Tartószerkezetek mechanikája II.
ELŐADÁSOK

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

Széchenyi István Egyetem
Szerkezetépítési és Geotechnikai Tanszék

Tartószerkezetek mechanikája II.

1.

Bevezetés, a szilárdságtan alapfogalmai

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

STATIKA

MEREV TESTEK STATIKÁJA

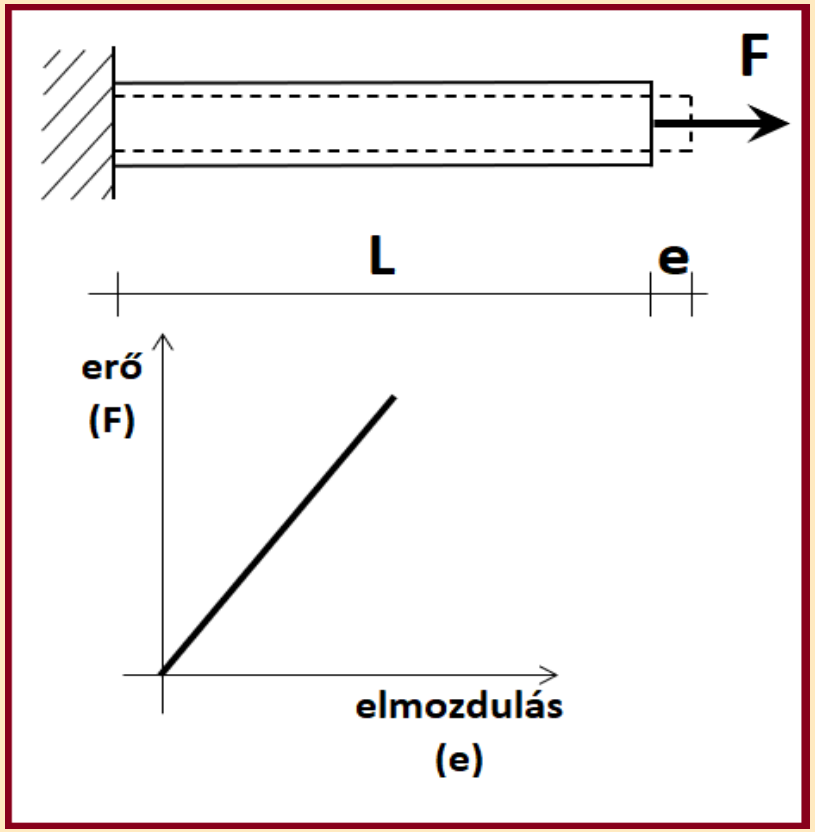
SZILÁRD TESTEK STATIKÁJA

SZILÁRD TESTEK STATIKÁJA=SZILÁRDSÁGTAN

- Szilárd testek feszültségeivel és alakváltozásaival foglalkozik.

SZILÁRD TESTEK

- Terhelés hatására alakváltozások keletkeznek a testben.
- Valós, nem idealizált, mint a merev testek.



SZILÁRDSÁGTAN FELOSZTÁSA

SZILÁRDSÁGTAN

ELEMI SZILÁRDSÁGTAN

- Rúdelemek esetén
- Egyszerűsítéseket használ

ÁLTALÁNOS SZILÁRDSÁGTAN

- Bármilyen méretű, alakú testre
- Pontosabb, de bonyolultabb

SZILÁRDSÁGTAN

RUGALMASSÁGTAN

- Rugalmas anyagú test
- Rugalmas-képlékeny anyagú test rugalmas állapota

KÉPLÉKENYSÉGTAN

- Képlékeny anyagú test
- Rugalmas-képlékeny anyagú test képlékeny állapota

SZILÁRDSÁGTANI KÖVETELMÉNYEK

- SZILÁRDSÁG
  - Igénybevételek, feszültségek alulmaradásának biztosítása az anyag által biztonsággal elviselhető értékhez képest.
  - Törés, tönkremenetel elkerülése.
- MEREVSÉG
  - Elmozdulások, alakváltozások alulmaradásának biztosítása egy bizonyos, előre meghatározott értékhez képest.
  - A használat akadályozásának, korlátozásának elkerülése.
- STABILITÁS
  - A stabilis egyensúly megszűnésének elkerülése, vagyis az egyensúlyi állapot stabilitásának megőrzése.

SZILÁRDSÁGTANI MEGFELELŐSÉG IGAZOLÁSA

- A MEGENGEDETT IGÉNYBEVÉTEL/FESZÜLTSÉG NE LEGYEN KISEBB A MÉRTÉKADÓ IGÉNYBEVÉTELNÉL/FESZÜLTSÉGNÉL.

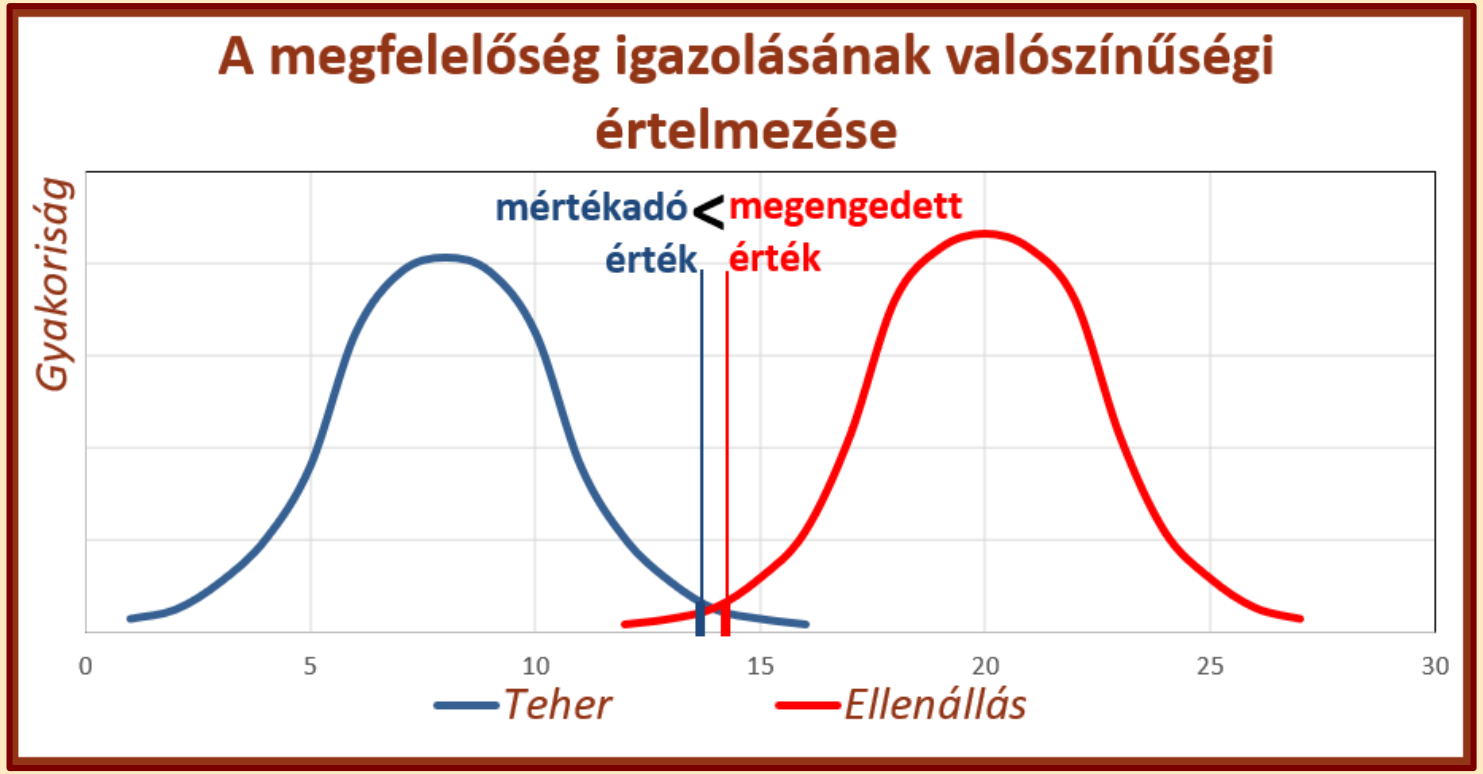
$$Y_{max} \leq Y_{eng.} \quad ; \quad p_{max} \leq p_{eng.}$$

- A MEGENGEDETT ELMOZDULÁS/ALAKVÁLTOZÁS NE LEGYEN KISEBB A MÉRTÉKADÓ ELMOZDULÁSNÁL/ALAKVÁLTOZÁSNÁL.

$$e_{max} \leq e_{eng.} \quad ; \quad d_{max} \leq d_{eng.}$$

A gazdaságosság érdekében az egyenlőség megközelítésére szükséges törekedni valamennyi reláció teljesítésekor.

- A valószínűségi változóként működő terhek ésszerűen megválasztott **legnagyobb** értékeinek megfelelő kombinációja hatására kialakuló legnagyobb keresztmetszeti mennyiségek a **mértékadó** értékek.
- A valószínűségi változóként működő anyagi ellenállás ésszerűen megválasztott **legkisebb** értékének és szükség esetén a km.-i geometriának az együtteséből meghatározott mennyiség a **megengedett** érték.



SZILÁRDSÁGTANI KÖVETELMÉNYEKKEL KAPCSOLATOS ALAPVETŐ MÉRNÖKI FELADATOK

- MÉRETEZÉS

A teher ismeretében, az anyag megválasztása mellett az alkalmazandó méretek meghatározása a megfelelőségi relációk biztosításával.

- ELLENŐRZÉS

A teher, az anyag és a méretek ismeretében a megfelelőségi relációk kimutatása.

- TEHERBÍRÁS MEGHATÁROZÁS

A méretek és az anyag ismeretében a megfelelőségi relációk biztosítása mellett a teher maximumának (teherbírás) meghatározása.

AZ ELEMI SZILÁRDSÁGTAN FELTEVÉSEI

A TEST

- rúdként vagy rúdszerkezetként működik,
- terheletlen állapotban feszültségmentes.

AZ ANYAG

- homogén,
- izotróp
- lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny.

AZ ALAKVÁLTOZÁSOK/ELMOZDULÁSOK

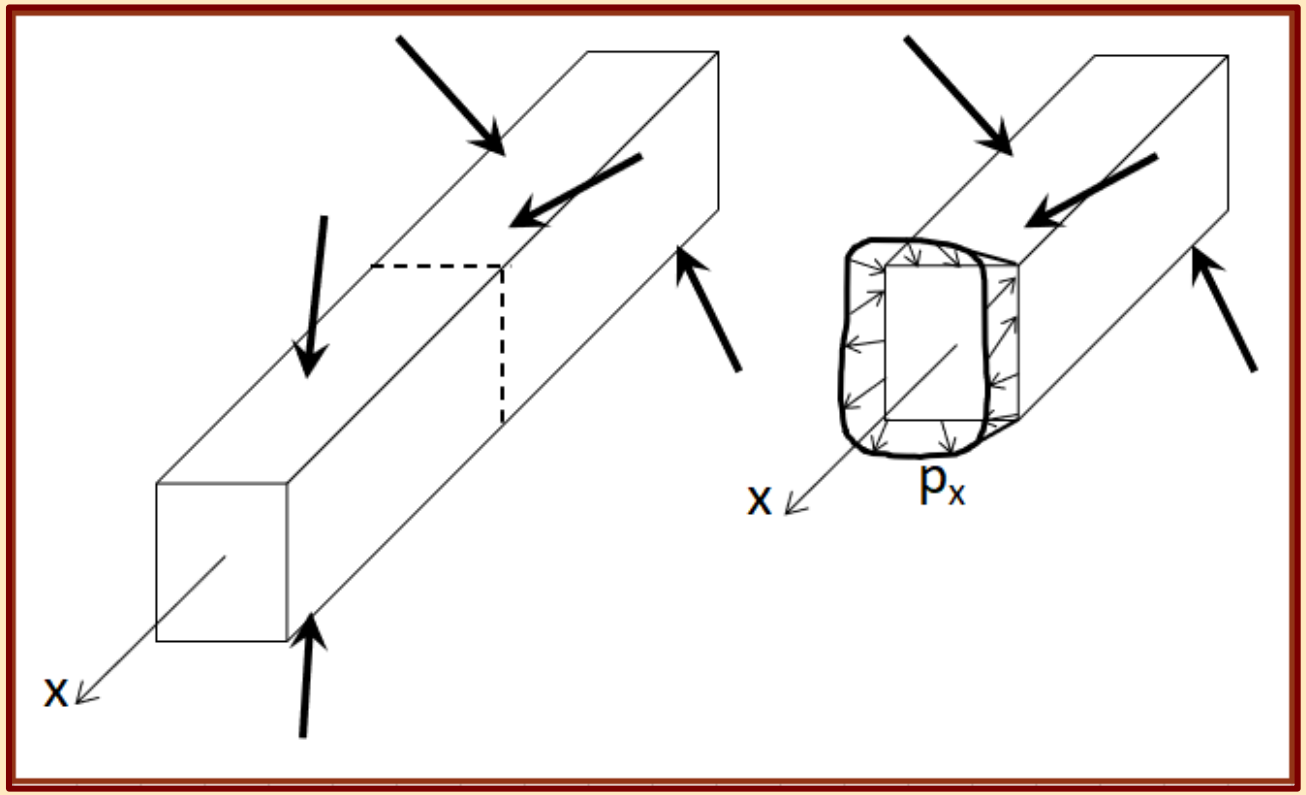
- kicsinyek, ezért egyszerűsítések használhatóak leírásukra, közöttük lineáris a kapcsolat emiatt. (kis elmozdulások elve)

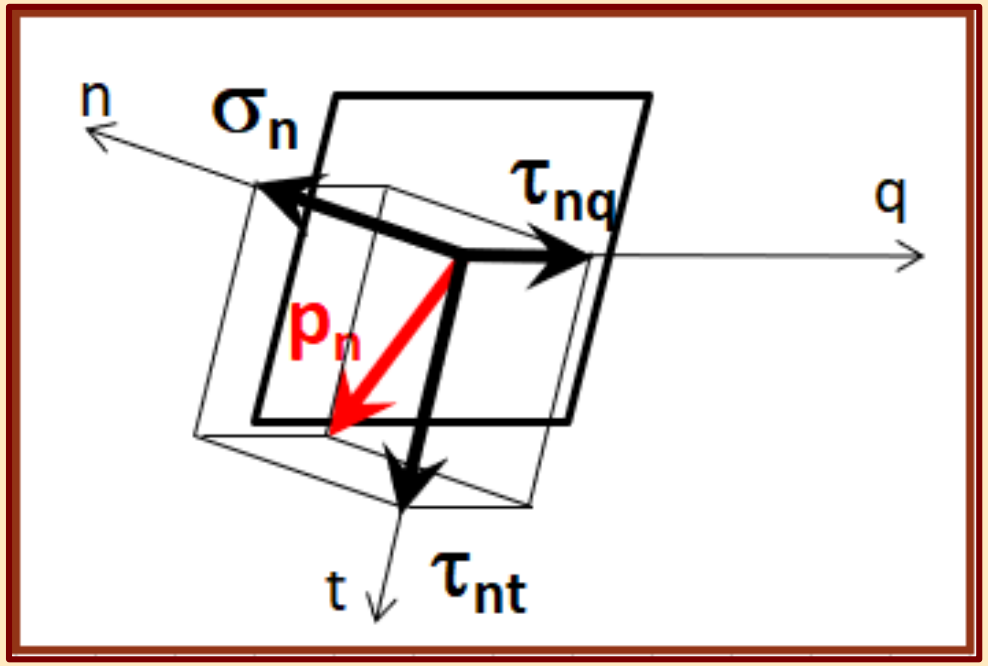
A KERESZTMETSZETEK

- alakváltozások után is síkok maradnak. (Bernoulli-Navier feltevés)

FESZÜLTSÉG

- fajlagos belső erő
- az anyagi kapcsolat hiányát pótolja a km.-ben
- a tartó egy pontjának metszetéhez tartozik

