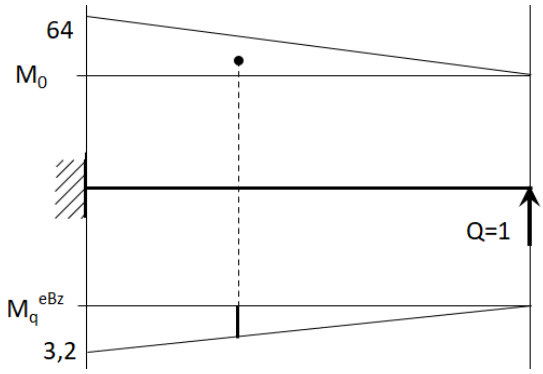
Ha a jobb oldalon nem osztunk le a tartó hajlító merevségével (EI), akkor a kérdéses elmozdulás nagyított értékét számíthatjuk ki.

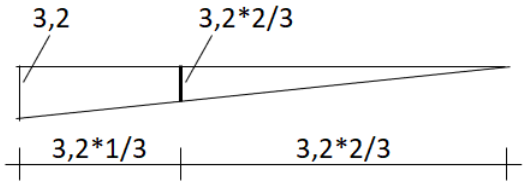
$$1 \cdot (e_{Bz}) = -\frac{64 \cdot 3{,}2}{2} \cdot 3{,}2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$(e_{Bz}) = -218{,}45\ kNm^3\ \downarrow (nagyított\ érték)$$

$$e_{Bz} = \frac{(e_{Bz})}{EI} = \frac{-218{,}45}{60000} = -3{,}641 \cdot 10^{-3}\ m\ \downarrow$$

A végeredmény negatív előjele a felvett virtuális erővel ellentétes irányú megoldást jelent.

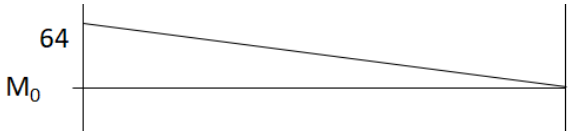




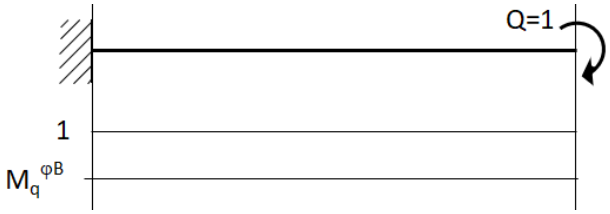
A szorzatintegrál meghatározása grafikusan történik. Vesszük az M_0 ábra területét, amelyet szorzunk az M_0 ábra súlypontja alatt az M_q ábrából vett metszékkel. Ez a nyomatéki metszék az M_0 ábra súlypontja elhelyezkedésének arányai alapján adódik. A szorzat előjele a két ábra elhelyezkedése alapján határozható meg. Ha a két szorzandó ábra azonos oldalon van, akkor pozitív a szorzat, ha ellenkező oldalon helyezkednek el, akkor negatív a szorzat.

Határozza meg a B pont abszolút elfordulását (φ_B) a terhelés hatására!

- nyomatéki ábra megrajzolása a kezdeti teherből (F):



- a φ_B-vel munkát végző egységnyi virtuális nyomaték felvétele és a hatására kialakuló nyomatéki ábra megrajzolása:



A B pontban egy elfordulással a mechanikai munka (W=M*φ) összefüggése alapján egy B pontban működő nyomaték végezhet munkát. Ennek megfelelően vegyünk fel egy nyomatékot, melynek nagyságát egynek, irányát az óra járásával megegyezőnek választjuk. Mivel ez a nyomaték eredetileg nincs a tartón, mi képzeljük oda a megfelelő összefüggés felírásának érdekében, ezért virtuális nyomatéknak hívjuk.

- az idegen munkák tételének felírása és a kérdéses elmozdulás meghatározása:

$$W_k = W_b$$

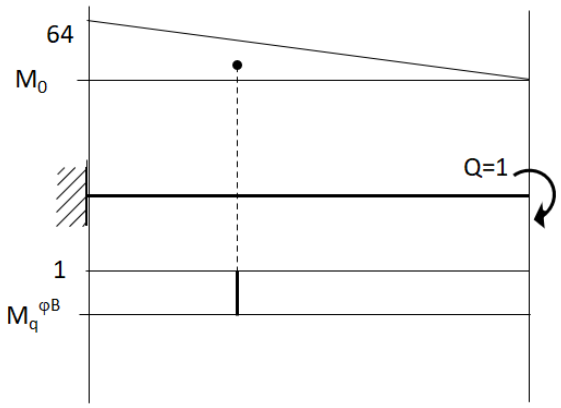
$$Q \cdot \varphi_B = \int \frac{M_0 \cdot M_q{}^{\varphi_B}}{EI} dx$$

$$1 \cdot (\varphi_B) = \frac{64 \cdot 3{,}2}{2} \cdot 1$$

$$(\varphi_B) = 102{,}4\ kNm^2 \curvearrowright\ (nagyított\ érték)$$

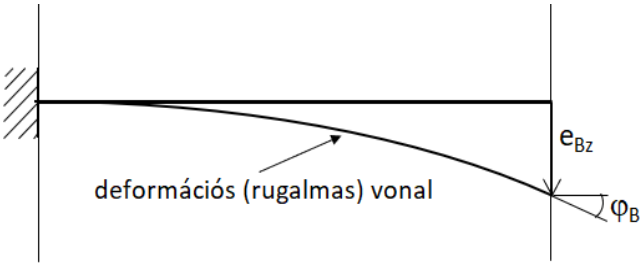
$$\varphi_B = \frac{(\varphi_B)}{EI} = \frac{102{,}4}{60000} = 1{,}707 \cdot 10^{-3} \curvearrowright$$

A végeredmény pozitív előjele a felvett virtuális nyomatékkal azonos irányú megoldást jelent.



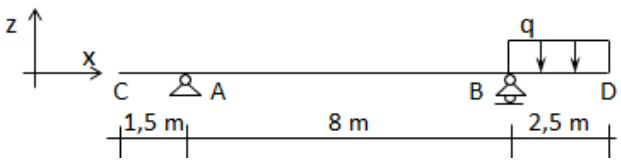
A szorzatintegrál meghatározása grafikusan történik. Vesszük az M_0 ábra területét, amelyet szorzunk az M_0 ábra súlypontja alatt az M_q ábrából vett metszékkel. Ez a nyomatéki metszék az M_0 ábra súlypontja elhelyezkedésének arányai alapján adódik. Mivel ebben az esetben az M_q ábra konstans, azt bárhol elmetszve ugyanazt az értéket kapjuk. A szorzat előjele a két ábra elhelyezkedése alapján határozható meg. Ebben az esetben a két ábra azonos oldalon van, ezért a szorzat pozitív.

Határozza meg a tartó deformációs vonalát közelítőleg grafikusan!



A deformációs vonal megmutatja a tartó hossza mentén kialakuló alakváltozásokat és elmozdulásokat az aktuális terhelés hatására.
A tartó görbülete matematikai összefüggésben áll a nyomatéki igénybevétellel. Tudjuk, hogy a nyomatéki ábra mindig a húzott oldalon van. Ebben az esetben a kiindulási vonalhoz képest felül helyezkedik el a teljes hossz mentén. Ez azt jelenti, hogy a tartónak ugyancsak a teljes hossz mentén felül húzottnak kell lennie, vagyis felülről domború végig a deformációs vonal.
A kapott elmozdulás-összetevőknek (e_{Bz} ; φ_B) a deformációs vonalba illeszthetőnek kell lennie, mint ahogyan az ábrán látható is.
A tartók megtámasztásai a pontnak olyan típusú elmozdulás-összetevőit gátolják meg, amilyen típusú reakciók ébrednek benne. Ebben az esetben a befogás, mint legmerevebb megtámasztás, a pont összes elmozdulását megakadályozza. Vagyis az A pontnál eltolódás és elfordulás sem jöhet létre, emiatt a deformációs vonal az A pontból indul vízszintes érintővel.