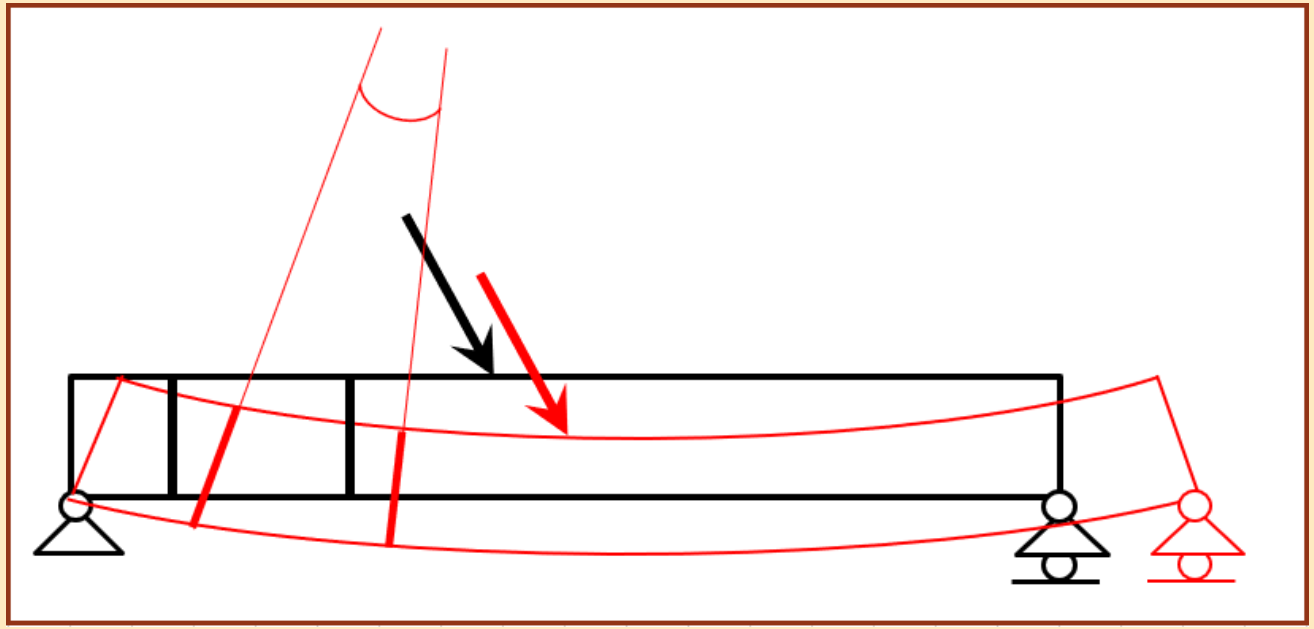


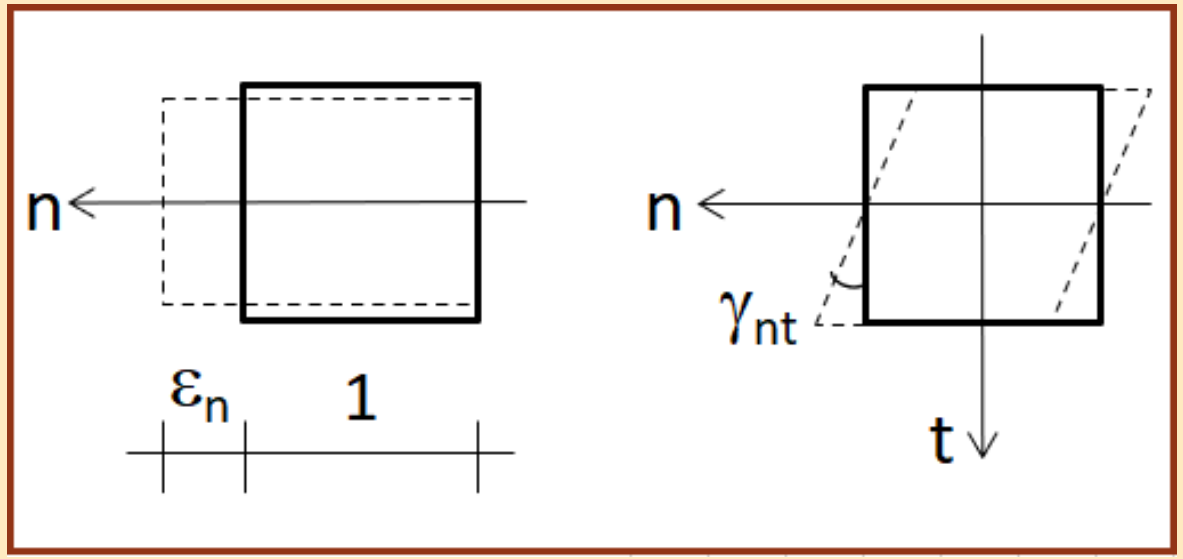


- nyírófeszültség (τ): a sík érintőjébe eső feszültség
- normálfeszültség (σ): a sík normálisába eső feszültség (húzó-nyomó hatás)

ALAKVÁLTOZÁS

- keresztmetszetek közötti relatív elmozdulás fajlagos értéke





- fajlagos megnyúlás: egységnyi hossz változása (nyúlás-rövidülés)
- szögtorzulás: derékszög változása

SZILÁRDSÁGTANI ÖSSZEFÜGGÉSEK EGYENLETEI

Keresztmetszeti feszültségek meghatározásához szükségesek.

EGYENSÚLYI EGYENLETEK

- Az igénybevételek és a feszültségek között teremtenek kapcsolatot.

GEOMETRIAI EGYENLETEK

- Az elmozdulások és az alakváltozások között teremtenek kapcsolatot.

FIZIKAI (ANYAG-) EGYENLETEK

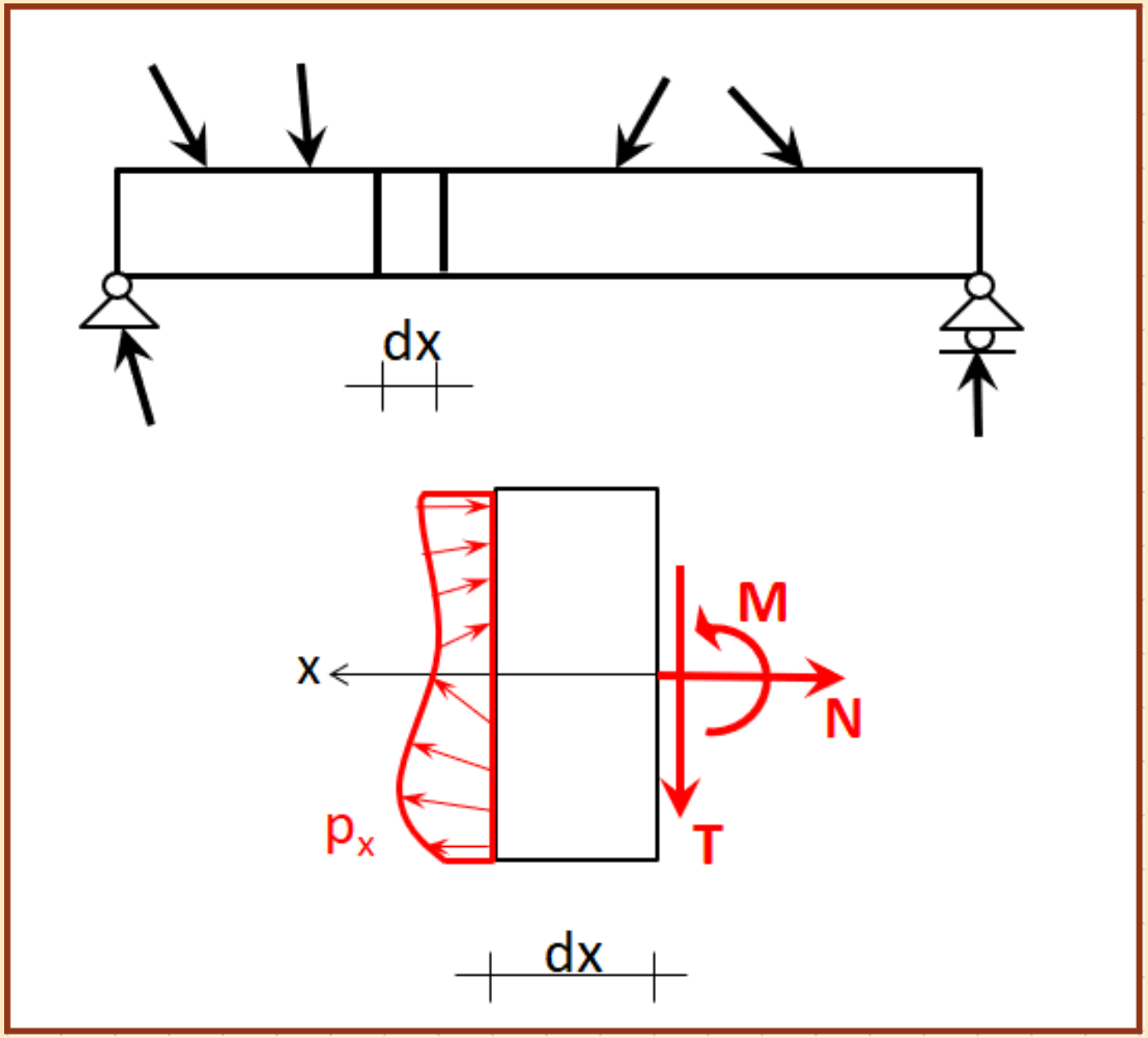
- A feszültségek és az alakváltozások között teremtenek kapcsolatot.

EGYENSÚLYI EGYENLETEK

Az egyensúlyi kijelentés a dx hosszúságú elem egyensúlya alapján:

$$\left(\int_{(A)} p_x \cdot dA \right) \doteq (N; T; M)$$

Az egyensúlyi egyenletek az egyensúlyi kijelentés alapján felírhatóak.



GEOMETRIAI EGYENLETEK

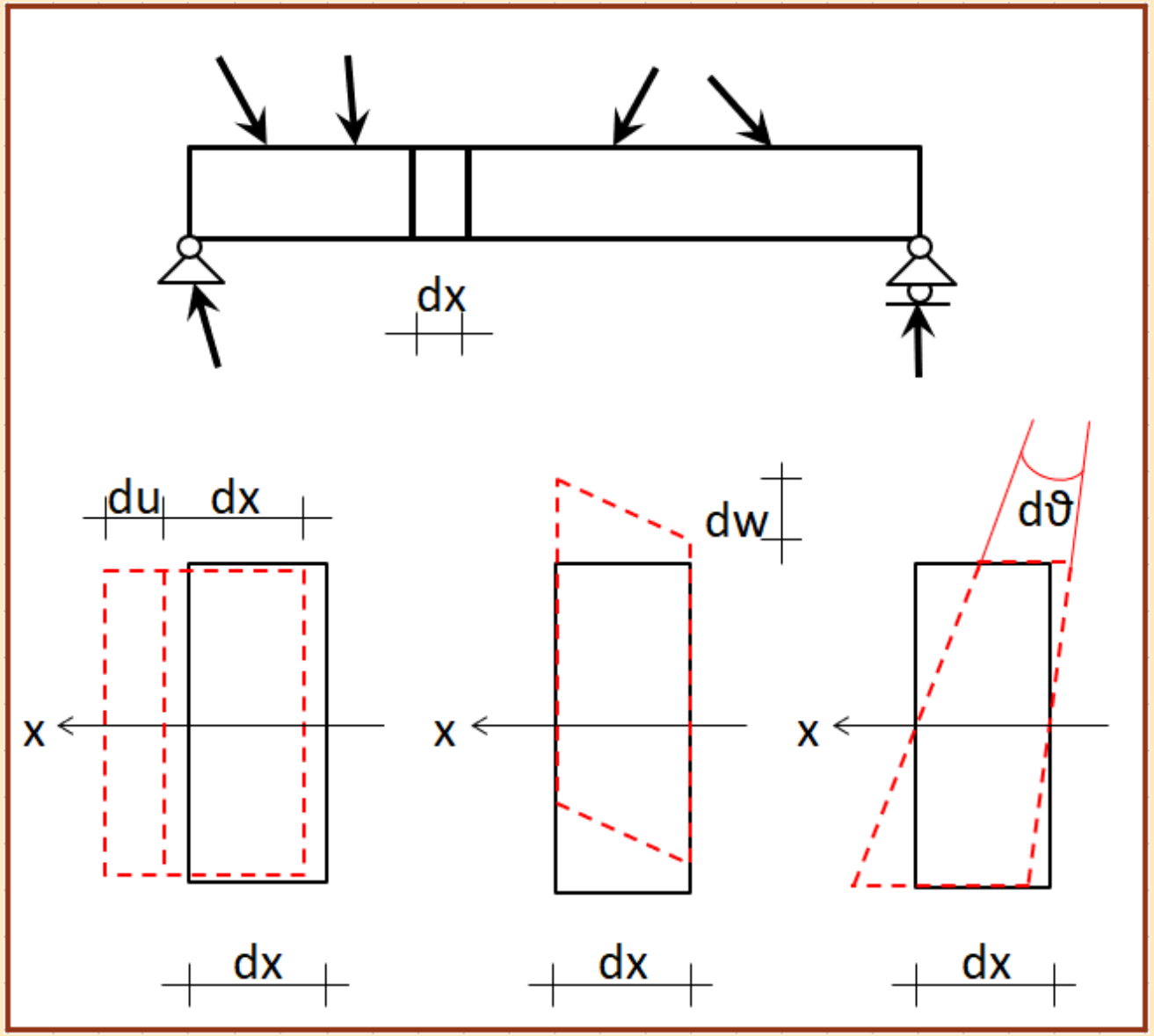
A dx hosszúságú elem véglapjainak relatív elmozdulásaiból számított alakváltozások egységnyi hosszra vonatkozó (fajlagos) értékei:

$$fajlagos\ megnyúlás\ (N-ből): \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$szögtorzulás\ (T-ből): \gamma = \frac{dw}{dx}$$

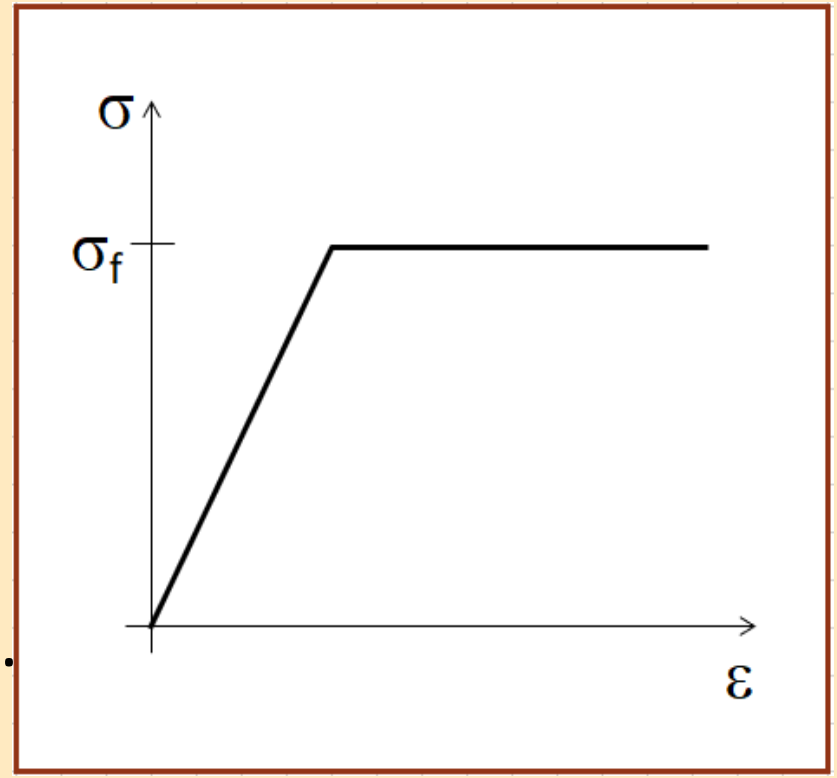
$$fajlagos\ szögelfordulás\ (M-ből):$$

$$\kappa = \frac{d\vartheta}{dx}$$



FIZIKAI (ANYAG-) EGYENLETEK

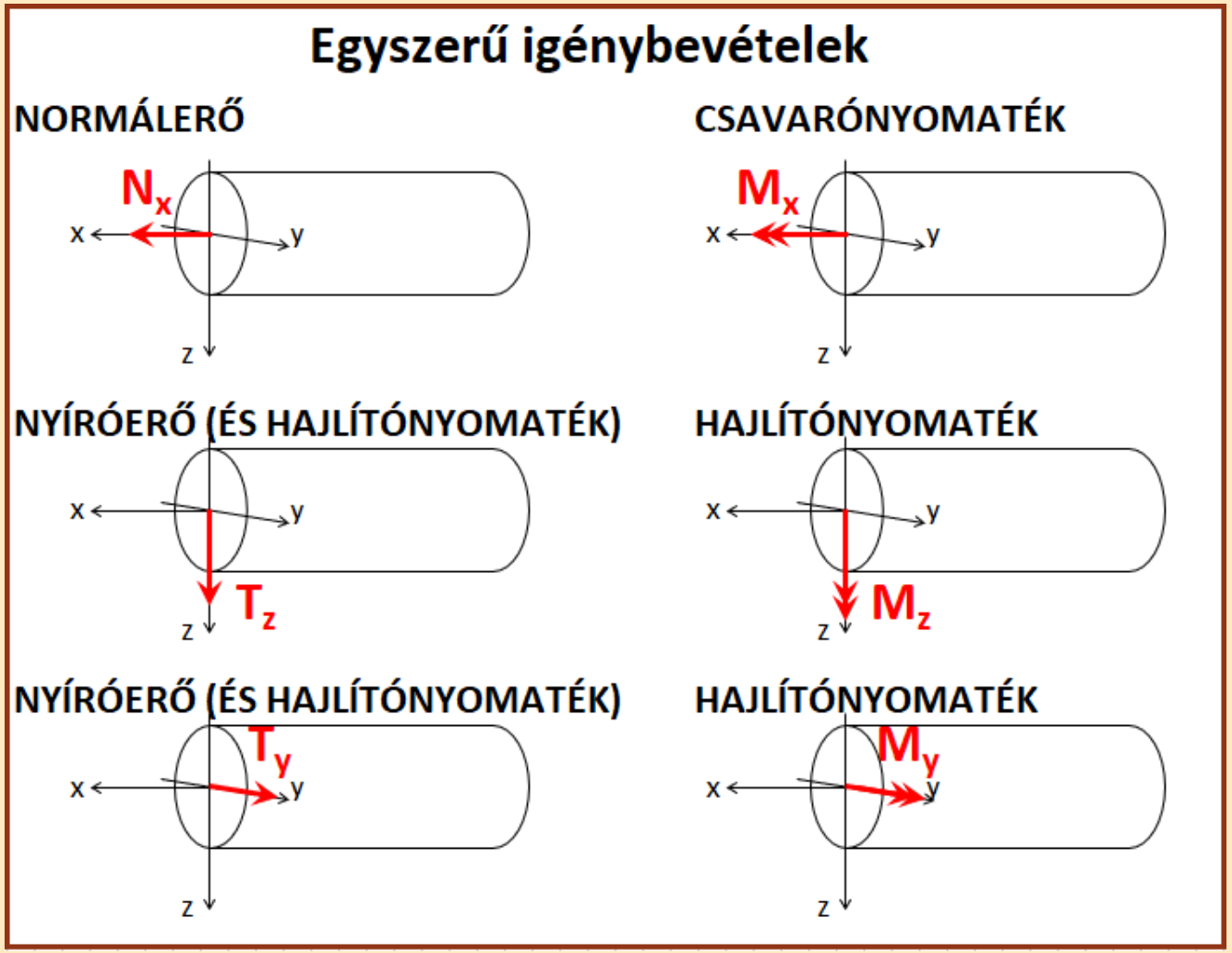
Az anyag viselkedését modellezik, összefügést teremtve a feszültségek és alakváltozások között. A legegyszerűbb és sok esetben a legmegfelelőbb a lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny modell:



- A lineárisan rugalmas rész ($\sigma<\sigma_f$):
  - Tehermentesítés után nincs maradó alakváltozás, $\sigma-\varepsilon$ egyenesen arányos kapcsolata.
  - Hooke-törvény: $\sigma = E \cdot \varepsilon$; $\tau = G \cdot \gamma$
  - Rugalmassági modulus: E ; Nyírási rugalmassági modulus: G
    Az anyag merevségét, alakváltozásokkal szembeni ellenállását fejezik ki.
  - Haránkontrakció: $\varepsilon_k = -\nu \cdot \varepsilon$; Poisson-tényező: ν
- A tökéletesen képlékeny rész ($\sigma=\sigma_f$):
  - A folyáshatár elérésekor, annak változatlansága mellett tetszőlegesen nagy megnyúlás jöhet létre, tehermentesítés után ezek megmaradnak.

FESZÜLTSÉGSZÁMÍTÁS AZ IGÉNYBEVÉTELEKBŐL

- A feszültségek képleteit, km.-i eloszlásukat az eddigiek segítségével az egyszerű igénybevételek vonatkozásában állítjuk elő.
- Összetett igénybevételek esetén az azonos típusú (σ vagy τ) feszültségeket összegezzük az egymásra halmozás elve szerint.
- Összetett igénybevételek esetén a különböző típusú (σ és τ) feszültségek együttes hatását csak fokozott kihasználtság esetén érdemes vizsgálni (főfeszültségek, összehasonlító feszültségek).



Tartószerkezetek mechanikája II.

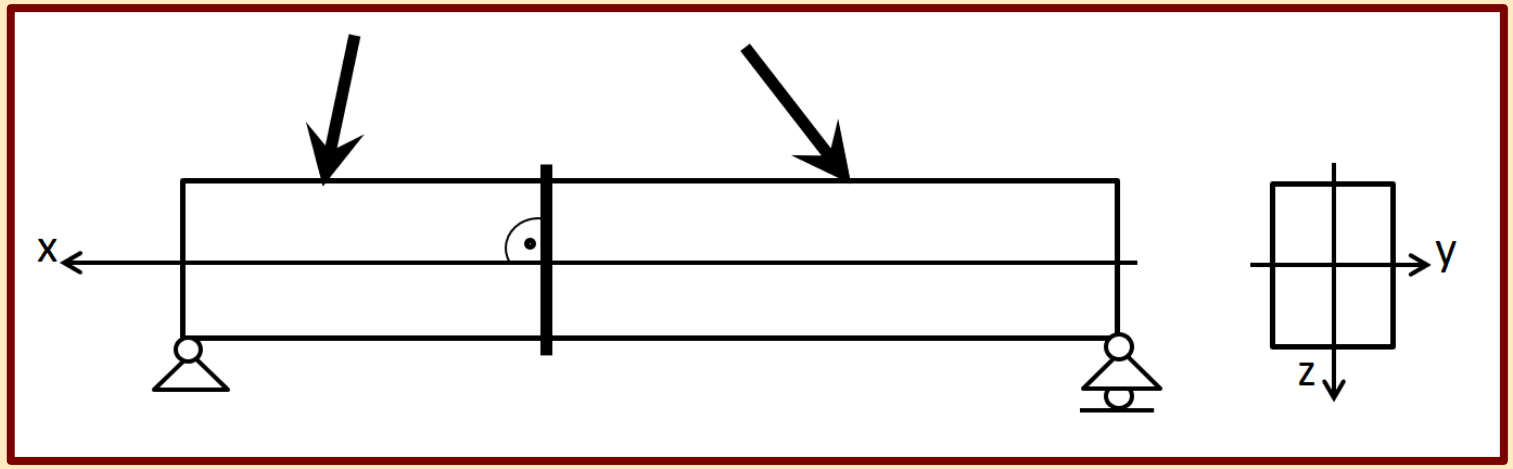
2.

Keresztmetszeti jellemzők: súlypontszámítás

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

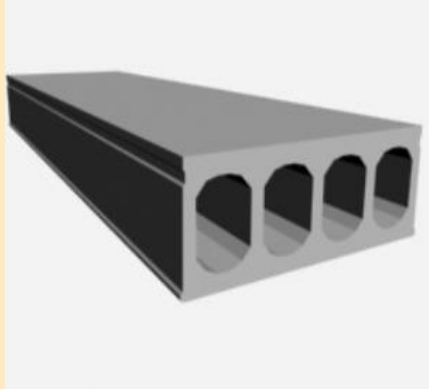
KERESZTMETSZET FOGALMA

- A rúdszerkezetek tengelyvonalára merőleges metszetet nevezzük keresztmetszetnek.
- A feszültségek értékét az igénybevételek és a keresztmetszeti geometria határozza meg.
- A feszültség számításhoz ezért a keresztmetszet különböző jellemzőinek ismerete szükséges.



KERESZTMETSZETI KIALAKÍTÁSOK

A változó területen felhasznált, többféle követelménynek megfelelő, eltérő anyagú tartók keresztmetszetei sokféle kialakításúak lehetnek.



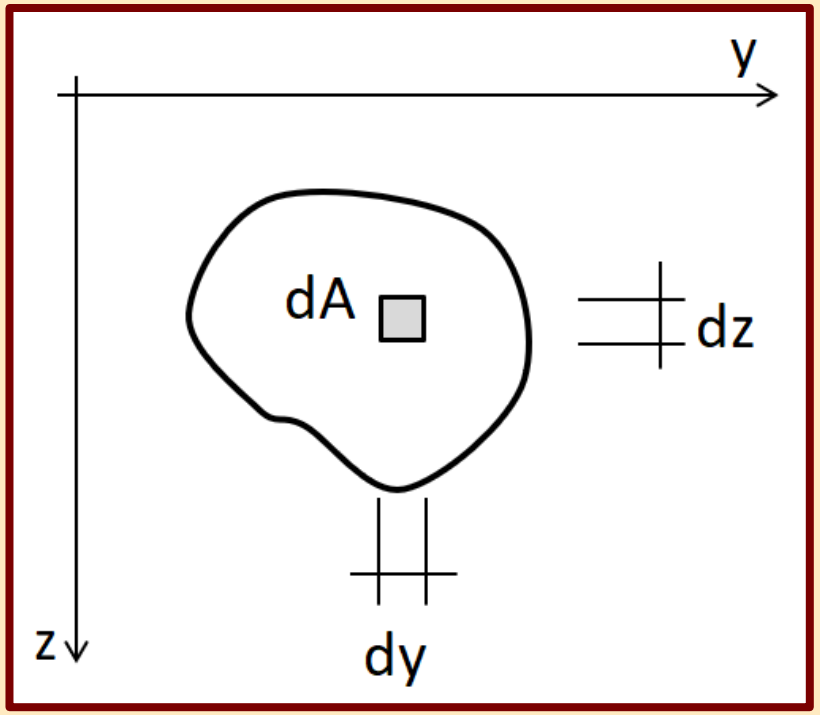
KERESZTMETSZETI TERÜLET

- A test keresztirányban felhasználandó anyagmennyiségét szemlélteti.
- Nulladrendű nyomatéknak is nevezzük.
- Mindig pozitív mennyiség.

MEGHATÁROZÁS ÁLTALÁNOS ESETBEN

$$A = \int_{(A)} dA$$

- A körvonal függvényének ismerete szükséges.
- Általában kikerülhető a használata.

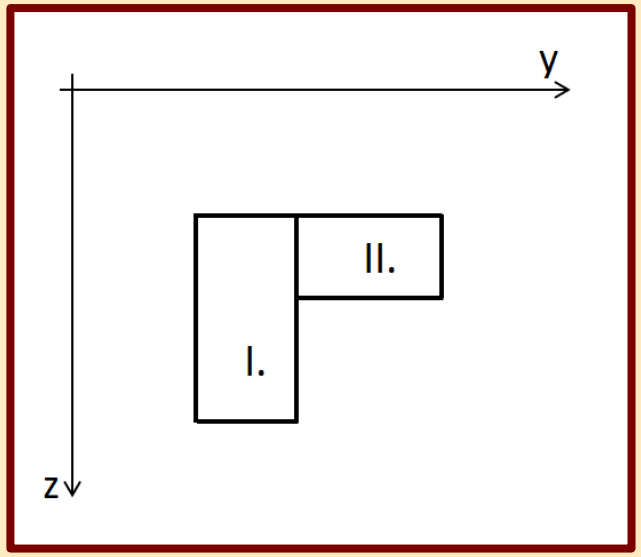


MEGHATÁROZÁS, HA EGYSZERŰ (ISMERT JELLEMZŐJŰ) SÍKIDOMOKBÓL ÁLL

- Részekre bontás segítségével

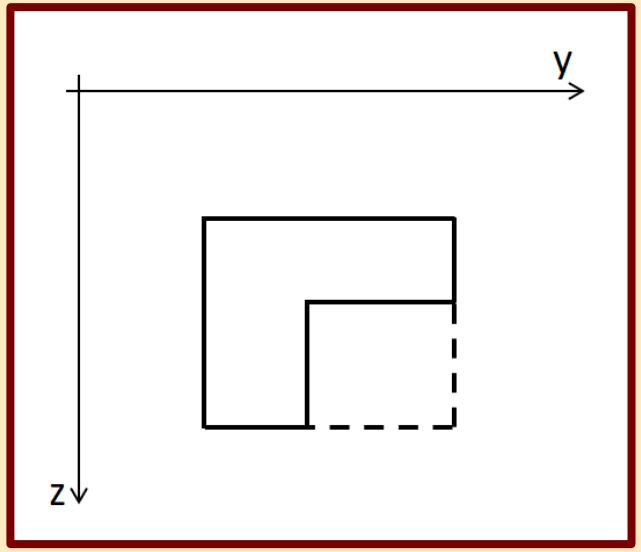
$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$$A = A_{I.} + A_{II.}$$



- Kiegészítés segítségével

$$A = A_{kiegészített} - A_{kiegészítő}$$



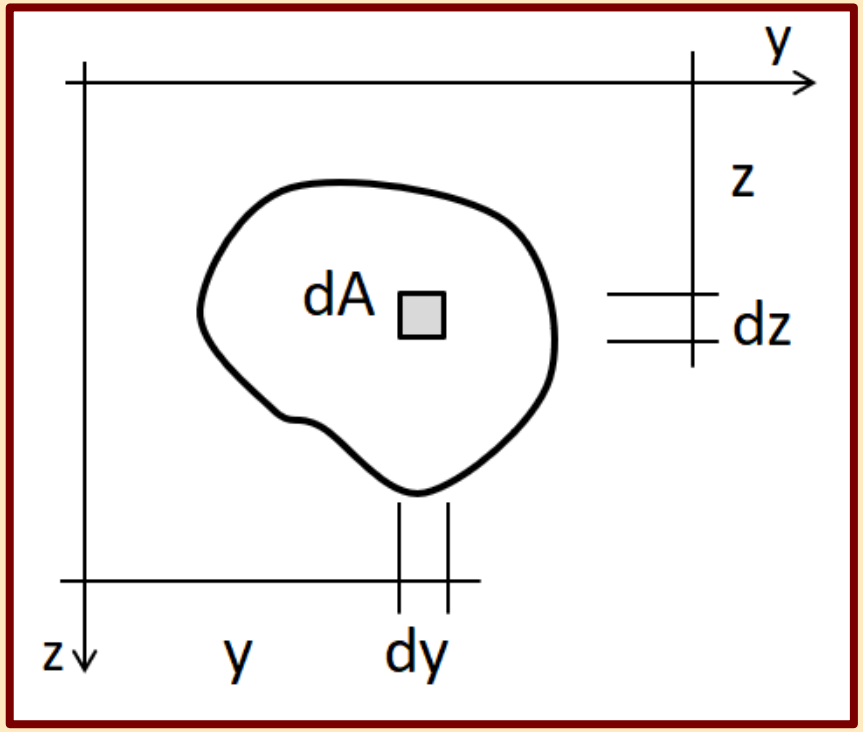
STATIKAI NYOMATÉK

- Egy tengelyre számított nyomaték-jellegű mennyiség.
- Elsőrendű nyomatéknak is nevezzük.
- Lehet pozitív és negatív is. Nulla értéket akkor vesz fel, ha a síkidom súlypontján halad át a vizsgált tengely.