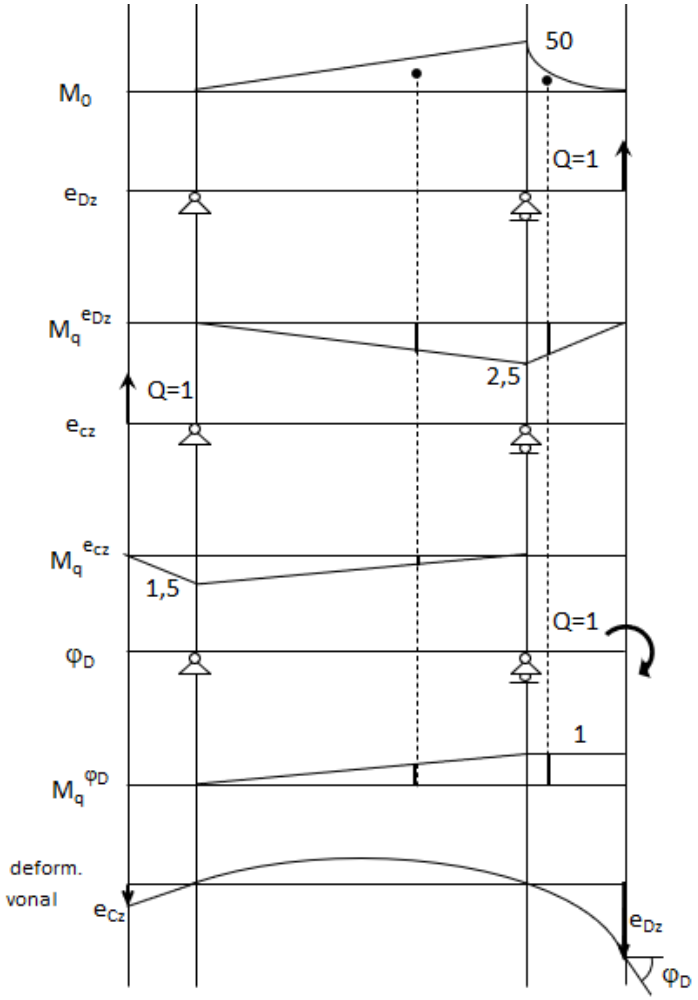
2.)



q=20 kN/m

EI=60000 kNm^2 (hajlító merevség)

Határozza meg a tartó következő elmozdulás-összetevőit: e_{Dz}; e_{Cz}; φ_D ! Ezután rajzolja meg a tartó deformációs vonalát!



- nyomatéki ábra a kezdeti teherből
- feltételezett virtuális erő az e_{Dz} számításához (D pontban függőleges erő végez munkát)
- nyomatéki ábra a virtuális erő hatására
- feltételezett virtuális erő az e_{cz} számításához (C pontban függőleges erő végez munkát)
- nyomatéki ábra a virtuális erő hatására
- feltételezett virtuális nyomaték a φ_D számításához (D pontban nyomaték végez munkát)
- nyomatéki ábra a virtuális nyomaték hatására
- deformációs vonal, amely figyelembe veszi a húzott oldal elhelyezkedését a nyomatéki ábra alapján, a támaszokra vonatkozó elmozdulási lehetőségeket, valamint a kapott elmozdulás-összetevők beilleszthetőségét.

- Az e_{Dz} számítása:

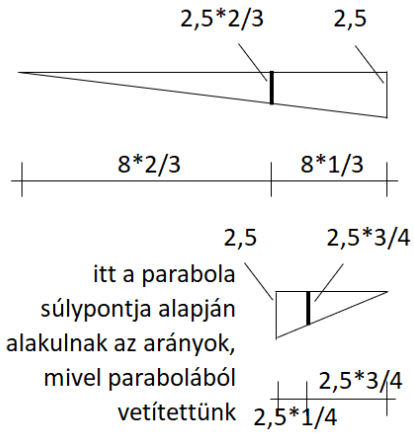
$$Q \cdot e_{Dz} = \int \frac{M_0 \cdot M_q^{e_{Dz}}}{EI} dx$$

$$Q \cdot (e_{Dz}) = \int M_0 \cdot M_q^{e_{Dz}} dx$$

$$1 \cdot (e_{Dz}) = -\frac{50 \cdot 8}{2} \cdot 2{,}5 \cdot \frac{2}{3} - \frac{50 \cdot 2{,}5}{3} \cdot 2{,}5 \cdot \frac{3}{4}$$

$$(e_{Dz}) = -411{,}46\ kNm^3 \downarrow \quad (nagyított\ érték)$$

$$e_{Dz} = \frac{(e_{Dz})}{EI} = \frac{-411{,}46}{60000} = -6{,}858 \cdot 10^{-3}\ m \downarrow$$



- Az e_{Cz} számítása:

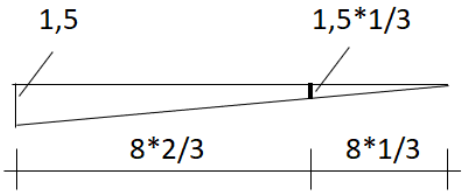
$$Q \cdot e_{Cz} = \int \frac{M_0 \cdot M_q^{e_{Cz}}}{EI} dx$$

$$Q \cdot (e_{Cz}) = \int M_0 \cdot M_q^{e_{Cz}} dx$$

$$1 \cdot (e_{Cz}) = -\frac{50 \cdot 8}{2} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1}{3}$$

$$(e_{Cz}) = -100\ kNm^3 \downarrow \quad (nagyított\ érték)$$

$$e_{Cz} = \frac{(e_{Cz})}{EI} = \frac{-100}{60000} = -1{,}667 \cdot 10^{-3}\ m \downarrow$$



itt csak ezen az egy szakaszon van fedése a két ábrának, így a számítás is egy tagból áll

- A φ_D számítása:

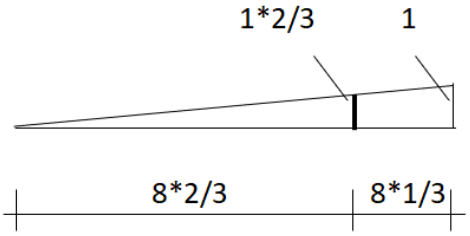
$$Q \cdot \varphi_D = \int \frac{M_0 \cdot M_q^{\varphi_D}}{EI} dx$$

$$Q \cdot (\varphi_D) = \int M_0 \cdot M_q^{\varphi_D} dx$$

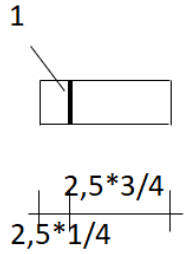
$$1 \cdot (\varphi_D) = \frac{50 \cdot 8}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{50 \cdot 2{,}5}{3} \cdot 1$$

$$(\varphi_D) = 175\ kNm^2 \curvearrowright \quad (nagyított\ érték)$$

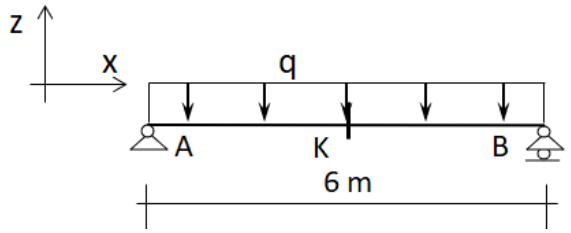
$$\varphi_D = \frac{(\varphi_D)}{EI} = \frac{175}{60000} = 2{,}917 \cdot 10^{-3} \curvearrowright$$



a konstans ábrát bárhol kimetszve, ugyanazon értékét kapjuk



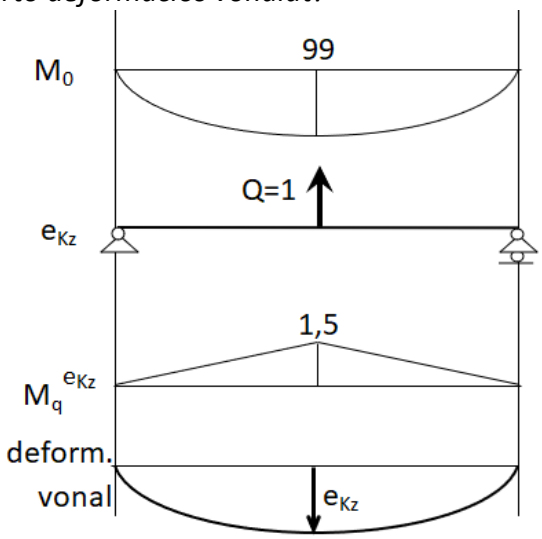
3.)



q=22 kN/m

EI=40000 kNm^2

Határozza meg a tartó K középső km-nek abszolút eltolódását (e_{Kz})! Ezután rajzolja meg a tartó deformációs vonalát!



- nyomatéki ábra a kezdeti teherből
- feltételezett virtuális erő az e_{Kz} számításához (K pontban függőleges erő végez munkát)
- nyomatéki ábra a virtuális erő hatására

- Az e_{Kz} számítása:

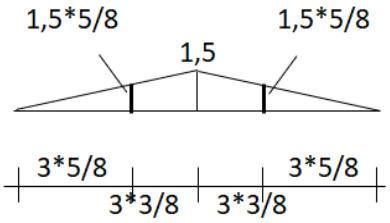
$$Q \cdot e_{Kz} = \int \frac{M_0 \cdot M_q^{e_{Kz}}}{EI} dx$$

$$Q \cdot (e_{Kz}) = \int M_0 \cdot M_q^{e_{Kz}} dx$$

$$1 \cdot (e_{Kz}) = -2 \cdot \frac{99 \cdot 3 \cdot 2}{3} \cdot 1{,}5 \cdot \frac{5}{8}$$

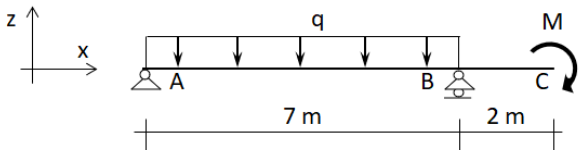
$$(e_{Kz}) = -371{,}25\ kNm^3 \downarrow \quad (nagyított\ érték)$$

$$e_{Kz} = \frac{(e_{Kz})}{EI} = \frac{-371{,}25}{40000} = -9{,}281 \cdot 10^{-3}\ m \downarrow$$



Itt a parabola súlypontja alapján alakulnak az arányok. Ahol törés van valamely ábrában, ott szétbontva kell számolni, így két háromszöggel dolgozunk.