MEGHATÁROZÁS ÁLTALÁNOS ESETBEN

$$S_y = \int_{(A)} z \cdot dA$$

$$S_z = \int_{(A)} y \cdot dA$$

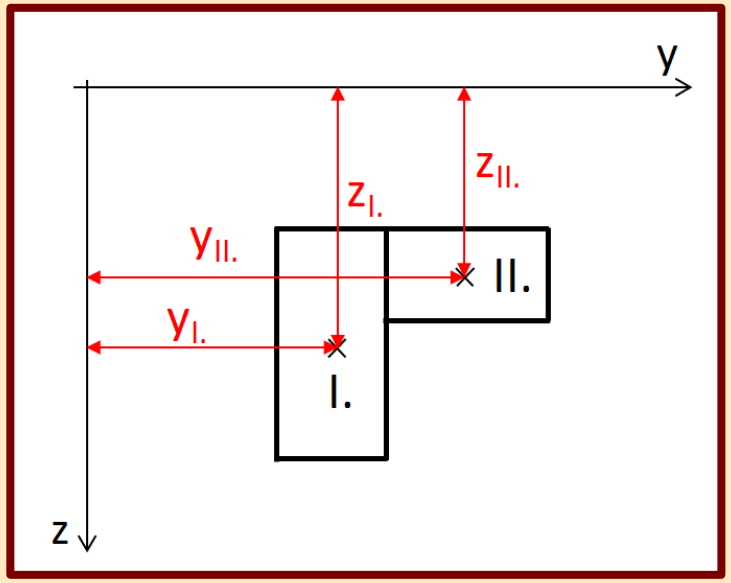


MEGHATÁROZÁS, HA EGYSZERŰ (ISMERT JELLEMZŐJŰ) SÍKIDOMOKBÓL ÁLL

- Részekre bontás segítségével

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot A_i \; ; \qquad S_y = z_{I.} \cdot A_{I.} + z_{II.} \cdot A_{II.}$$

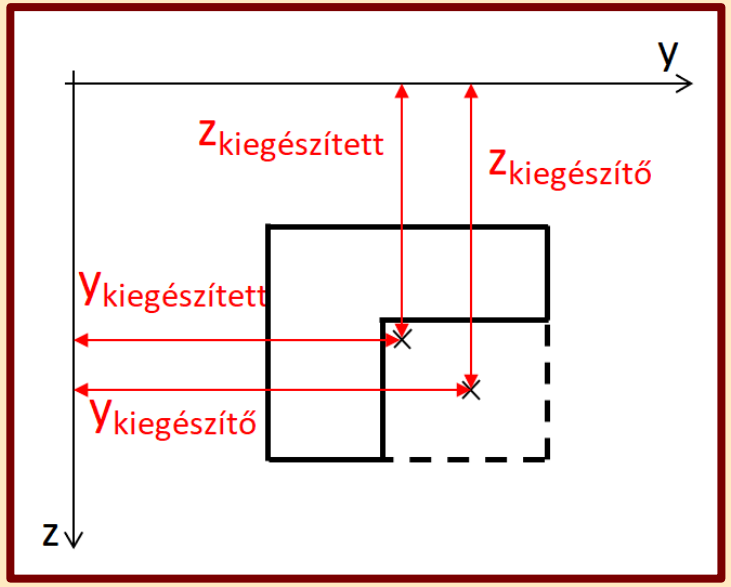
$$S_z = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot A_i \; ; \qquad S_z = y_{I.} \cdot A_{I.} + y_{II.} \cdot A_{II.}$$



- Kiegészítés segítségével

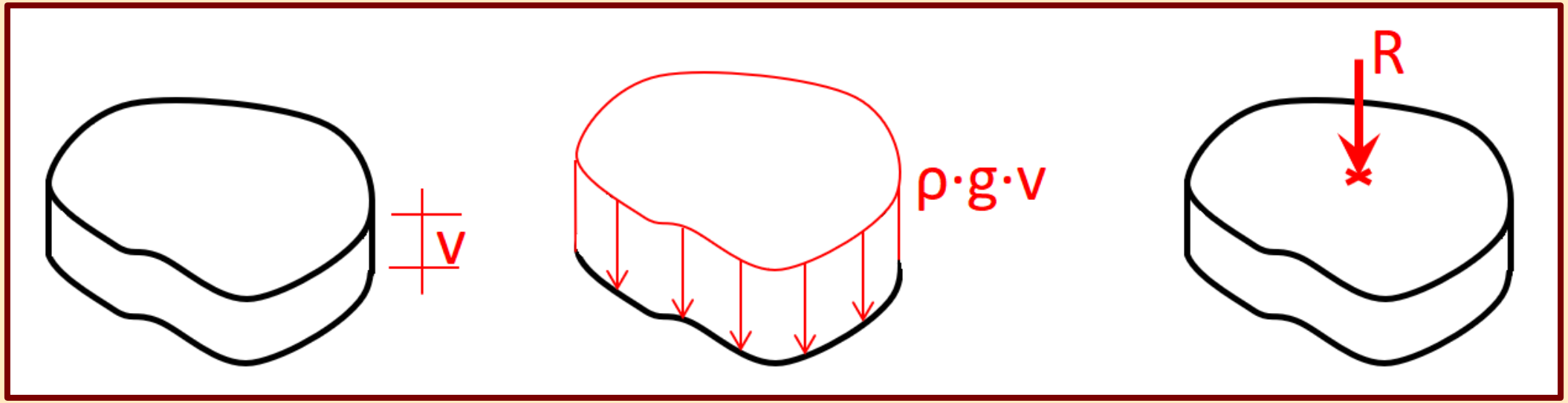
$$S_y = z_{kiegészített} \cdot A_{kiegészített} - z_{kiegészítő} \cdot A_{kiegészítő}$$

$$S_z = y_{kiegészített} \cdot A_{kiegészített} - y_{kiegészítő} \cdot A_{kiegészítő}$$



SÚLYPONT

- A súlypont egy síkidom súlyvonalainak metszéspontja, amelybe a súlyerőt koncentrálhatjuk.
- Rendeljünk a síkidomhoz egyenletes vastagságot (v), változatlan sűrűséget (ρ) és a gravitációs állandó (g) segítségével egy felület mentén megoszló (súly)erőrendszert kapunk.
- Számítsuk ki az erőrendszer eredőjét és annak a helyét!



SÚLYPONT SZÁMÍTÁS A MEGOSZLÓ ERŐRENDSZER SEGÍTSÉGÉVEL

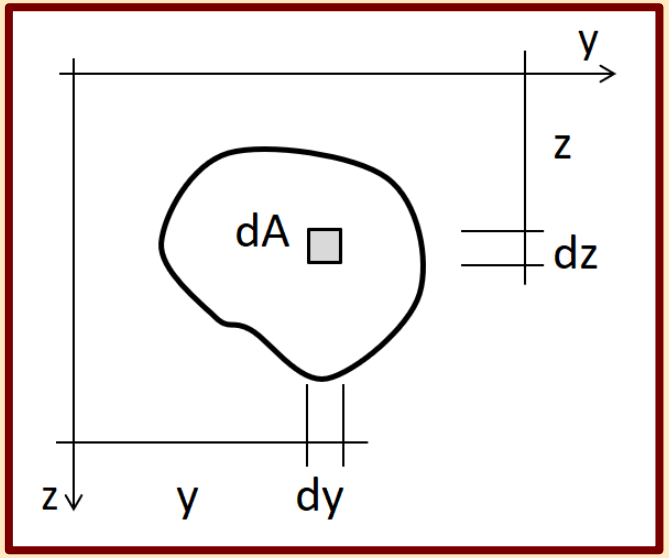
$$R = \int_{(A)} \rho \cdot g \cdot v \cdot dy \cdot dz$$

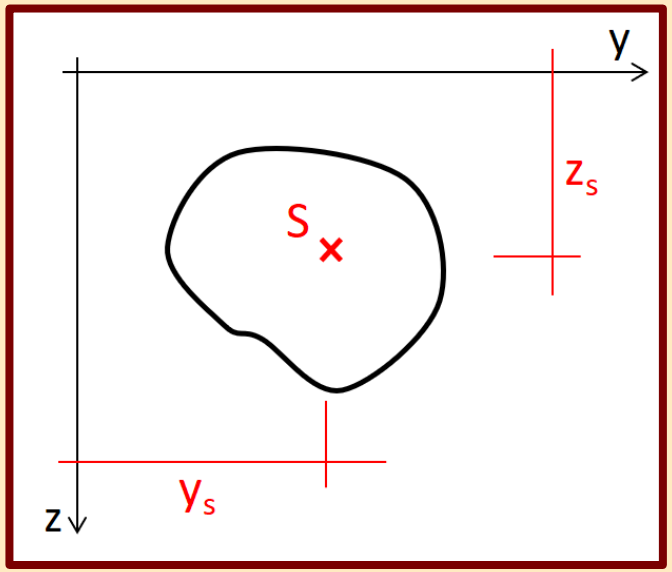
$$M_R{}^y = \int_{(A)} z \cdot \rho \cdot g \cdot v \cdot dy \cdot dz$$

$$z_s = \frac{M_R{}^y}{R} = \frac{\int_{(A)} z \cdot \rho \cdot g \cdot v \cdot dy \cdot dz}{\int_{(A)} \rho \cdot g \cdot v \cdot dy \cdot dz}$$

$$z_s = \frac{\rho \cdot g \cdot v \int_{(A)} z \cdot dy \cdot dz}{\rho \cdot g \cdot v \int_{(A)} dy \cdot dz} = \frac{\int_{(A)} z \cdot dy \cdot dz}{\int_{(A)} dy \cdot dz}$$

$$z_s = \frac{S_y}{A} \;\; ; \;\; y_s = \frac{S_z}{A}$$



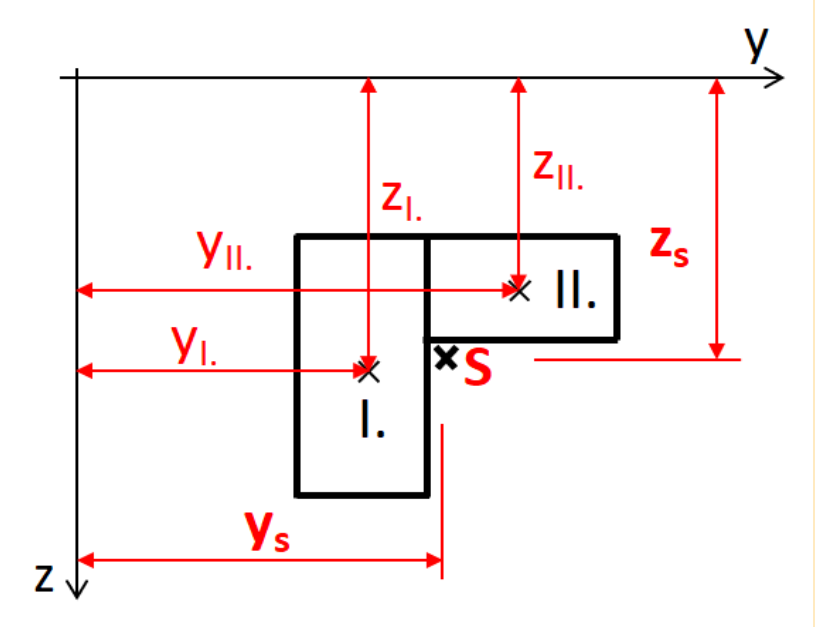


A felvett értékek (ρ, v, g) egyszerűsítődtek, a megoldás a statikai nyomaték és a terület segítségével számítható, amely a súlypont koordinátákat eredményezi.

SÚLYPONT MEGHATÁROZÁS, HA A KERESZTMETSZET EGYSZERŰ (ISMERT JELLEMZŐJŰ) SÍKIDOMOKBÓL ÁLL

$$z_s = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

$$y_s = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$



- Továbbra is használható a részekre bontás és a kiegészítés is.
- A súlypont koordináták bármilyen előjelűek lehetnek. (A részsíkidomok koordinátáit is előjelhelyesen kell figyelembe venni!)
- Megállapítható, hogy az összefüggés a súlyozott átlag számításának felel meg. A súlyozó értékek a részsíkidomok területei.
- Vonalrendszerek, testek súlypont számítására is alkalmas, ahol a vonalhossz vagy a térfogat a súlyozó érték a terület helyett.

Tartószerkezetek mechanikája II.

3.

Keresztmetszeti jellemzők: másodrendű nyomatékok

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

MÁSODRENDŰ NYOMATÉKOK

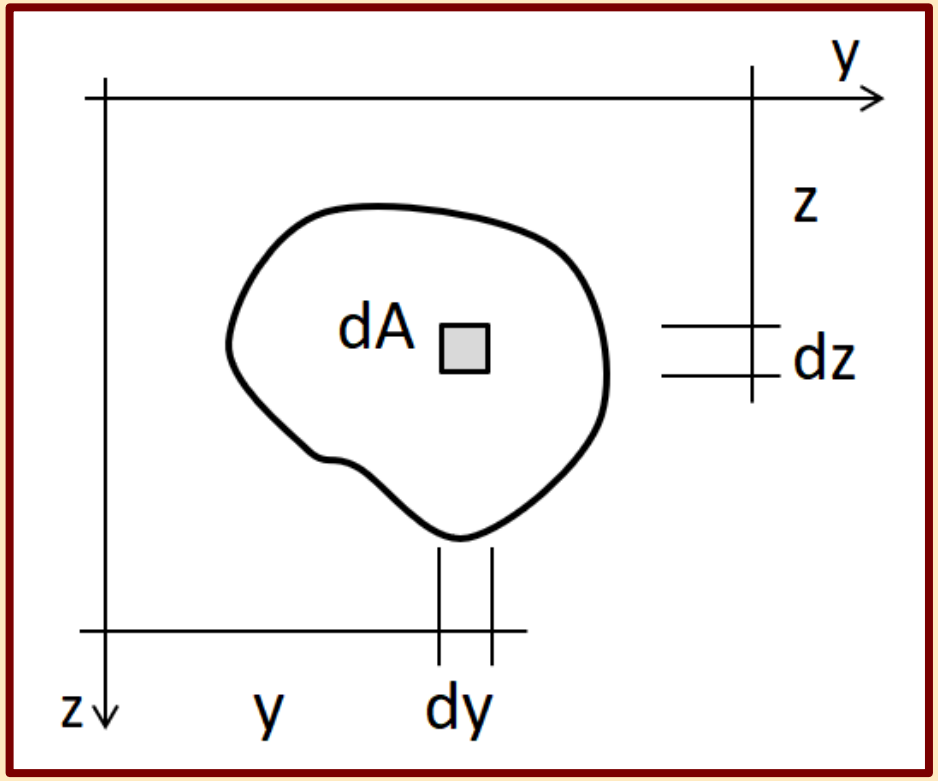
- Összefüggéseikben egy tengely távolság a négyzeten vagy két tengely távolság szorzata szerepel, innen az elnevezés.
- Típusai:
  - Tehetetlenségi (inercia) nyomaték: I_y , I_z
  - Poláris inercianyomaték: I_0
  - Centrifugális (deviációs) nyomaték: C_{yz}
- A keresztmetszet kialakítása, elrendezése jelentősen befolyásolja értéküket.
- Anyagtól, tehertől függetlenek, csak a keresztmetszeti geometriától függenek.
- Rúdelemek hajlítási igénybevétele esetén kerülnek számításra.
- Feszültségek, alakváltozások értékét befolyásolják.

TEHETETLENSÉGI (INERCIA) NYOMATÉK FOGALMA

- A keresztmetszet elrendezéséből adódó, annak egy meghatározott tengely körüli elfordítással szembeni ellenállását fejezi ki.
- Definíciója mindkét tengelyre:

$$I_y = \int_{(A)} z^2 \cdot dA$$

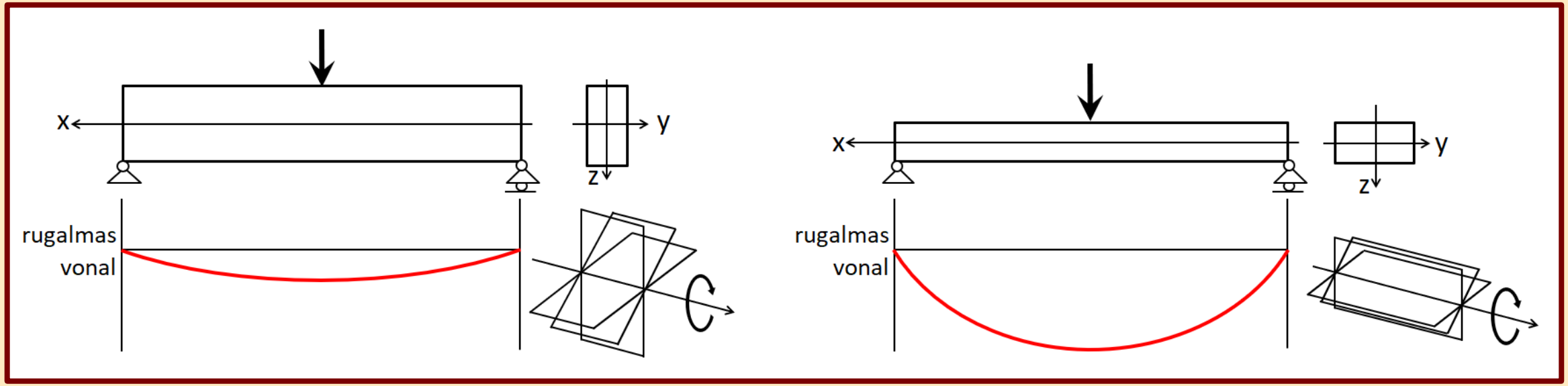
$$I_z = \int_{(A)} y^2 \cdot dA$$



- Az inercianyomaték mindig pozitív előjelű.

TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKOK GYAKORLATI JELENTÉSE

- A két azonos méretű, anyagú, terhelésű gerenda működését vizsgáljuk keresztmetszetük 90°-os elfordítása mellett.
- A km.-eket az y tengely körül elforgatva érezhető, hogy a bal oldali esetben ez nagyobb nehézségbe ütközik, ebben az irányban nagyobb az elfordítással szembeni ellenállás, itt nagyobb az inercia.
- Ezért a bal oldali esetben kisebb lehajlások (és feszültségek) keletkeznek.



TÉGLALAP TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKA

A tehetetlenségi nyomaték definíciója a súlyponti y tengelyre.

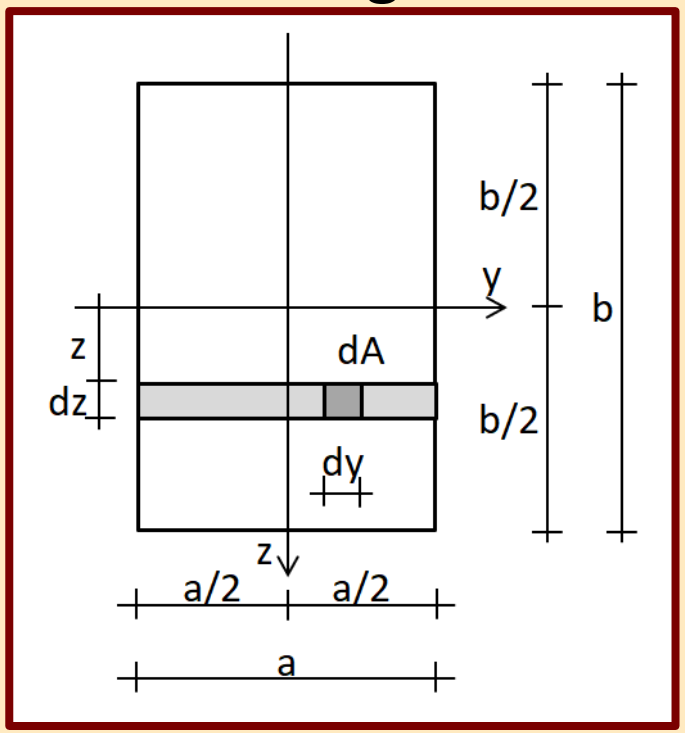
$$I_y = \int_{(A)} z^2 \cdot dA$$

Csak függőleges irányban szükséges integrálni, vízszintesen a szélesség állandó.

$$I_y = \int_{(-b/2)}^{+b/2} a \cdot z^2 \cdot dz$$

$$I_y = a \cdot \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \frac{a}{3} \cdot \left(\frac{b^3}{8} - \left(-\frac{b^3}{8}\right)\right) = \frac{a \cdot 2 \cdot b^3}{3 \cdot 8}$$

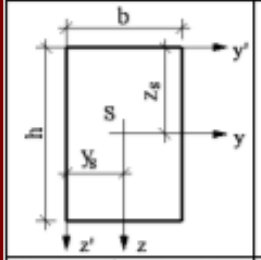
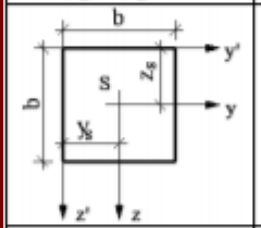
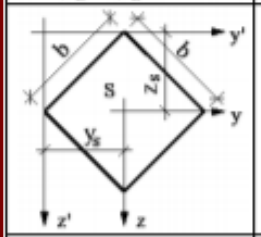
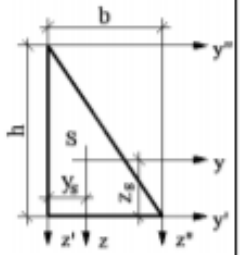
$$I_y = \frac{a \cdot b^3}{12} \; ; \qquad I_z = \frac{b \cdot a^3}{12}$$

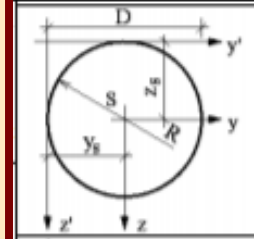
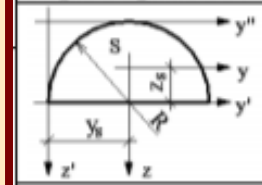
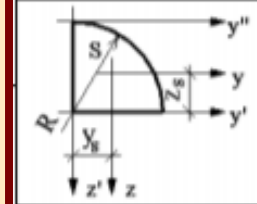


A művelet a z tengelyre is elvégezhető. Mindkét megoldásnál a vizsgált tengelyre merőleges oldalt kell a köbre emelni.

EGYSZERŰ SÍKIDOMOK TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKA

A definíció segítségével a téglalaphoz hasonlóan valamennyi egyszerű síkidom tehetetlenségi nyomatéka meghatározható.

Keresztmetszet	Felület	Súlypont	Tehetetlenségi nyomatékok	Centrifugális nyomatékok	Keresztmetszeti tényezők
	$A = b \cdot h$	$y_s = \frac{b}{2}$ $z_s = \frac{h}{2}$	$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ $I_{y'} = \frac{b \cdot h^3}{3}$ $I_{z'} = \frac{h \cdot b^3}{3}$	$C_{yz} = 0$ $C_{y'z'} = \frac{b^2 \cdot h^2}{2}$	$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $W_z = \frac{h \cdot b^2}{6}$
	$A = b^2$	$y_s = \frac{b}{2}$ $z_s = \frac{b}{2}$	$I_y = I_z = \frac{b^4}{12}$ $I_{y'} = I_{z'} = \frac{b^4}{3}$	$C_{yz} = 0$ $C_{y'z'} = \frac{b^4}{4}$	$W_y = W_z = \frac{b^3}{6}$
	$A = b^2$	$y_s = \frac{b}{\sqrt{2}}$ $z_s = \frac{b}{\sqrt{2}}$	$I_y = I_z = \frac{b^4}{12}$	$C_{yz} = 0$	$W_y = W_z = \frac{b^3}{6 \cdot \sqrt{2}}$
	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$y_s = \frac{b}{3}$ $z_s = \frac{h}{3}$	$I_y = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_z = \frac{h \cdot b^3}{36}$ $I_{y'} = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_{z'} = \frac{h \cdot b^3}{12}$ $I_{y''} = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_{z''} = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$C_{yz} = \frac{b^2 \cdot h^2}{72}$ $C_{y'z'} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$	$W_{y,min} = \frac{b \cdot h^2}{24}$ $W_{z,min} = \frac{h \cdot b^2}{24}$ $W_{y,max} = \frac{b \cdot h^2}{12}$

Keresztmetszet	Felület	Súlypont	Tehetetlenségi nyomatékok	Centrifugális nyomatékok	Keresztmetszeti tényezők
	$A = R^2 \cdot \pi$	$y_s = R$ $z_s = R$	$I_y = I_z = \frac{\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$	$C_{yz} = 0$	$W_y = W_z = \frac{\pi \cdot R^3}{4}$ $= \frac{\pi \cdot D^3}{32}$
	$A = \frac{R^2 \cdot \pi}{2}$	$y_s = R$ $z_s = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$ $= 0{,}424 \cdot R$	$I_y = 0{,}1098 \cdot R^4$ $I_z = \frac{\pi \cdot R^4}{8}$ $I_{y'} = \frac{\pi \cdot R^4}{8}$	$C_{yz} = 0$	$W_{y,min} = 0{,}1098 \cdot R^3$ $W_{z,min} = 0{,}2587 \cdot R^3$ $W_z = \frac{\pi \cdot R^3}{8}$
	$A = \frac{R^2 \cdot \pi}{4}$	$y_s = z_s =$ $0{,}424 \cdot R$	$I_y = I_z = 0{,}0549 \cdot R^4$ $I_{y'} = I_{z'} = \frac{\pi \cdot R^4}{16}$	$C_{yz} =$ $0{,}0165 \cdot R^4$ $C_{y'z'} = \frac{-R^4}{8}$	$W_{y,min} = 0{,}0956 \cdot R^3$ $W_{z,min} = 0{,}1296 \cdot R^3$

POLÁRIS INERCIANYOMATÉK FOGALMA

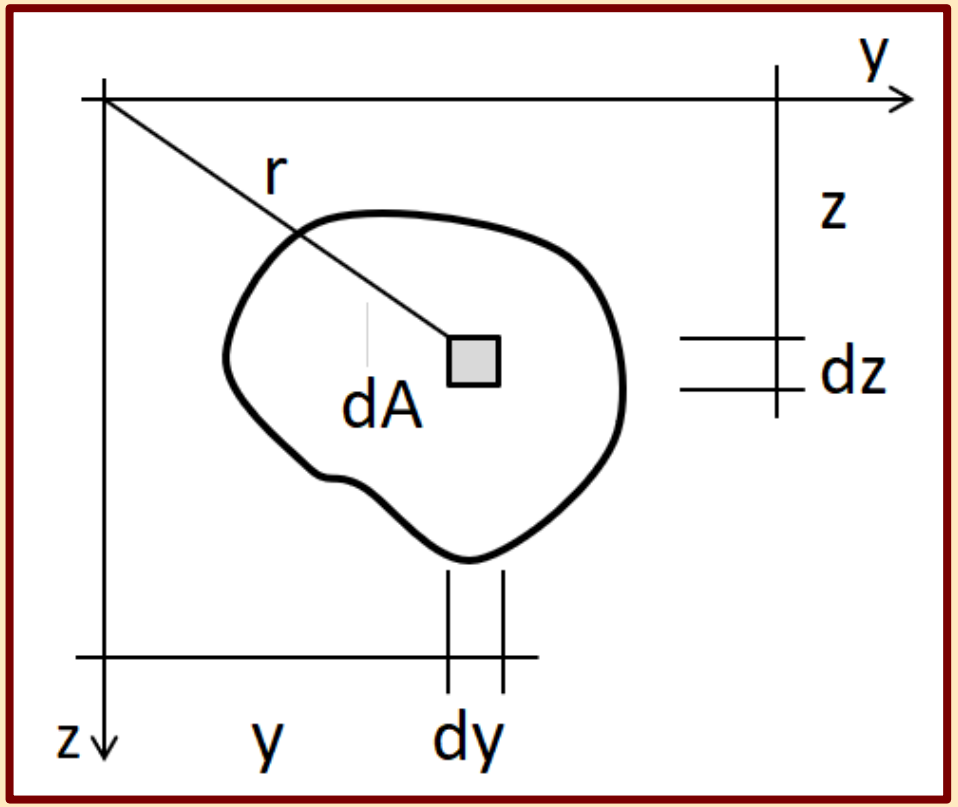
- A keresztmetszet normálisába eső, annak a koordináta-rendszer kezdőpontjából kiinduló tengely (síkbeli ábrázolásnál a koordináta-rendszer kezdőpontja) körüli elfordítással szembeni ellenállását fejezi ki.
- Definíciója az x tengelyre (síkban origóra):

$$I_0 = \int_{(A)} r^2 \cdot dA$$

$$I_0 = \int_{(A)} r^2 \cdot dA = \int_{(A)} (y^2 + z^2) \cdot dA$$

$$I_0 = \int_{(A)} y^2 \cdot dA + \int_{(A)} z^2 \cdot dA$$

$$I_0 = I_z + I_y$$

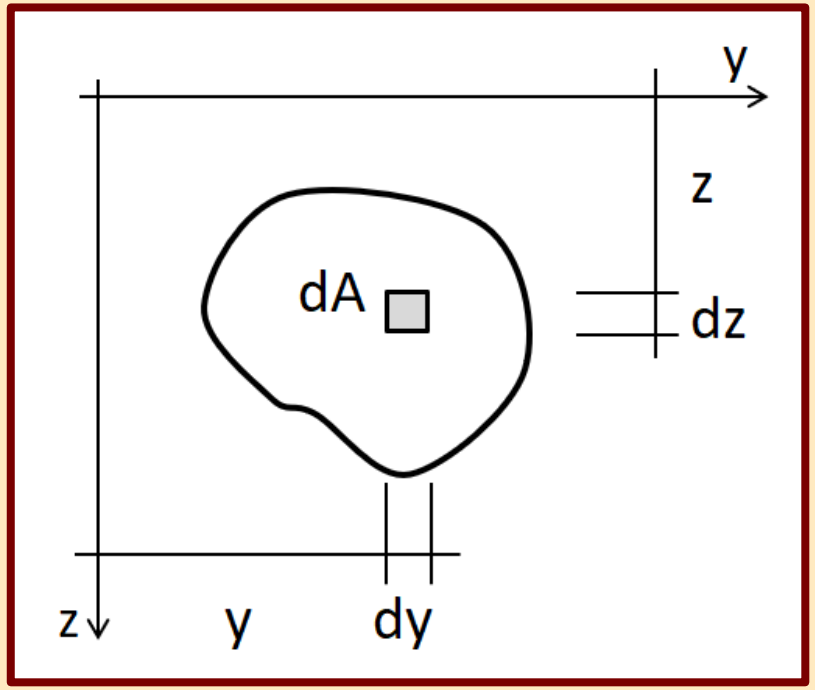


- A poláris inercianyomaték megegyezik két egymásra merőleges tengelyre számított inercianyomaték összegével.

CENTRIFUGÁLIS (DEVIÁCIÓS) NYOMATÉK FOGALMA

- A két tengelytáv szorzatának segítségével előállított másodrendű nyomaték, amely a kiindulási tengelyek főtengelyekhez (később értelmezzük) képesti eltérését mutatja meg.
- Definíciója az y-z tengelykeresztre:

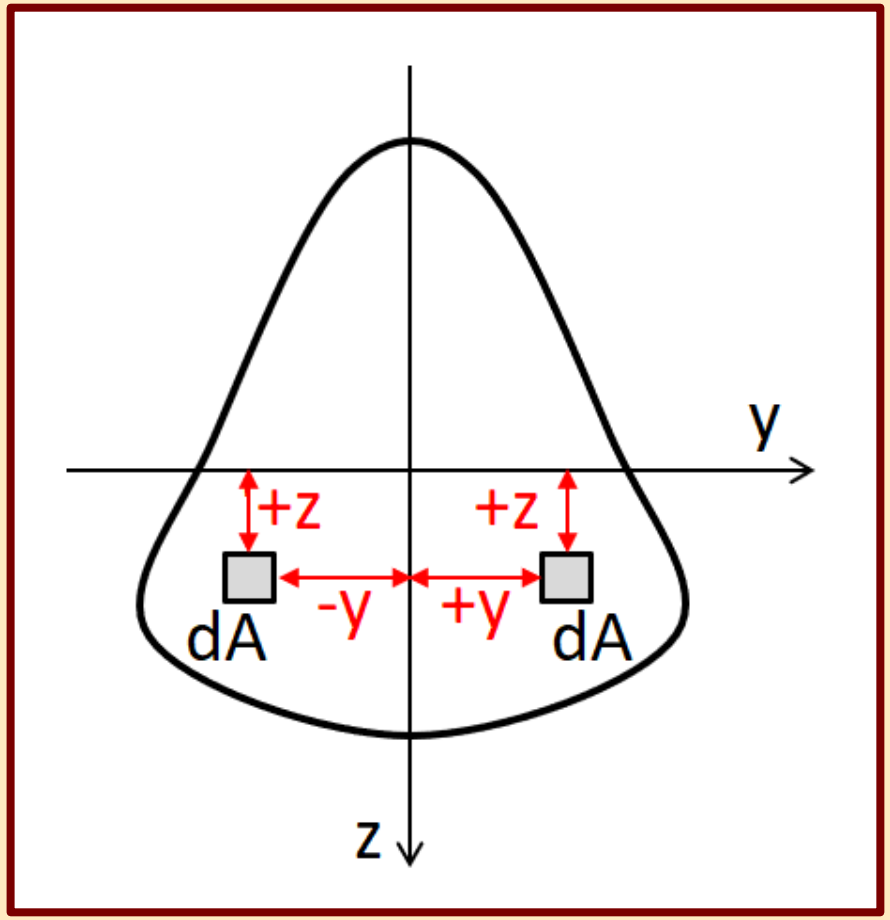
$$C_{yz} = \int_{(A)} y \cdot z \cdot dA$$



- A centrifugális nyomaték lehet pozitív és negatív előjelű, valamint nulla értékű is.