4.)

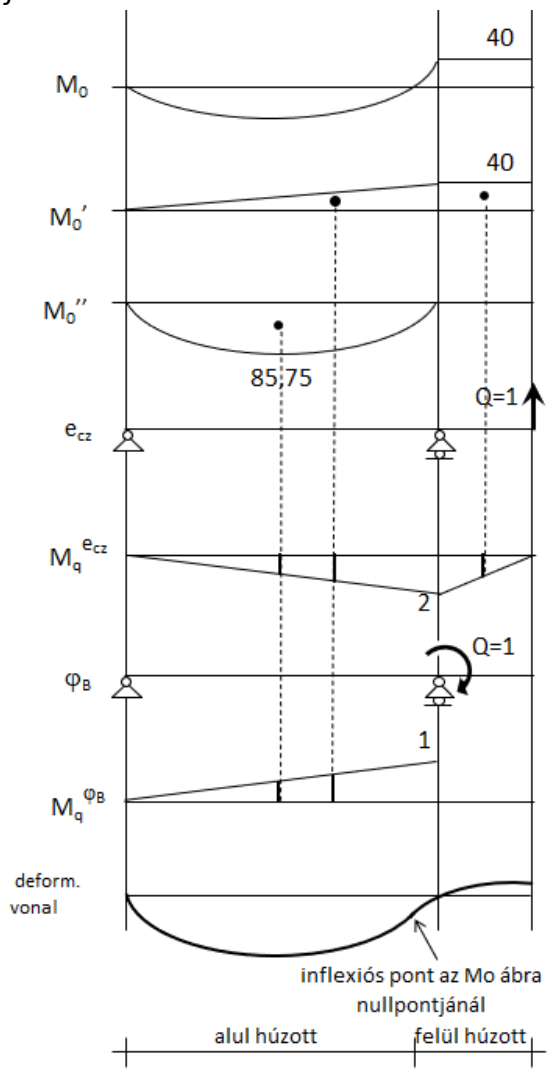


q=14 kN/m

M=40 kNm

EI=80000 kNm^2

Határozza meg a tartó következő elmozdulás-összetevőit: e_{Cz}; φ_B ! Ezután rajzolja meg a tartó deformációs vonalát!



- nyomatéki ábra a kezdeti teherből (a számítható ábraterületek miatt terhenként rajzoljuk meg a kezdeti nyomatéki ábrát: $M_0=M_0'+M_0''$)
- nyomatéki ábra csak a kezdeti M nyomatékból
- nyomatéki ábra csak a kezdeti q megoszló teherből
- feltételezett virtuális erő az e_{Cz} számításához (C pontban függőleges erő végez munkát)
- nyomatéki ábra a virtuális erő hatására
- feltételezett virtuális nyomaték a φ_B számításához (B pontban nyomaték végez munkát)
- nyomatéki ábra a virtuális nyomaték hatására

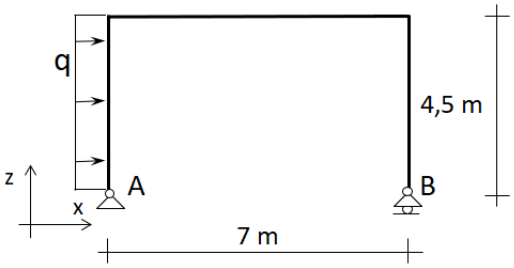
- Az e_{Cz} számítása:

$$Q \cdot e_{Cz} = \int \frac{M_0 \cdot M_q^{e_{Cz}}}{EI} dx$$
$$Q \cdot (e_{Cz}) = \int M_0 \cdot M_q^{e_{Cz}} dx$$
$$1 \cdot (e_{Cz}) = -\frac{40 \cdot 7}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} - 40 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{85{,}75 \cdot 7 \cdot 2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$$
$$(e_{Cz}) = 133{,}5\ kNm^3 \uparrow \quad (nagyított\ érték)$$
$$e_{Cz} = \frac{(e_{Cz})}{EI} = \frac{133{,}5}{80000} = 1{,}669 \cdot 10^{-3}\ m \uparrow$$

- A φ_B számítása:

$$Q \cdot \varphi_B = \int \frac{M_0 \cdot M_q^{\varphi_B}}{EI} dx$$
$$Q \cdot (\varphi_B) = \int M_0 \cdot M_q^{\varphi_B} dx$$
$$1 \cdot (\varphi_B) = \frac{40 \cdot 7}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} - \frac{85{,}75 \cdot 7 \cdot 2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$
$$(\varphi_B) = -106{,}75\ kNm^2 \circlearrowleft \quad (nagyított\ érték)$$
$$\varphi_B = \frac{(\varphi_B)}{EI} = \frac{-106{,}75}{80000} = -1{,}334 \cdot 10^{-3} \circlearrowleft$$

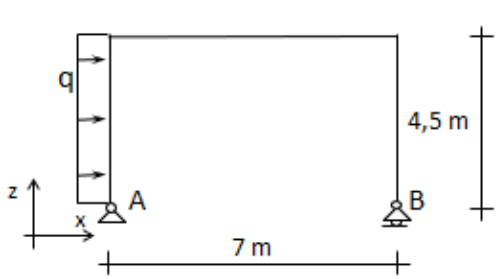
5.)

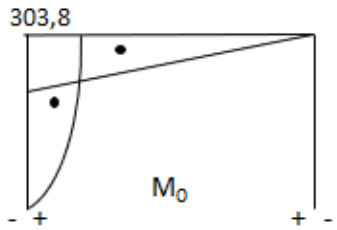


q=30 kN/m

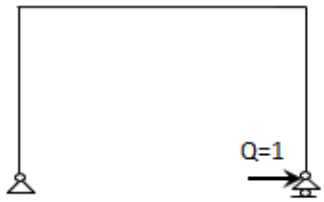
EI=150000 kNm^2

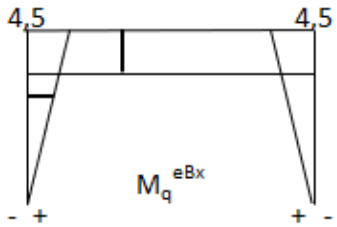
Határozza meg a tartó következő elmozdulás-összetevőit: e_{Bx}; φ_A ! Ezután rajzolja meg a tartó deformációs vonalát!



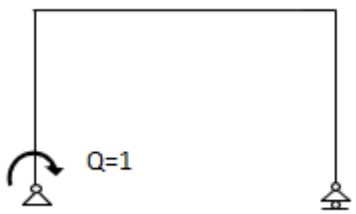


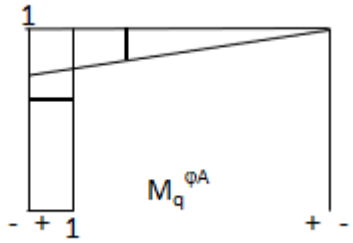
- a kezdeti teher és a nyomatéki ábrája



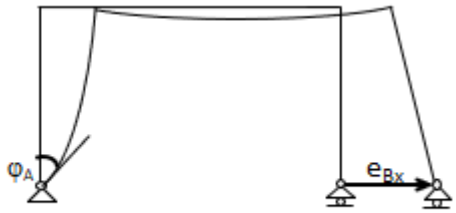


- feltételezett virtuális erő az e_{Bx} számításához (B pontban vízszintes erő végez munkát), valamint a nyomatéki ábra a virtuális erő hatására





- feltételezett virtuális nyomaték a φ_A számításához (az A pontban nyomaték végez munkát), valamint a nyomatéki ábra a virtuális nyomaték hatására



- A bal oldali oszlopon és a középső szakaszon a nyomatéki ábra alapján a belső oldalon van a húzás, a jobb oldali oszlopon nincs nyomatéki ábra, így ott görbület sem lehet, ezért az egyenes. A sarokpontoknál maradnia kell a derékszögnek. A B támasz vízszintesen is eltolódhat az elfordulás mellett.