A CENTRIFUGÁLIS NYOMATÉK ÉS A SZIMMETRIA

- A centrifugális nyomaték definíciója a tengelytávolságok első hatványát tartalmazza, amelyek így hordozzák koordináta-előjelüket.
- Ha a keresztmetszet vizsgált tengelykeresztjének legalább egyik tengelye szimmetriatengely, akkor a szimmetriatengely két oldalán a pontpárok kiejtik egymást a számításból, mivel egyik koordinátájuk azonos, másik ellentett előjelű és így a szorzatuk is ellentétes előjelű lesz.
- Ebből következően kijelenthető, hogy minden olyan tengelykeresztre, ahol legalább az egyik tengely szimmetriatengely, ott a centrifugális nyomaték értéke mindig nulla.



ÖSSZETETT SÍKIDOMOK MÁSODRENDŰ NYOMATÉKAI

Az összetett síkidomokból álló keresztmetszetek másodrendű nyomatékait is a súlyponton keresztül felvett tengelykeresztre számítjuk.

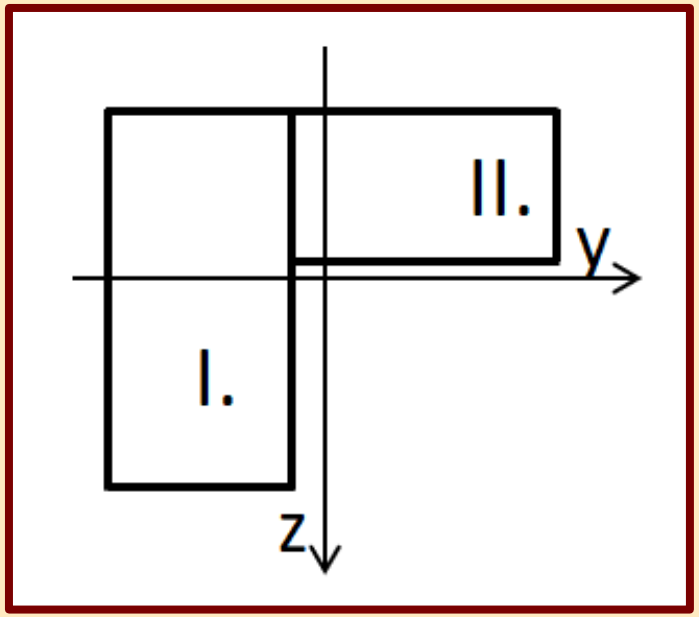
RÉSZEKRE BONTÁS ELVE

- Az összetett síkidom másodrendű nyomatékait a részekre számított értékek összegéből állítjuk elő.
- A részsíkidomok ismert jellemzőkkel rendelkező egyszerű síkidomok.

$$I_y = I_{yI.} + I_{yII.}$$

$$I_z = I_{zI.} + I_{zII.}$$

$$C_{yz} = C_{yzI.} + C_{yzII.}$$



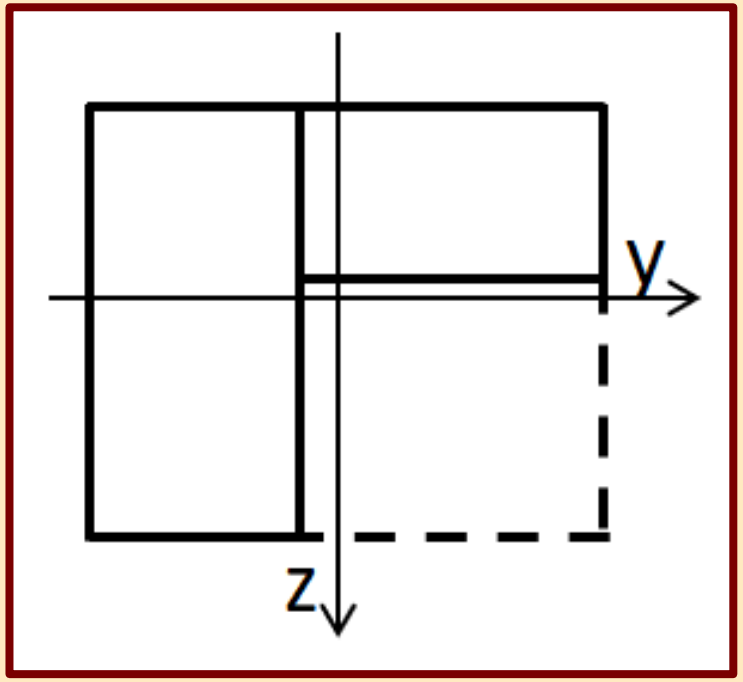
KIEGÉSZÍTÉS ELVE

- Az összetett síkidom másodrendű nyomatékait a kiegészített és a kiegészítő rész értékeinek különbségéből állítjuk elő.
- A résztvevő síkidomok ismert jellemzőkkel rendelkező egyszerű síkidomok.
- Akkor érdemes használni, ha egyszerűbb megoldásra vezet, mint a részekre bontás elve.

$$I_y = I_{y,kiegészített} - I_{y,kiegészítő}$$

$$I_z = I_{z,kiegészített} - I_{z,kiegészítő}$$

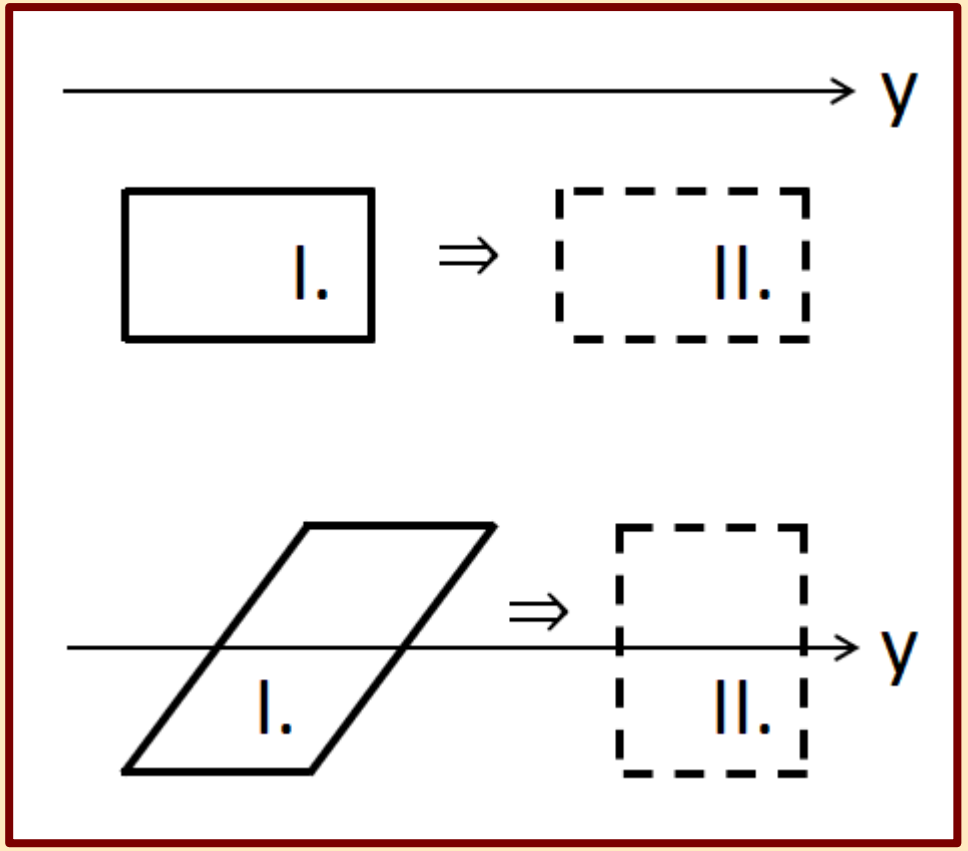
$$C_{yz} = C_{yz,kiegészített} - C_{yz,kiegészítő}$$



ELTOLHATÓSÁG ELVE

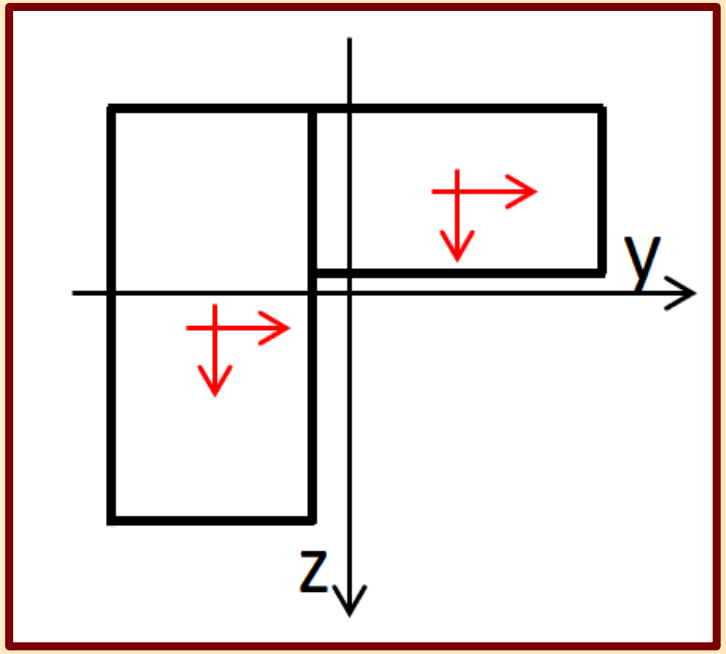
- A (rész)síkidomok a vizsgált tengellyel párhuzamosan eltolhatóak, az inercianyomatékuk értéke erre a tengelyre nem változik.
- A cél, hogy egyszerűbb geometriával rendelkező összeállítást kapjunk.
- Centrifugális nyomaték számításánál nem alkalmazható.

$$I_{yI.} = I_{yII.}$$



KOORDINÁTATENGELY ELTOLÁS: STEINER-TÉTEL

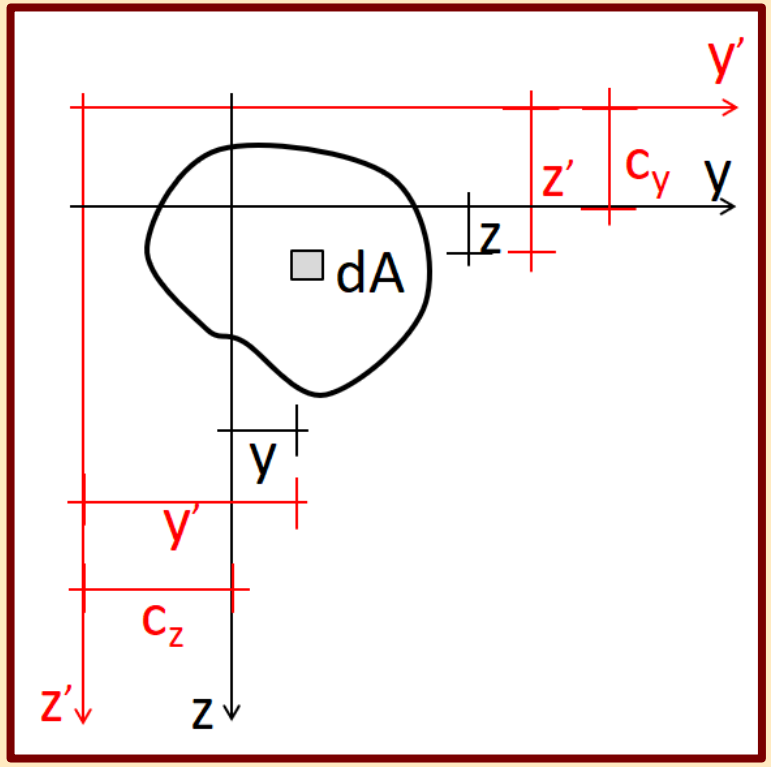
- A másodrendű nyomatékok függenek a koordinátatengelyek helyzetétől.
- A koordinátatengelyeket magukkal párhuzamosan eltolva (elfordulás nélkül) vizsgáljuk az így kapott tengelyekre vonatkozó új másodrendű nyomatéki értékeket.
- Az egymással párhuzamos tengelyek közül mindig a súlyponti tengelyen a legkisebb a tehetetlenségi nyomaték.
- Az összetett síkidomok esetén nagyon sokszor előfordul a tengelyek között az eltolási transzformáció alkalmazásának szükségesége. Leggyakrabban akkor, ha a részsíkidomok súlyponti tengelyei nem esnek egybe a teljes km. súlyponti tengelyeivel.



STEINER-TÉTEL MEGFOGALMAZÁSA

- Vizsgáljuk meg az y és y' tengely között az inercianyomatékok kapcsolatát!

$$I_y = \int z^2 dA$$
$$I_{y'} = \int z'^2 dA$$
$$I_{y'} = \int (z + c_y)^2 dA$$
$$I_{y'} = \int (z^2 + 2 \cdot z \cdot c_y + {c_y}^2) dA$$
$$I_{y'} = \int z^2 dA + \int (2 \cdot z \cdot c_y)\, dA + \int {c_y}^2 dA$$
$$I_{y'} = \int z^2 dA + 2 \cdot c_y \int z\, dA + {c_y}^2 \int dA$$
$$I_{y'} = I_y + 2 \cdot c_y \cdot S_y + {c_y}^2 \cdot A$$



- Ha az y tengely a km. súlyponti tengelye, a középső tag kiesik, mert a statikai nyomaték a súlyponti tengelyre nulla:

$$I_{y'} = I_y + {c_y}^2 \cdot A$$

- A z tengelyre és a centrifugális nyomatékra vonatkozó megoldás:

$$I_{z'} = I_z + {c_z}^2 \cdot A \quad ; \qquad C_{y'z'} = C_{yz} + c_y \cdot c_y \cdot A$$

STEINER-TÉTEL ALKALMAZÁSA

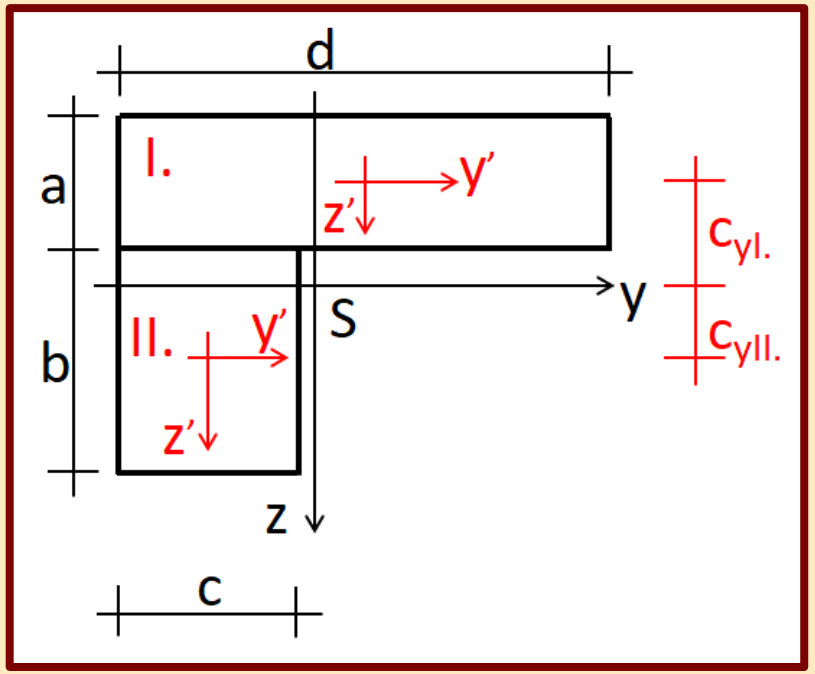
- A Steiner-tétel alkalmazási feltétele, hogy a két vizsgált tengely egyikének súlypontinak kell lennie.
- A másodrendű nyomatékok mindig a súlyponti tengelyen a legkisebbek.
- A számítás során a súlyponti tengelyről egy másik idegen tengely irányába haladva, a Steiner-tagot hozzáadjuk az első taghoz. (A legkisebbtől a nagyobb érték felé haladunk, tehát a Steiner-taggal növeljük az értékét.)
- A számítás során egy idegen tengelyről a súlyponti tengely irányába haladva, a Steiner-tagot kivonjuk az első tagból. (A nagyobbtól a legkisebb érték felé haladunk, tehát a Steiner-taggal csökkentjük az értékét.)
- Az inercianyomatékoknál a Steiner-tagban szereplő koordináta-távolság a négyzeten van, eltűnik az előjele, tehát független a transzformáció irányától. A centrifugális nyomatéknál ez nem teljesül, ott nem emeljük négyzetre a távolságokat, hordozzák az előjelüket.