- Az e_{Bx} számítása:

$$Q \cdot e_{Bx} = \int \frac{M_0 \cdot M_q^{e_{Bx}}}{EI} dx$$

$$Q \cdot (e_{Bx}) = \int M_0 \cdot M_q^{e_{Bx}} dx$$

$$1 \cdot (e_{Bx}) = \frac{303{,}8 \cdot 4{,}5 \cdot 2}{3} \cdot 4{,}5 \cdot \frac{5}{8} + \frac{303{,}8 \cdot 7}{2} \cdot 4{,}5$$

$$(e_{Bx}) = 7348{,}2\ kNm^3 \rightarrow \quad (nagyított\ érték)$$

$$e_{Bx} = \frac{(e_{Bx})}{EI} = \frac{7348{,}2}{150000} = 4{,}899 \cdot 10^{-2}\ m \rightarrow$$

- A φ_A számítása:

$$Q \cdot \varphi_A = \int \frac{M_0 \cdot M_q^{\varphi_A}}{EI} dx$$

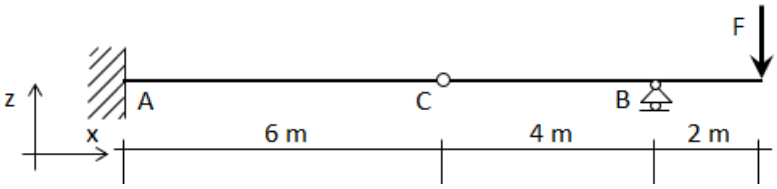
$$Q \cdot (\varphi_A) = \int M_0 \cdot M_q^{\varphi_A} dx$$

$$1 \cdot (\varphi_A) = \frac{303{,}8 \cdot 4{,}5 \cdot 2}{3} \cdot 1 + \frac{303{,}8 \cdot 7}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}$$

$$(\varphi_A) = 1620{,}3\ kNm^2 \curvearrowright \quad (nagyított\ érték)$$

$$\varphi_A = \frac{(\varphi_A)}{EI} = \frac{1620{,}3}{150000} = 1{,}080 \cdot 10^{-2} \curvearrowright$$

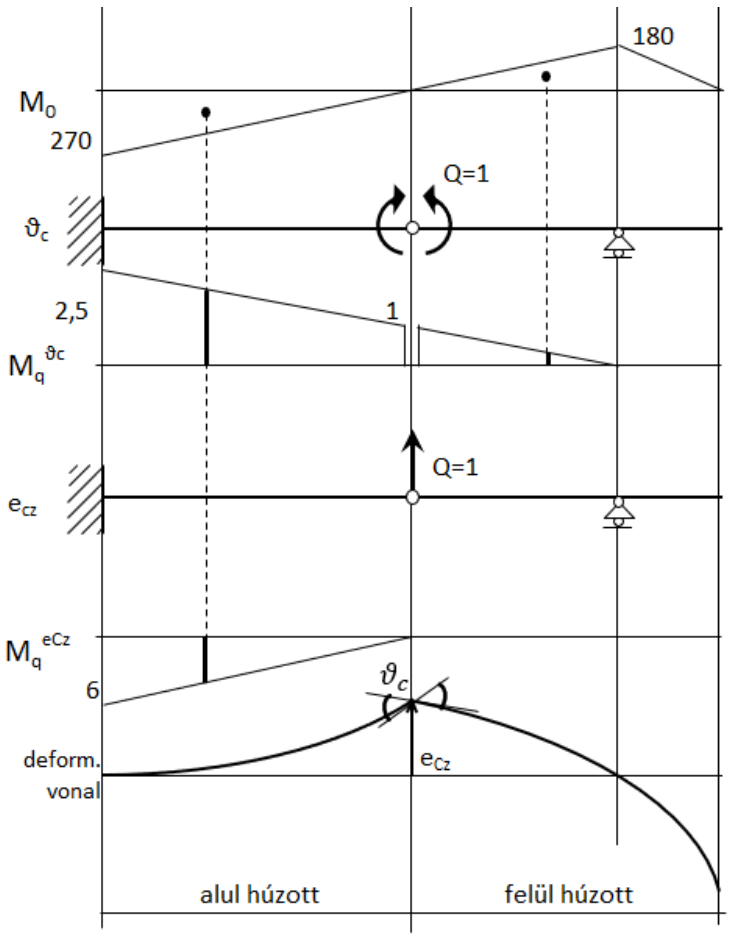
6.)



F= 90 kN

EI=200000 kNm^2

Határozza meg a tartó következő elmozdulás-összetevőit: e_{Cz}; ϑ_C! Ezután rajzolja meg a tartó deformációs vonalát!



- nyomatéki ábra a kezdeti teherből
- feltételezett virtuális nyomatékpár a ϑ_C számításához (C pontban egy nyomatékpár végez munkát a relatív szögelfordulással)
- nyomatéki ábra a virtuális nyomatékpár hatására
- feltételezett virtuális erő az e_{Cz} számításához (C pontban függőleges erő végez munkát)
- nyomatéki ábra a virtuális erő hatására
- a deformációs vonal:
  A csuklónál törés alakul ki, vagyis egy relatív szögelfordulás (a két rúdelem végérintőjének szöge, nem pedig a kezdeti alakhoz viszonyított szög).

- A ϑ_C számítása:

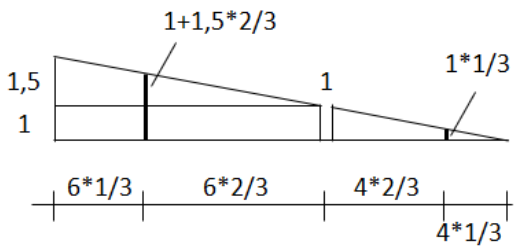
$$Q \cdot \vartheta_C = \int \frac{M_0 \cdot M_q{}^{\vartheta c}}{EI} dx$$

$$Q \cdot (\vartheta_C) = \int M_0 \cdot M_q{}^{\vartheta c} dx$$

$$1 \cdot (\vartheta_C) = -\frac{270 \cdot 6}{2} \cdot (1 + 1{,}5 \cdot \frac{2}{3}) + \frac{180 \cdot 4}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$(\vartheta_C) = -1500\ kNm^2 \curvearrowleft\curvearrowright \quad (nagyított\ érték)$$

$$\vartheta_C = \frac{(\vartheta_C)}{EI} = \frac{-1500}{200000} = -7{,}5 \cdot 10^{-3} \curvearrowleft\curvearrowright$$



- Az e_{Cz} számítása:

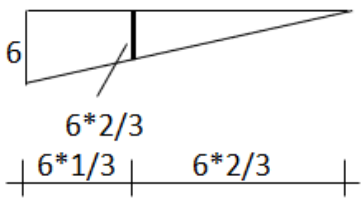
$$Q \cdot e_{Cz} = \int \frac{M_0 \cdot M_q{}^{e_{Cz}}}{EI} dx$$

$$Q \cdot (e_{Cz}) = \int M_0 \cdot M_q{}^{e_{Cz}} dx$$

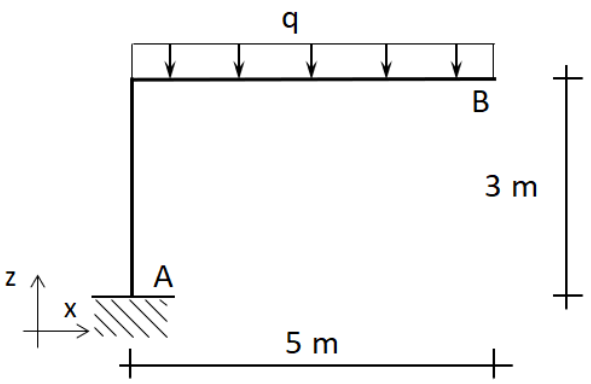
$$1 \cdot (e_{Cz}) = \frac{270 \cdot 6}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3}$$

$$(e_{Cz}) = 3240\ kNm^3 \uparrow \quad (nagyított\ érték)$$

$$e_{Cz} = \frac{(e_{Cz})}{EI} = \frac{3240}{200000} = 1{,}62 \cdot 10^{-2}\ m \uparrow$$



7.)



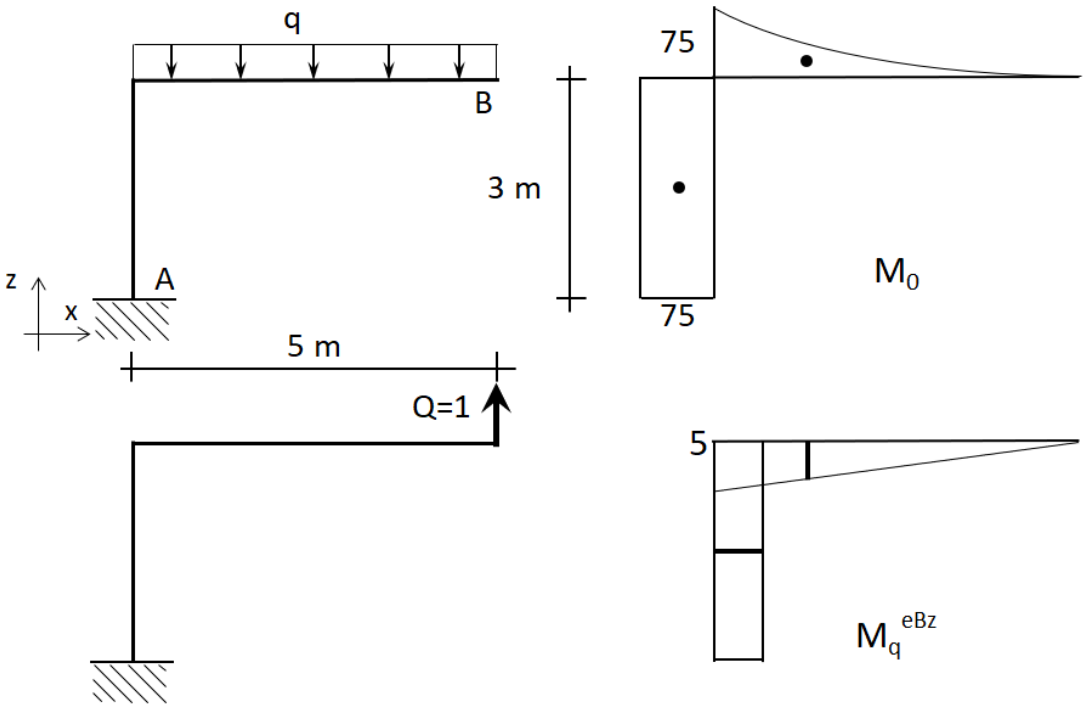
q=6 kN/m

E=2*10^5 N/mm^2=2*10^8 kN/m^2

I=4*10^8 mm^4

EI=8*10^{13} Nmm^2=80000 kNm^2

Határozza meg a tartó B pontjának függőleges abszolút eltolódását (e_{Bz})! Ezután számítsa ki, mekkora legyen legalább az inercianyomaték értéke, hogy az e_{Bz} kisebb legyen 1 cm-nél!