STEINER-TÉTEL HASZNÁLATA

- A részsíkidomok saját **súlyponti** tengelyéről haladunk egy számukra **idegen** tengely (a teljes km. súlyponti tengelye) felé, ezért hozzáadjuk a Steiner-tagokat:

$$I_y = I_{y'I.} + c_{yI.}{}^2 \cdot A_{I.} + I_{y'II.} + c_{yII.}{}^2 \cdot A_{II.}$$

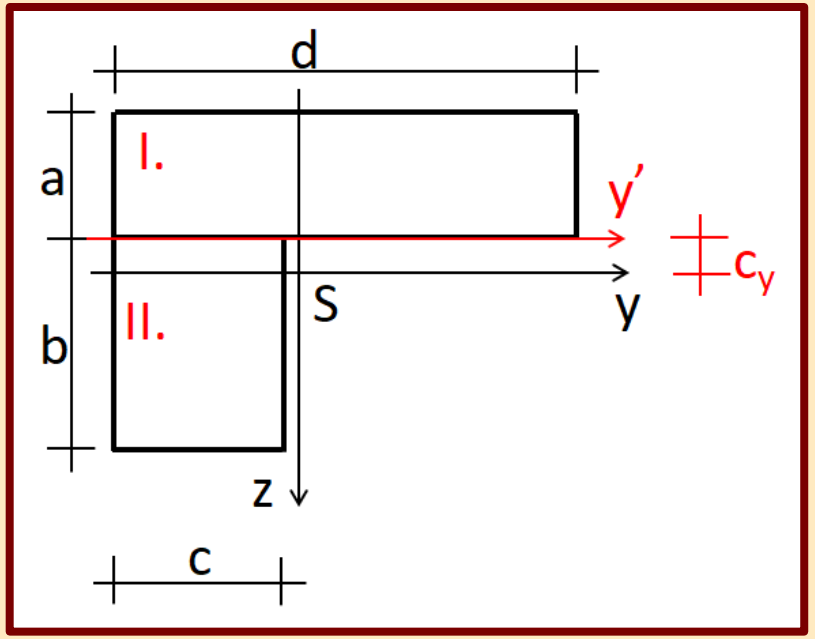
$$I_y = \frac{d \cdot a^3}{12} + c_{yI.}{}^2 \cdot d \cdot a + \frac{c \cdot b^3}{12} + c_{yII.}{}^2 \cdot b \cdot c$$



- A részsíkidomok oldalán áthaladó **idegen** tengelyről haladunk a teljes km. **súlyponti** tengelye felé, ezért kivonjuk a Steiner-tagot:

$$I_y = I_{y'I.} + I_{y'II.} - c_y{}^2 \cdot A$$

$$I_y = \frac{d \cdot a^3}{3} + \frac{c \cdot b^3}{3} - c_y{}^2 \cdot (d \cdot a + b \cdot c)$$



Tartószerkezetek mechanikája II.

4.

Keresztmetszeti jellemzők: főtehetetlenségi nyomatékok

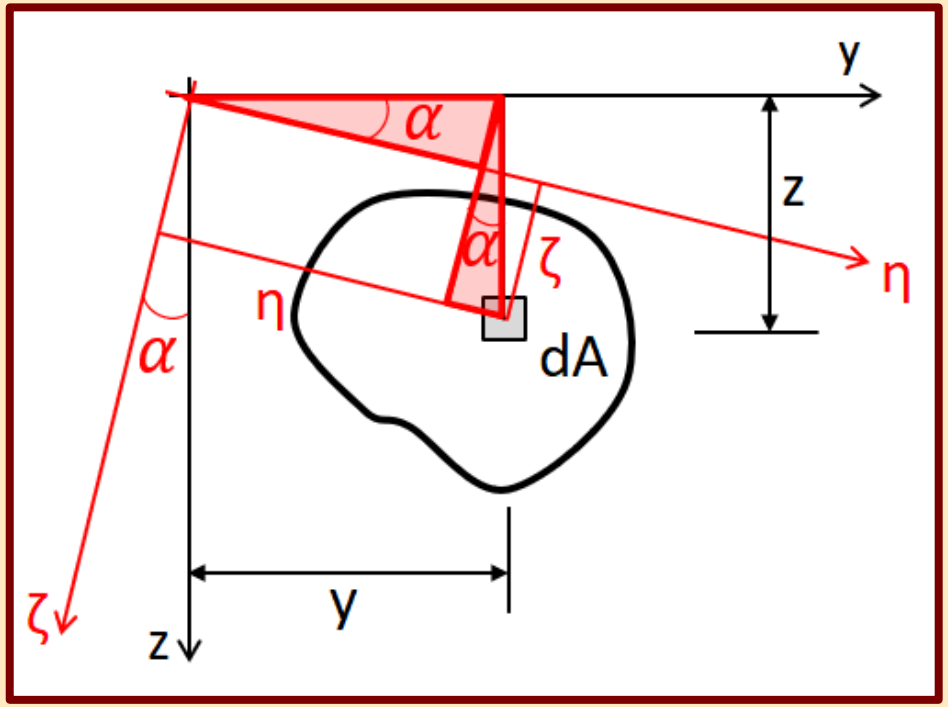
Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

KOORDINÁTATENGELY ELFORGATÁS

- A koordinátatengelyeket elforgatva (eltolás nélkül) vizsgáljuk az így kapott tengelyekre vonatkozó új másodrendű nyomatéki értékeket.
- A koordináta távolságok összefüggései a bejelölt háromszögek segítségével.

$$\eta = y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha$$

$$\zeta = -y \cdot \sin\alpha + z \cdot \cos\alpha$$



KOORDINÁTATENGELY ELFORGATÁS HATÁSA

- Az új helyzetű tengelyek inercianyomatékai és centrifugális nyomatéka

$$I_\eta = \int \zeta^2 dA$$
$$I_\eta = \int (-y \cdot \sin\alpha + z \cdot \cos\alpha)^2 dA$$
$$I_\eta = \int (y^2 \cdot sin^2\,\alpha - 2 \cdot y \cdot z \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + z^2 \cdot cos^2\alpha)\, dA$$
$$I_\eta = sin^2\,\alpha \cdot \int y^2 dA - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \int y \cdot z\, dA + cos^2\,\alpha \cdot \int z^2 dA$$
$$I_\eta = I_z \cdot sin^2\,\alpha - 2 \cdot C_{yz} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + I_y \cdot cos^2\,\alpha$$

$$I_\zeta = \int \eta^2 dA$$
$$I_\zeta = \int (y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha)^2 dA$$
$$I_\zeta = \int (y^2 \cdot cos^2\,\alpha + 2 \cdot y \cdot z \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + z^2 \cdot sin^2\alpha)\, dA$$
$$I_\zeta = cos^2\,\alpha \cdot \int y^2 dA + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \int y \cdot z\, dA + sin^2\,\alpha \cdot \int z^2 dA$$
$$I_\zeta = I_z \cdot cos^2\,\alpha + 2 \cdot C_{yz} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + I_y \cdot sin^2\,\alpha$$

$$C_{\eta\zeta} = \int \eta \cdot \zeta dA$$
$$C_{\eta\zeta} = \int (y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha) \cdot (-y \cdot \sin\alpha + z \cdot \cos\alpha) dA$$
$$C_{\eta\zeta} = \int (-y^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + y \cdot z \cdot (cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha) + z^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha) dA$$
$$C_{\eta\zeta} = -\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \int y^2 dA + (cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha) \cdot \int y \cdot z\, dA + \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \int z^2 dA$$
$$C_{\eta\zeta} = \left(I_y - I_z\right) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + C_{yz} \cdot (cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha)$$

KOORDINÁTATENGELY ELFORGATÁS HATÁSA

- A megoldáshoz szükséges nevezetes azonosságok

$$cos^2\alpha = \frac{1}{2}\cdot(1+\cos 2\alpha)\ ; \qquad sin^2\alpha = \frac{1}{2}\cdot(1-cos\,2\alpha)$$

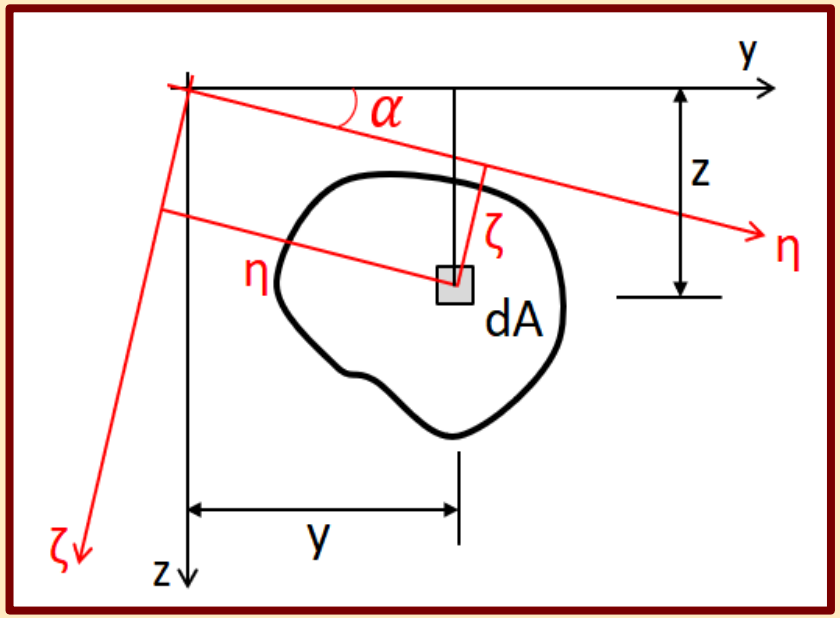
$$cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha\ ; \qquad sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\cdot cos\,\alpha$$

- Behelyettesítve a másodrendű nyomatékok összefüggéseibe

$$I_\eta = I_z\cdot sin^2\,\alpha - 2\cdot C_{yz}\cdot sin\,\alpha\cdot cos\,\alpha + I_y\cdot cos^2\,\alpha$$

$$I_\eta = \frac{I_z}{2} - \frac{I_z}{2}\cdot cos\,2\alpha - C_{yz}\cdot sin\,2\alpha + \frac{I_y}{2} + \frac{I_y}{2}\cdot cos\,2\alpha$$

$$\boldsymbol{I_\eta = \frac{I_y+I_z}{2} + \frac{I_y-I_z}{2}\cdot cos\,2\alpha - C_{yz}\cdot sin\,2\alpha}$$



$$I_\zeta = I_z\cdot cos^2\,\alpha + 2\cdot C_{yz}\cdot sin\,\alpha\cdot cos\,\alpha + I_y\cdot sin^2\,\alpha$$

$$I_\zeta = \frac{I_z}{2} + \frac{I_z}{2}\cdot cos\,2\alpha + C_{yz}\cdot sin\,2\alpha + \frac{I_y}{2} - \frac{I_y}{2}\cdot cos\,2\alpha$$

$$\boldsymbol{I_\zeta = \frac{I_y+I_z}{2} - \frac{I_y-I_z}{2}\cdot cos\,2\alpha + C_{yz}\cdot sin\,2\alpha}$$

$$C_{\eta\zeta} = \left(I_y - I_z\right)\cdot sin\,\alpha\cdot cos\,\alpha + C_{yz}\cdot(cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha)$$

$$\boldsymbol{C_{\eta\zeta} = \frac{(I_y-I_z)}{2}\cdot sin\,2\alpha + C_{yz}\cdot cos\,2\alpha}$$

FŐINERCIANYOMATÉKOK

- A súlyponton felvett koordinátatengelyeket elforgatva a másodrendű nyomatékok az elforgatási szög függvényében változnak.
- Keressük valamennyi értékek közül az inercianyomatékok szélső értékeit, vagyis a minimumot és maximumot.
- Ezeket a szélső értékeket főinercianyomatékoknak nevezzük. A tengelyeket, amelyeken a főinercianyomatékok működnek, főtengelyeknek, az általuk meghatározott irányokat, főirányoknak hívjuk.
- A függvény első deriváltja null értékénél vannak a lehetséges szélső értékek.

$$\frac{dI_{\eta\,(\alpha)}}{d\alpha} = \frac{d\left(\frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot cos\,2\alpha - C_{yz} \cdot sin\,2\alpha\right)}{d\alpha} = 0$$

$$-\frac{I_y - I_z}{2} \cdot 2 \cdot sin\,2\alpha - C_{yz} \cdot 2 \cdot cos\,2\alpha = 0 \quad (-2 - \text{vel osztva a } C_{\eta\zeta} - \text{t kapjuk meg.})$$

$$C_{\eta\zeta} = 0$$

- Tehát amelyik tengelykeresztre a centrifugális nyomaték nulla, ott az inercianyomatékoknak szélső értéke van.

FŐINERCIANYOMATÉKOK MEGHATÁROZÁSA

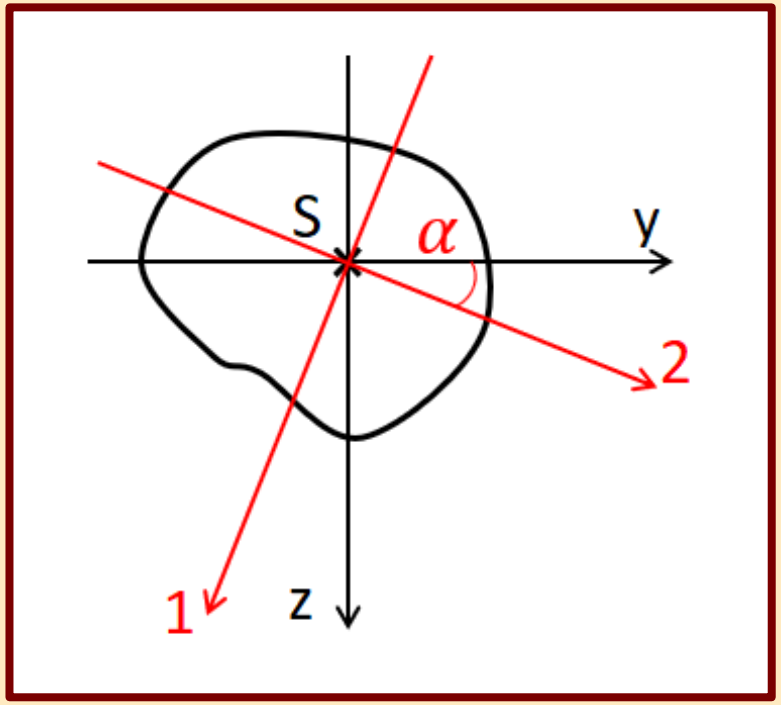
- A főtengelyek bezárt szöge a kiindulási koordinátarendszer tengelyeivel az előző összefüggés alapján.

$$\tan 2\alpha = \frac{-2 \cdot C_{yz}}{I_y - I_z}$$

- A főinercianyomatékok értékei a levezetés mellőzésével.