- Az e_{Bz} számítása:

$$Q \cdot e_{Bz} = \int \frac{M_0 \cdot M_q{}^{e_{Bz}}}{EI} dx$$

$$Q \cdot (e_{Bz}) = \int M_0 \cdot M_q{}^{e_{Bz}} dx$$

$$1 \cdot (e_{Bz}) = -\frac{75 \cdot 5}{3} \cdot 5 \cdot \frac{3}{4} - 75 \cdot 3 \cdot 5$$

$$(e_{Bz}) = -1593{,}75\ kNm^3 \downarrow \quad (nagyított\ érték)$$

$$e_{Bz} = \frac{(e_{Bz})}{EI} = -\frac{1593{,}75}{80000} = -1{,}992 \cdot 10^{-2}\ m \downarrow = -1{,}992\ cm \downarrow$$

- inercianyomaték számítása:

$$|e_{Bz}| = \frac{(e_{Bz})}{EI} = \frac{1593{,}75}{80000} = 1{,}992 \cdot 10^{-2}\ m = 1{,}992\ cm\ \ >\ 1\ cm = 0{,}01\ m$$

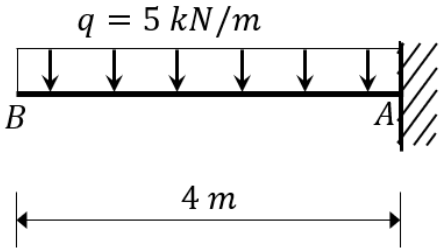
$$|e_{Bz}| = \frac{(e_{Bz})}{EI} = \frac{1593{,}75}{2 \cdot 10^{8} \cdot I} = 1{,}992 \cdot 10^{-2}\ m = 1{,}992\ cm\ \ >\ 1\ cm = 0{,}01\ m$$

$$I = 7{,}9688 \cdot 10^{-4}\ m^4 = 7{,}9688 \cdot 10^{8}\ mm^4$$

Az inercianyomaték minimális értékének tehát közel kétszer akkorának kell lennie, mint a kezdeti érték, hogy teljesüljön a B pont elmozdulási feltétele. Megállapítható, hogy a lehajlásokkal és egyéb elmozdulásokkal kapcsolatos számítások esetében az inercianyomaték (és ezáltal a km. méretei) az a paraméter, amellyel tudjuk szabályozni a végeredmény értékét, vagyis biztosítani az elmozdulási, lehajlási kritériumok, követelmények teljesülését.

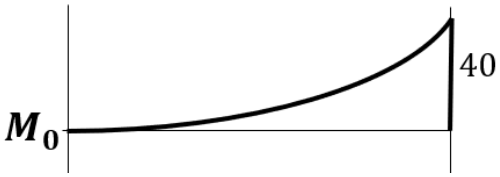
Mintapéldák rugalmas vonal

1.)

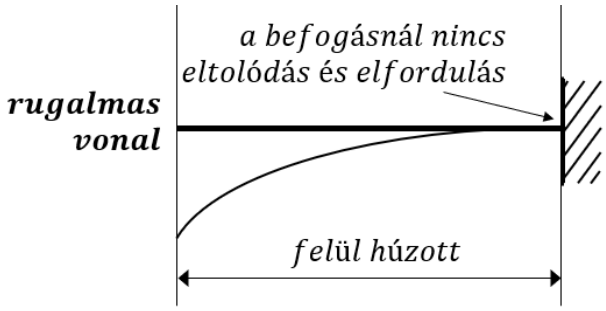


Rajzolja meg a tartó rugalmas (deformációs) vonalát!

- nyomatéki ábra



- rugalmas vonal

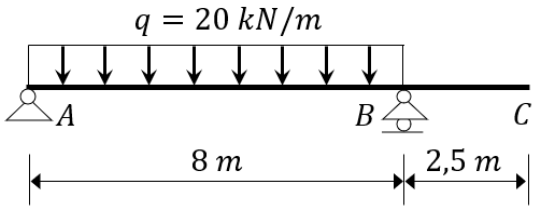


A megoldást a nyomatéki ábra megrajzolásával kezdjük, ennek ismerete nélkülözhetetlen a rugalmas vonal meghatározásához. A terhelés következményeként kialakuló nyomatéki igénybevételek felelősek a tartó alakjának megváltozásáért (A nyíróerő hatását elhanyagolva.), hatásukra a tartó meggörbül. Tehát a nyomatéki igénybevételek szoros összefüggésben állnak a tartó alakváltozásaival, matematikailag differenciális kapcsolat van közöttük. A megváltozott tartóalakot ábrázolhatjuk is, ezt rugalmas vagy deformációs vanalnak nevezzük, amely szemlélteti a tartó hossza mentén, egyes pontjainak elmozdulásait. Segítségével megállapítható a legnagyobb elmozdulás várható helye és akár értéke is.

A rugalmas vonalat közelítőleg rajzoljuk fel, alakhelyes ábrázolásra törekedve. A tartóhossz ábrázolásának léptéke jelentősen eltér a rá merőlegesen felvett elmozdulások választott léptékéhez képest, hiszen a több méteres hosszot a néhány milliméteres, esetleg centiméteres elmozdulásokkal csak ilyen módon tudjuk ésszerűen és szemléletesen ábrázolni.

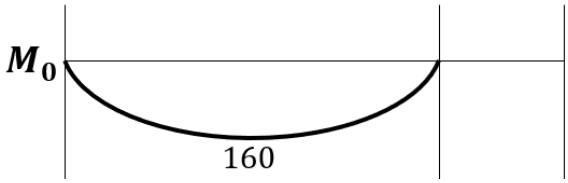
Tudjuk, hogy a hajlítónyomaték hatására a keresztmetszetek egyik fele húzott, másik fele nyomott lesz, a nyomatéki ábrát pedig mindig a tartó húzott oldalára kell rajzolnunk. Ebben az esetben a teljes nyomatéki ábra felül helyezkedik el a kiindulási vonalhoz képest, vagyis a teljes tartóhossz mentén végig felül lesz a húzott oldal. A meggörbülést és az azt ábrázoló rugalmas vonalat úgy kell felvennünk, hogy a keresztmetszetek felső oldala legyen húzott. Másik nagyon fontos szempont a felrajoláskor a megtámasztások elmozdulás lehetőségeinek figyelembevétele. Ebben az esetben egy befogásunk van, amely a legmerevebb megtámasztás. A befogásnál nem ébredhet sem eltolódás, sem elfordulás, vagyis a rugalmas vonalat ennek megfelelően felrajzolva, azt a bofogás pontjából indítjuk, vízszintes kezdőérintővel. A húzott oldal és a megtámasztási viszonyok segítségével általában a rugalmas vonal könnyen feltüntethető.

2.)

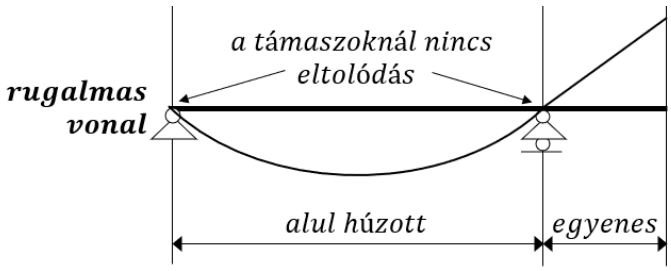


Rajzolja meg a tartó rugalmas (deformációs) vonalát!

- nyomatéki ábra

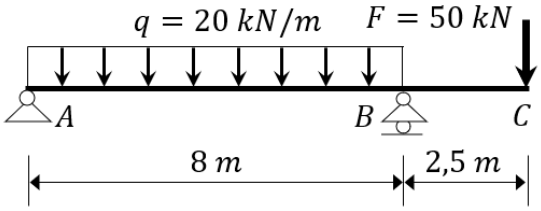


- rugalmas vonal



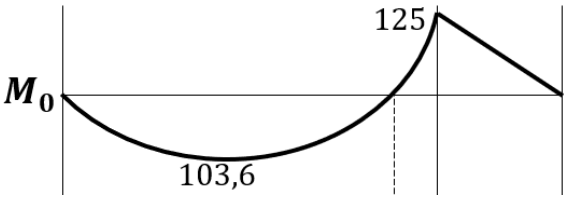
A nyomatéki ábrát megrajzolva, megállapíthatjuk, hogy a támaszok között (A-B szakasz) a kiindulási vonalhoz képest alul helyezkedik el az ábra, a konzolrészen (B-C szakasz) pedig nincs nyomatéki igénybevétel. A rugalmas vonal alakja ezen megállapítások segítségével meghatározható. Az A-B szakaszon úgy kell „görbítenünk” a vonalat, hogy a tartó alsó fele legyen húzott, a B-C szakasz pedig egyenes kell, hogy maradjon, mivel itt nincs nyomaték, amely görbületet okozna. A két tartomány között folytonos átmenet van, a görbe végérintőjébe esik az egyenes szakasz.
A csuklós és a görgős támasz pontjainál nem alakulhat ki eltolódás jellegükből adódóan, viszont a szögelfordulás létrejöttét nem akadályozzák meg, vagyis a rugalmas vonal ezen két ponton át kell, hogy haladjon.

3.)

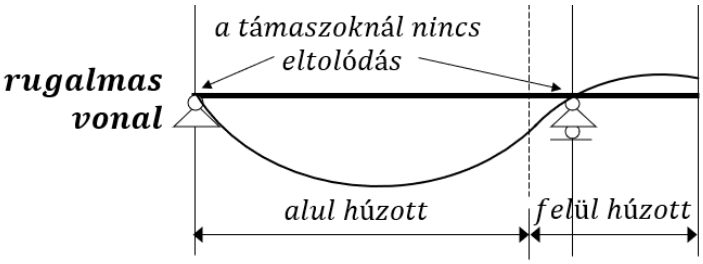


Rajzolja meg a tartó rugalmas (deformációs) vonalát!

- nyomatéki ábra

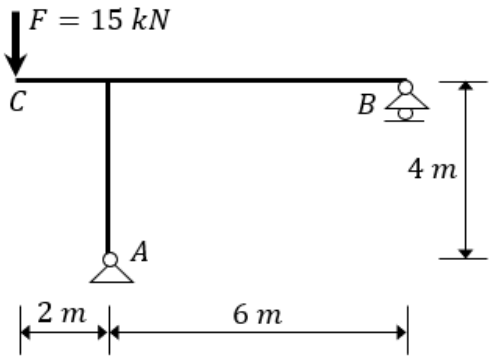


- rugalmas vonal



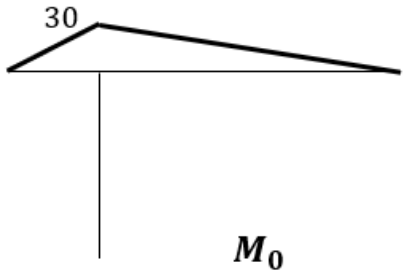
A nyomatéki ábra megrajzolása után megállapíthatjuk, hogy az ábrában létrejött egy nullpont a B támasz közelében, amelytől balra az ábra alul, jobbra pedig felül helyezkedik el. A húzott oldal és ezzel együtt a rugalmas vonal görbülésének iránya is ennek megfelelően alakul, vagyis az A pont és a nyomatéki null pont között alul húzott , a nullpont és a C pont között pedig felül húzott a tartó, és ennek alapján görbül a rugalmas vonal is. Megállapítható, hogy a nyomatéki nullpont alatt a rugalmas vonalnál egy inflexiós pont alakul ki, tőle balra konvex, jobbra pedig konkáv az ábra.
A támaszok tekintetében az előző példahoz képest hasonló a helyzet, mindkét támasz pontján áthalad a rugalmas vonsl, itt nem keletkezhetnek eltolódások.

4.)

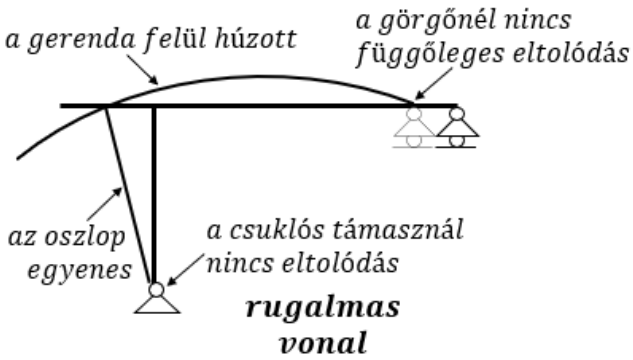


Rajzolja meg a tartó rugalmas (deformációs) vonalát!

- nyomatéki ábra

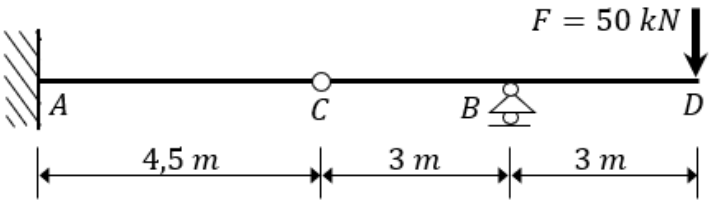


- rugalmas vonal



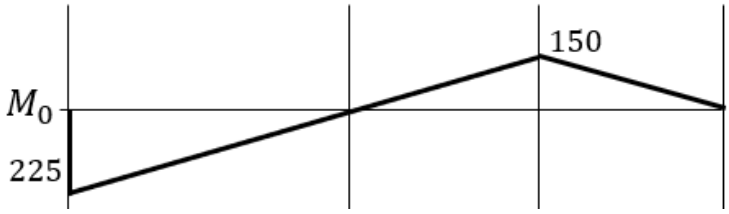
A nyomatéki ábra csak a vízszinte gerendarészen nem nulla, itt az ábra felül helyezkedik el, míg a függőleges oszloprészen nem jön létre nyomatéki igénybevétel. A ruglmas vonal ez alapján a gerendarészen felül húzottan görbül, míg az oszloprészen görbületmentesen, egyenesen mozdul el. A gerenda és ozlop kapcsolata az alakváltozások létrejötte után is merőleges, valamint ez a sarokpont csak vízszintesen tolódik el.
Az A csuklós támasznál nem jöhet létre eltolódás, csak elfordulás alakulhat ki, itt át kell haladjon a rugalmas vonal. A B görgős támasznál sem jöhet létre függőleges eltolódás, viszont az elforduláson kívül a vízszintes eltolódás kialakulását sem tudja megakadályozni, így ezek megvalósulását a rugalmas vonalnál is ábrázolni kell.

5.)

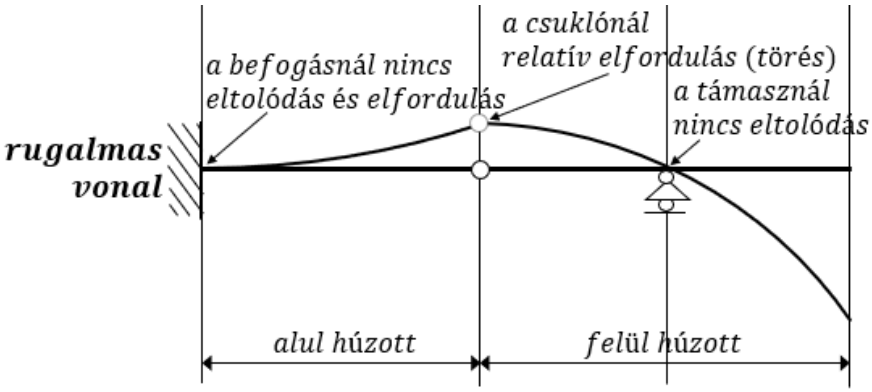


Rajzolja meg a tartó rugalmas (deformációs) vonalát!

- nyomatéki ábra



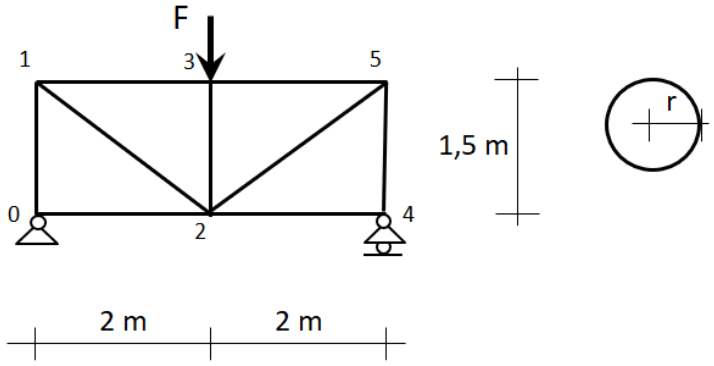
- rugalmas vonal



A nyomatéki ábra első (A-C) szakasza alul, a második (C-D) szakasza pedig felül helyezkedik el. Ennek megfelelően az A-C szakasz alul, a C-D szakasz felül húzott lesz, a rugalmas vonal görbülésének iránya is ez alapján alakul. A C pontnál, vagyis a nyomatéki nullpontnál egy inflexiós pont jön létre, itt a rugalmas vonal konvexből konkávba megy át.
Az A pontnál található befogás megakadályozza a pont eltolódását és elforulását, a B pontbeli görgős támasz pedig csak az eltolódás kialakulását tudja meggátolni, elfordulás keletkezni fog ennél a megtámasztásnál. A C pontnál elhelyezkedő csukló jellegéből adódóan nem képes nyomaték felvételére, ennek megfelelően szögtörésre, vagyis a csuklót megelőző és a csuklót követő rúdvégek egymáshoz viszonyított (relatív) szögelfordulására számíthatunk.

Mintapéldák nyomott rudak kihajlása

1.)



F=140 kN

E=2*10^5 MPa

a=310 MPa

b=1,14 MPa

λ_0=105

n=3

Méretezze az S_{13} rudat kihajlásra!

- rúderő:

$$S_{13} = \frac{F}{2} \cdot \frac{2{,}0}{1{,}5} = \frac{140}{2} \cdot \frac{2{,}0}{1{,}5} = 93{,}33\ kN(Nyomott)$$

- minimális inerciasugár:

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{r^4 \cdot \pi}{4}}{r^2 \cdot \pi}} = \frac{r}{2}$$

A rúd mindig a leggyengébb inercia tengelye (I_2) körül hajlik ki azonos megtámasztási viszonyok mellett.

- kihajlási (félhullám) hossz:

$$l_0 = \nu \cdot l = 1 \cdot 2000 = 2000\ mm$$

ν=1

A ν tényező mutatja meg, hogy a kihajlott alak mekkora szakaszán alakul ki a szinusz félhullám a kiindulási hosszhoz képest. A csukló-csukló megtámasztás esetén a ν értéke 1.

- karcsúsági tényező:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = \frac{2000 \cdot 2}{r} = \frac{4000}{r}$$

A karcsúsági tényező megmutatja, mennyire könnyű kihajlítani a rudat, annak geometriai paraméterei alapján, nagysága összefüggésben van a σ_{kr} értékével.

Ha a rúd valamely geometriai paramétere hiányzik, akkor a λ értékét nem ismerjük. Ebben az esetben a km. mérete hiányzik, így a λ-t csak annak függvényében tudjuk

megadni. Ebből következően a λ nem összehasonlítható a λ_o-lal, vagyis nem tudjuk megállapítani, hogy a rúd karcsú vagy zömök és melyik összefüggés alapján végezzük el a méretezést. A méretezésnél tehát feltételeznünk kell az egyik esetet és ez alapján elvégezni a számítást, melynek eredményeként kapott méretnek a feltételezésbe való visszahelyettesítése igazolhatja megoldásunk helyességét.

- méretezés kihajlásra:

  Feltételezzük, hogy a λ nagyobb, mint a λ_o ($\lambda > \lambda_o$), tehát a rúd karcsú, vagyis rugalmas kihajlás valósul meg és az Euler-hiperbola alapján számítjuk a σ_{kr} értékét.

  $$|\sigma| \leq \sigma_{kre}$$

  $$\frac{|S_{13}|}{A} \leq \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot n}$$

  $$\frac{93{,}33 \cdot 10^3}{r^2 \cdot \pi} \leq \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{\left(\frac{4000}{r}\right)^2 \cdot 3}$$

  $$r_{szüks.} = 29{,}15\ mm$$

  $$\mathrm{r_{alk.}} = 30\ \mathrm{mm} \qquad (5\ \mathrm{mm} - \mathrm{re\ kerekítve})$$

  A kezdeti feltételezés ellenőrzése:

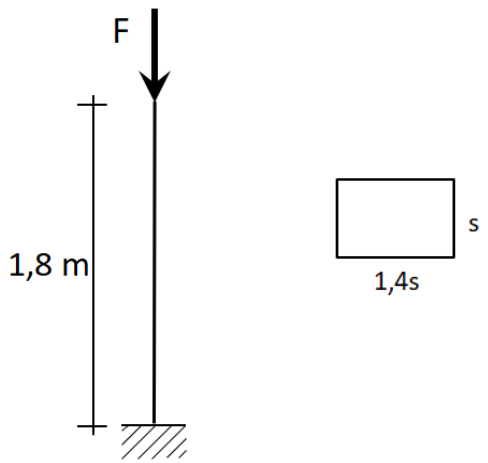
  $$\lambda = \frac{4000}{\mathrm{r}} = \frac{4000}{30} = 133{,}33 > \lambda_0 = 105 \quad \rightarrow \text{helyes volt a feltételezés, a rúd karcsú.}$$

- feszültségek ellenőrzése:

  $$|\sigma| = \frac{|S_{13}|}{A} = \frac{93{,}33 \cdot 10^3}{30^2 \cdot \pi} = 33{,}01\ MPa \ < \ \sigma_{kre} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot n} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{133{,}33^2 \cdot 3} = 37{,}01\ MPa$$

  megfelel

2.)



F=500 kN

E=1,25*10^4 MPa

a=29,3 MPa

b=0,194 MPa

λ_0=100

n=2

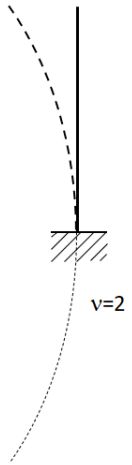
Méretezze a tartót kihajlásra!

- minimális inerciasugár:

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1{,}4s \cdot s^3}{12}}{1{,}4s \cdot s}} = \frac{s}{\sqrt{12}}$$

- kihajlási (félhullám) hossz:

$$l_0 = \nu \cdot l = 2 \cdot 1800 = 3600\ mm$$



- karcsúsági tényező:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = \frac{3600 \cdot \sqrt{12}}{s} = \frac{12470{,}8}{s}$$

- méretezés kihajlásra:

Feltételezzük, hogy a λ nagyobb, mint a λ_o ($\lambda > \lambda_o$), tehát a rúd karcsú, vagyis rugalmas kihajlás valósul meg és az Euler-hiperbola alapján számítjuk a σ_{kr} értékét.

$$|\sigma| \leq \sigma_{kre}$$

$$\frac{|F|}{A} \leq \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot n}$$

$$\frac{500 \cdot 10^3}{1{,}4s \cdot s} \leq \frac{\pi^2 \cdot 1{,}25 \cdot 10^4}{\left(\frac{12470{,}8}{s}\right)^2 \cdot 2}$$

$$s_{szüks.} = 173{,}23mm$$

$$s_{alk.} = 180\ \text{mm} \qquad (10\ \text{mm} - \text{re kerekítve})$$

A kezdeti feltételezés ellenőrzése:

$\lambda = \frac{12470{,}8}{s} = \frac{12470{,}8}{180} = 69{,}28 < \lambda_0 = 100$ → helytelen volt a feltételezés, a rúd nem karcsú, hanem zömök.

A méretezési számítás újrakezdése, $\lambda < \lambda_o$ megállapítással, vagyis a képlékeny kihajlás valósul meg és a Tetmajer-egyenes alapján számítjuk a σ_{kr} értékét.

$$|\sigma| \leq \sigma_{kre}$$

$$\frac{|F|}{A} \leq \frac{a - b \cdot \lambda}{n}$$

$$\frac{500 \cdot 10^3}{1{,}4s \cdot s} \leq \frac{29{,}3 - 0{,}194 \cdot \frac{12470{,}8}{s}}{2}$$

$$0 \leq 14{,}65s^2 - 1209{,}67s - 3{,}5714 \cdot 10^5$$

$s_{szüks.} = 202{,}79\ \text{mm}$ (a másodfokú egyenlőtlenségnek csak a pozitív gyöke lehet a megoldás)

$s_{alk.}$ =210 mm $(10\ \text{mm} - \text{re kerekítve})$

$$\lambda = \frac{12470{,}8}{s} = \frac{12470{,}8}{210} = 59{,}385 < \lambda_0 = 100$$

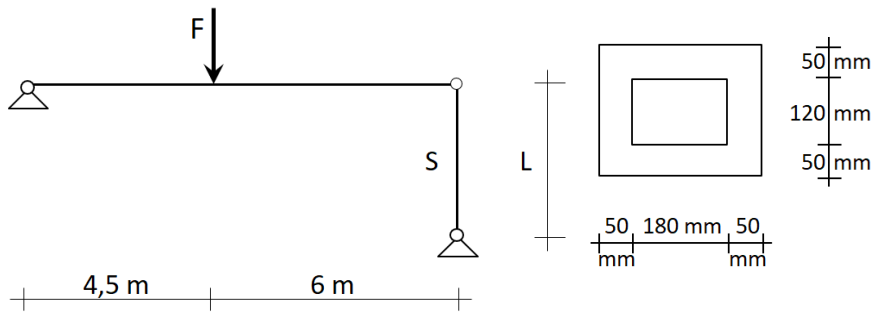
A λ kisebbre adódott a λ_0-hoz képest a rúd valóban zömök, helyes a számítás.

- feszültségek ellenőrzése:

$$|\sigma| = \frac{|F|}{A} = \frac{500 \cdot 10^3}{1{,}4 \cdot 210 \cdot 210} = 8{,}098\ MPa < \sigma_{kre} = \frac{a - b \cdot \lambda}{n} = \frac{29{,}3 - 0{,}194 \cdot 59{,}385}{2} = 8{,}89\ MPa$$

megfelel

3.)



F=800 kN

E=1,25*10^4 MPa

a=29,3 MPa

b=0,194 MPa

λ_0=100

n=2,5

Határozza meg az S rúd maximális hosszát kihajlás alapján!

- rúderő:

$$S = \frac{F \cdot 4{,}5}{10{,}5} = \frac{800 \cdot 4{,}5}{10{,}5} = 342{,}86\ kN\ (Nyomott)$$

- minimális inerciasugár:

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{280 \cdot 220^3}{12} - \frac{180 \cdot 120^3}{12}}{280 \cdot 220 - 180 \cdot 120}} = 74{,}59\ mm$$

- kihajlási (félhullám) hossz:

$$l_0 = \nu \cdot L = 1 \cdot L$$

- karcsúsági tényező:

$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = \frac{L}{74{,}59}$ – Ebben az esetben nem a km. mérete, hanem a rúd hossza hiányzik, így a λ-t csak annak függvényében tudjuk megadni. Emiatt a méretezésnél továbbra is feltételezéssel kell élnünk.

- maximális rúdhossz meghatározás kihajlásra:

Feltételezzük, hogy a λ nagyobb, mint a λ_o ($\lambda > \lambda_o$), tehát a rúd karcsú, vagyis rugalmas kihajlás valósul meg és az Euler-hiperbola alapján számítjuk a σ_{kr} értékét.

$$|\sigma| \leq \sigma_{kre}$$

$$\frac{|S|}{A} \leq \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot n}$$

$$\frac{342{,}86 \cdot 10^3}{280 \cdot 220 - 180 \cdot 120} \leq \frac{\pi^2 \cdot 1{,}25 \cdot 10^4}{\left(\frac{L}{74{,}59}\right)^2 \cdot 2{,}5}$$

$$L_{max} = 5659{,}6\ mm$$

A kezdeti feltételezés ellenőrzése:

$\lambda = \frac{\mathrm{L}}{74{,}59} = \frac{5659{,}6}{74{,}59} = 75{,}88 < \lambda_0 = 100$ → helytelen volt a feltételezés, a rúd nem karcsú, hanem zömök.

A méretezési számítás újrakezdése, $\lambda < \lambda_o$ megállapítással, vagyis a képlékeny kihajlás valósul meg és a Tetmajer-egyenes alapján számítjuk a σ_{kr} értékét.

$$|\sigma| \leq \sigma_{kre}$$

$$\frac{|S|}{A} \leq \frac{a - b \cdot \lambda}{n}$$

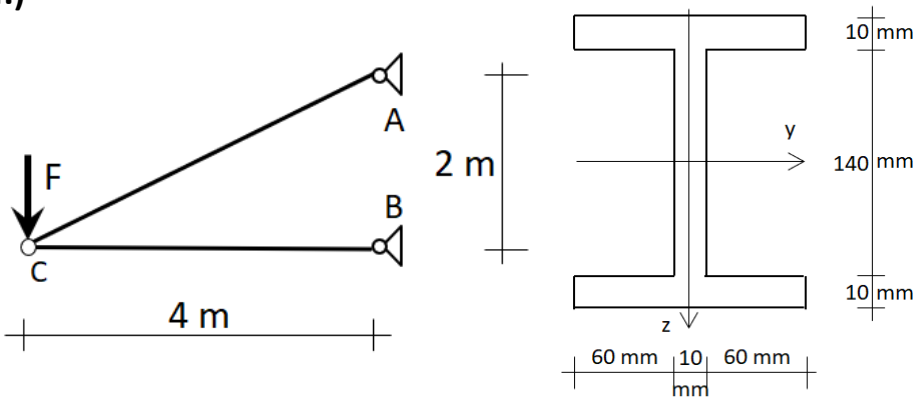
$$\frac{342{,}86 \cdot 10^3}{280 \cdot 220 - 180 \cdot 120} \leq \frac{29{,}3 - 0{,}194 \cdot \frac{L}{74{,}59}}{2{,}5}$$

$$L_{max} = 3026{,}4\ mm = 3{,}03\ m$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{L}}{74{,}59} = \frac{3026{,}4}{74{,}59} = 40{,}57 < \lambda_0 = 100$$

A λ kisebbre adódott a λ_0-hoz képest, a rúd valóban zömök, helyes a számítás.

4.)



F=70 kN

E=2*10^5 MPa

a=310 MPa

b=1,14 MPa

λ_0=105

n=3

Határozza meg az S_{BC} rúdra működtethető kritikus erő megengedett értékét és ellenőrizze rúderőt!

- rúderő:

$$S_{BC} = F \cdot \frac{4}{2} = 70 \cdot \frac{4}{2} = 140\ kN\ (Nyomott)$$

- minimális inerciasugár:

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot 10 \cdot 130^3}{12} + \frac{140 \cdot 10^3}{12}}{2 \cdot 10 \cdot 130 + 140 \cdot 10}} = 30{,}30\ mm$$

- kihajlási (félhullám) hossz:

$$l_0 = \nu \cdot l = 1 \cdot 4000 = 4000\ mm$$

- karcsúsági tényező:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = \frac{4000}{30{,}30} = 132{,}01 > \lambda_0 = 105$$

- a λ megoldásában nincs ismeretlen, ezért a továbbiakban nem kell élnünk feltételezéssel. Mivel a $\lambda > \lambda_0$, a rúd karcsú, vagyis rugalmas kihajlás valósul meg és az Euler-hiperbola alapján számolunk.

- megengedett kritikus erő:

$$F_{kr,e} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_2}{{l_0}^2 \cdot n} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10 \cdot 130^3}{12} + \frac{140 \cdot 10^3}{12}\right)}{4000^2 \cdot 3} = 151{,}06\ kN$$

- ellenőrzés:

$$S_{BC} = 140\ kN < F_{kr,e} = 151{,}06\ kN$$

megfelel

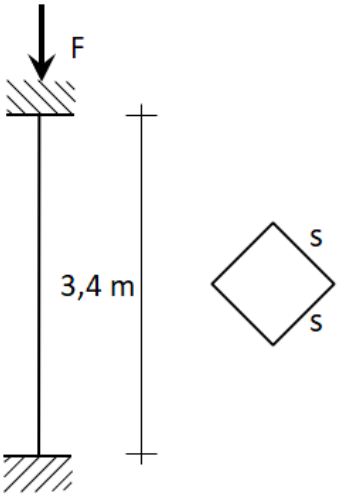
Határozza meg, mekkora lehet a tartót terhelő F erő maximuma, hogy a rúd megfeleljen kihajlásra!

$$S_{BC} = F_{kr,e} = 151{,}06\ kN$$

$$S_{BC} = F_{max} \cdot \frac{4}{2}$$

$$F_{max} = 151{,}06 \cdot \frac{2}{4} = 75{,}53\ kN$$

5.)



s=50 mm

E=2*10^5 MPa

a=335 MPa

b=0,62 MPa

λ_0=92

n=3

Határozza meg a rúdra működtethető maximális erőt!

- minimális inerciasugár:

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{50^4}{12}}{50^2}} = \frac{50}{\sqrt{12}} = 14{,}43\ mm$$

- kihajlási (félhullám) hossz:

$$l_0 = \nu \cdot l = 0{,}5 \cdot 3400 = 1700\ mm$$

- karcsúsági tényező:

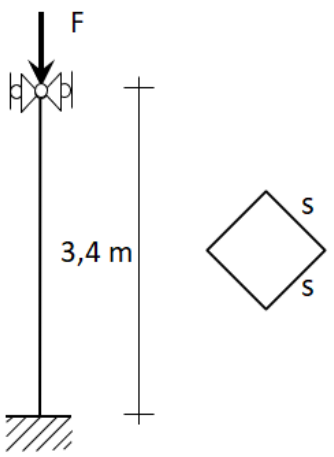
$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = \frac{1700}{14{,}43} = 117{,}81 > \lambda_0 = 105$$

- a λ megoldásában nincs ismeretlen, ezért a továbbiakban nem kell élnünk feltételezéssel. Mivel a $\lambda > \lambda_0$, a rúd karcsú, vagyis rugalmas kihajlás valósul meg és az Euler-hiperbola alapján számolunk.

- a kritikus erő megengedett értéke:

$$F_{max} = F_{kr,e} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_2}{{l_0}^2 \cdot n} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{50^4}{12}}{1700^2 \cdot 3} = 118{,}58\ kN$$

6.)



s=50 mm

E=2*10^5 MPa

a=335 MPa

b=0,62 MPa

λ_0=92

n=3

Határozza meg a rúdra működtethető maximális erőt!

- minimális inerciasugár:

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{50^4}{12}}{50^2}} = \frac{50}{\sqrt{12}} = 14{,}43\ mm$$

- kihajlási (félhullám) hossz:

$$l_0 = \nu \cdot l = 0{,}7 \cdot 3400 = 2380\ mm$$

- karcsúsági tényező:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = \frac{2380}{14{,}43} = 164{,}93 > \lambda_0 = 105$$

- a λ megoldásában nincs ismeretlen, ezért a továbbiakban nem kell élnünk feltételezéssel. Mivel a $\lambda > \lambda_o$, a rúd karcsú, vagyis rugalmas kihajlás valósul meg és az Euler-hiperbola alapján számolunk.

- a kritikus erő megengedett értéke:

$$F_{max} = F_{kr,e} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_2}{{l_0}^2 \cdot n} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{50^4}{12}}{2380^2 \cdot 3} = 60{,}5\ kN$$

Az 5. és 6. feladat alapján belátható, hogy a megtámasztási viszonyok megfelelő megválasztása minden más paraméter változatlan értéke mellett a teherbírás többszörösét is eredményezheti kihajlási szempontból.