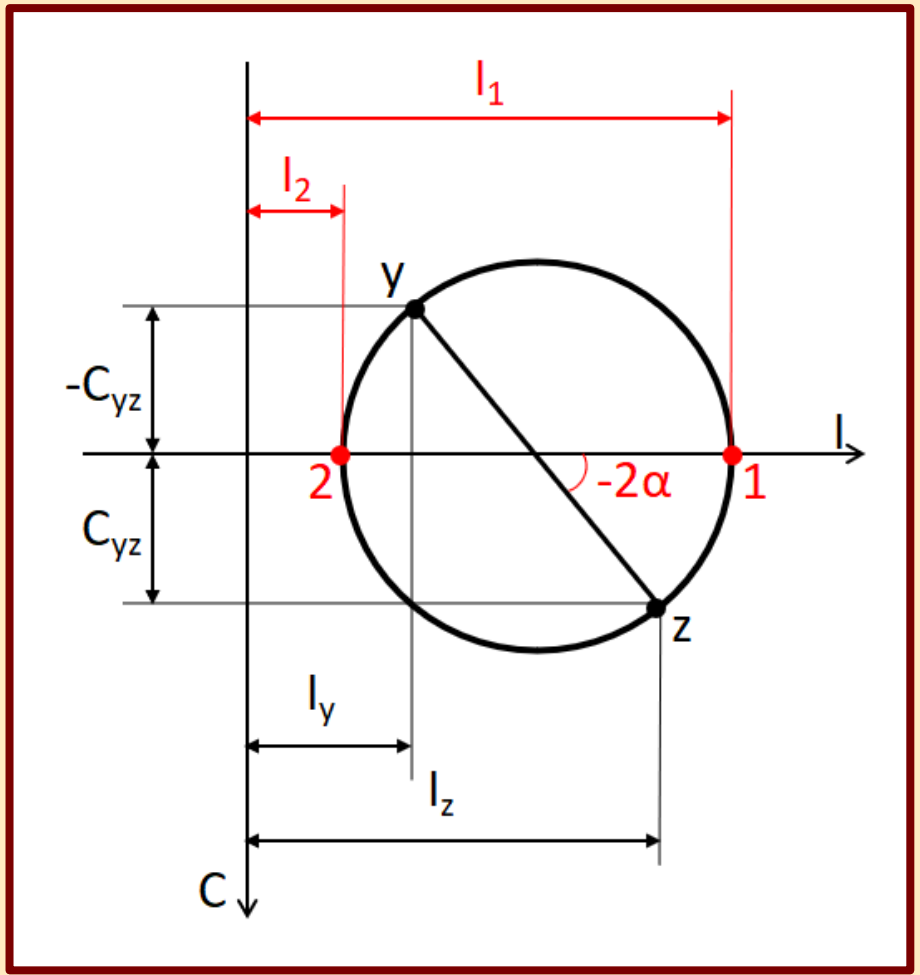
$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + {C_{yz}}^2} \quad (maximum)$$

$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + {C_{yz}}^2} \quad (minimum)$$



TEHETETLENSÉGI MOHR-KÖR

- Egy I-C koordinátarendszerben ábrázolva a súlyponton át felvehető tengelykeresztek inercia és centrifugális nyomatéki értékeit, azok egy kör kerületére rendeződnek. Ezt a kört tehetetlenségi Mohr-körnek hívjuk.
- Első lépésként a kiindulási tengelykeresztre (y-z) számított másodrendű nyomatékokat mérjük fel. A felrajzolt két pontot (y és z) összekötve kapjuk meg a kör átmérőjét, amely segítségével a kör megrajzolható.
- A kör minden egyes átmérőjének végpontjai egy súlyponti tengelykereszt másodrendű nyomatékait adják meg koordinátáikkal.
- A kör átmérői között mért (középponti) szög a km.-ben feleakkoraként működik.



FŐINERCIANYOMATÉKOK MEGHATÁROZÁSA MOHR-KÖRREL

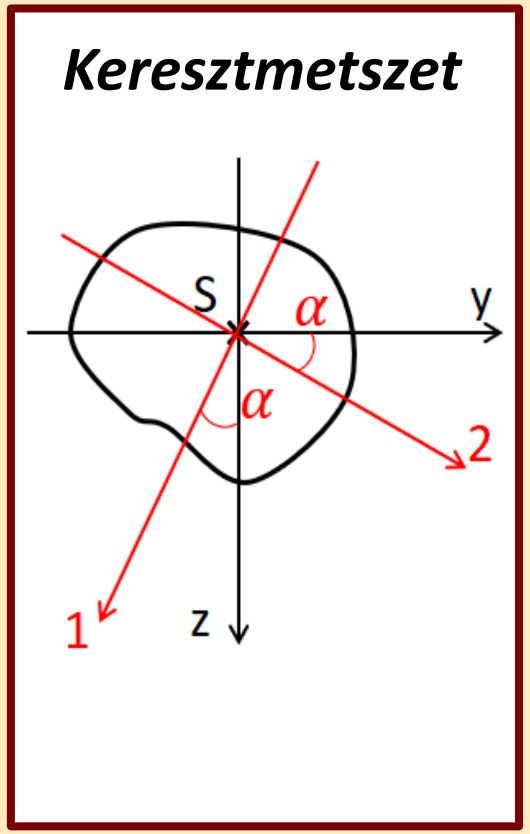
- A kör és a vízszintes tengely metszéspontja szolgáltatja a főtengelyek másodrendű nyomatékait. A kör kerületi pontjai közül ezeknek a legkisebb és legnagyobb a vízszintes koordinátája, amelyek az inercianyomatékok szélső értékei. A centrifugális nyomaték csak ezekben a pontokban nulla.
- A főinercianyomatékok a kör alapján

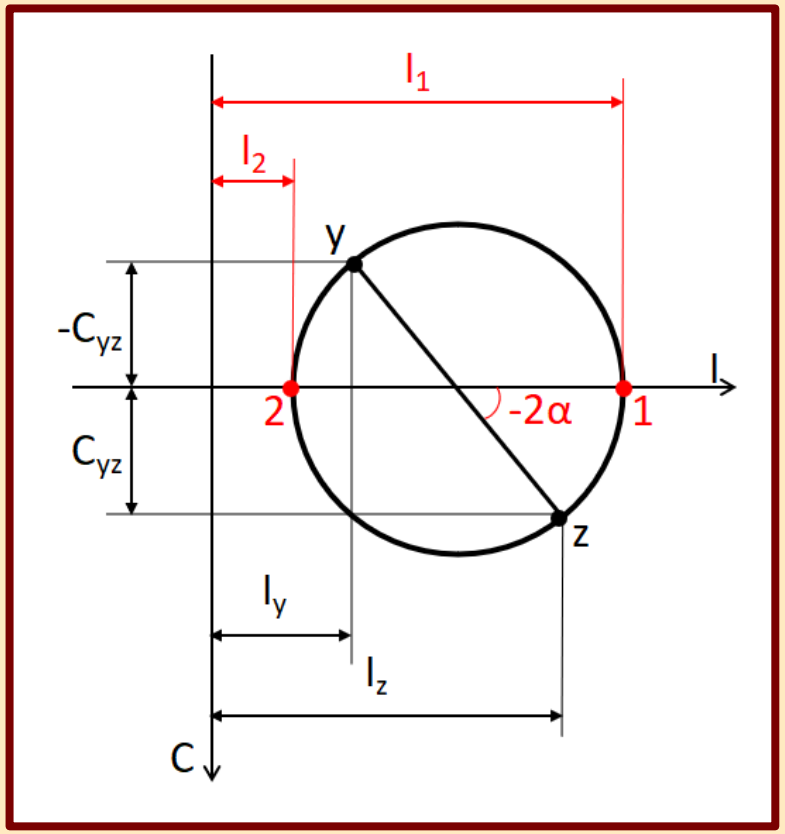
$$I_1 = \underbrace{\frac{I_y + I_z}{2}}_{kör\ középpontja} + \underbrace{\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + {C_{yz}}^2}}_{kör\ sugara}$$

$$I_2 = \overbrace{\frac{I_y + I_z}{2}} - \overbrace{\sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + {C_{yz}}^2}}$$

- Az elfordulási szög a kör alapján

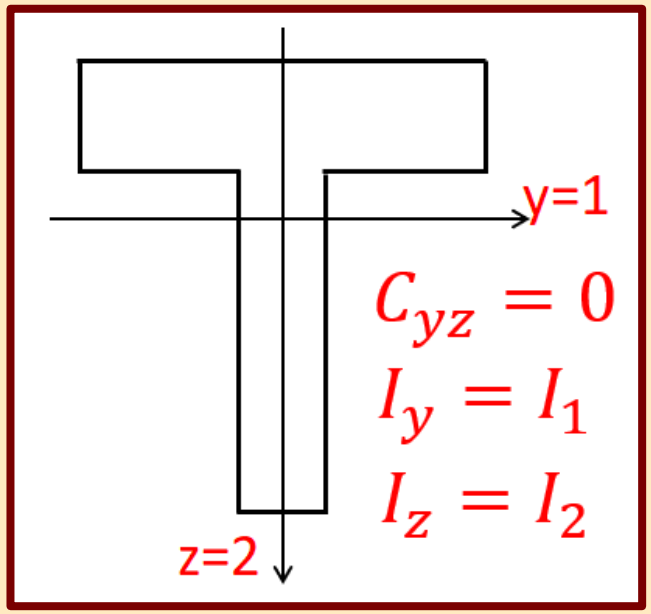
$$\tan 2\alpha = \frac{-2 \cdot C_{yz}}{I_y - I_z}$$



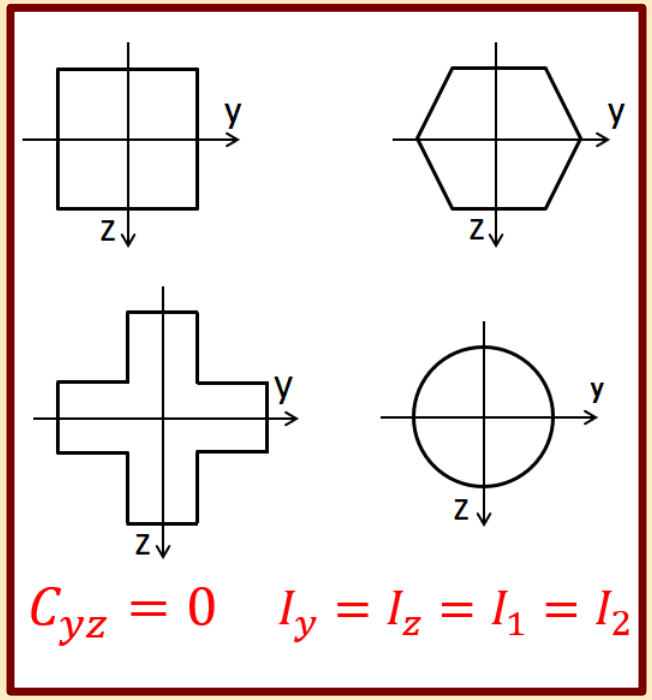


A FŐINERCIANYOMATÉKOK ÉS A SZIMMETRIA

- A szimmetriatengelyből és a rá merőleges súlyponti tengelyből álló tengelykeresztre a centrifugális nyomaték mindig nulla. Ezért ezek a tengelyek mindig főinerciatengelyek. Egyik tengely az „erős” tengely (1), a másik a „gyenge” (2).
  Hajlított gerendák km.-eként hatékony.



- Ha két szimmetriatengelyre meghatározott főinercianyomatékok egyenlőek is, akkor minden súlyponti tengelyen ugyanekkora értékek működnek, vagyis mindegyik súlyponti tengely főtengely lesz. Tehát minden irányban azonos az elfordítással, hajlítással szembeni ellenállás. A szabályos síkidomok ebbe a kategóriába tartoznak.
  Kihajlásnak kitett nyomott elemek km.-eként hatékony.

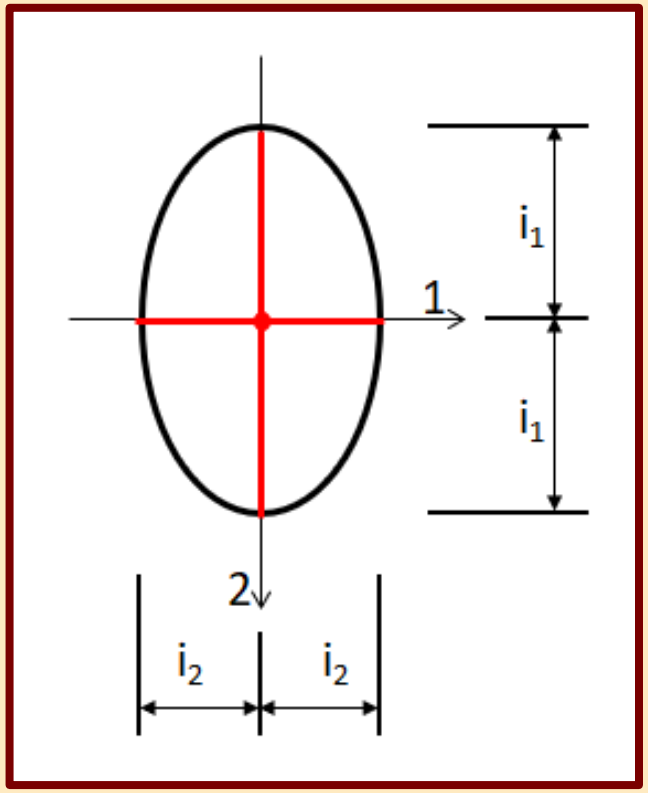


INERCIASUGÁR

- Az adott irányban működő inercianyomaték és a keresztmetszeti terület viszonyát fejezi ki.
- A koordinátatranszformációkkal (eltolás; elforgatás) az inercianyomatékok és ezzel együtt a segítségükkel számolt inerciasugár értékek is változnak. A főinercianyomatékokhoz tartozó értékeket főinerciasugaraknak hívjuk.

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \; ; i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \; ; i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} \; ; i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

- A km. súlypontjától ellentétes tengelyirányban felmérve a főinerciasugarakat, megkapjuk a (centrális) tehetetlenségi ellipszist.



Tartószerkezetek mechanikája II.

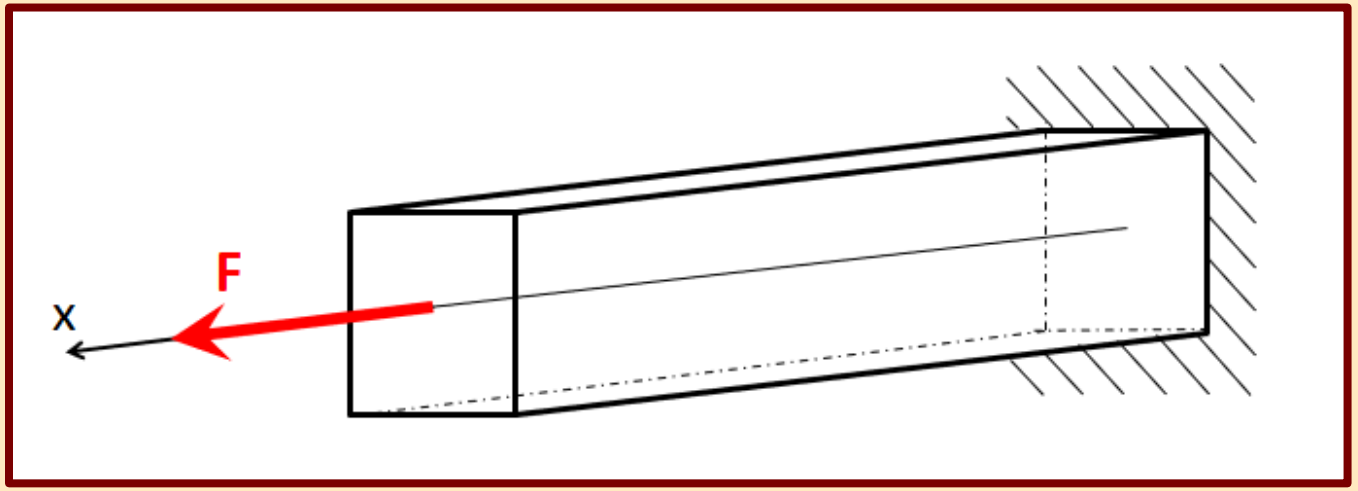
5.

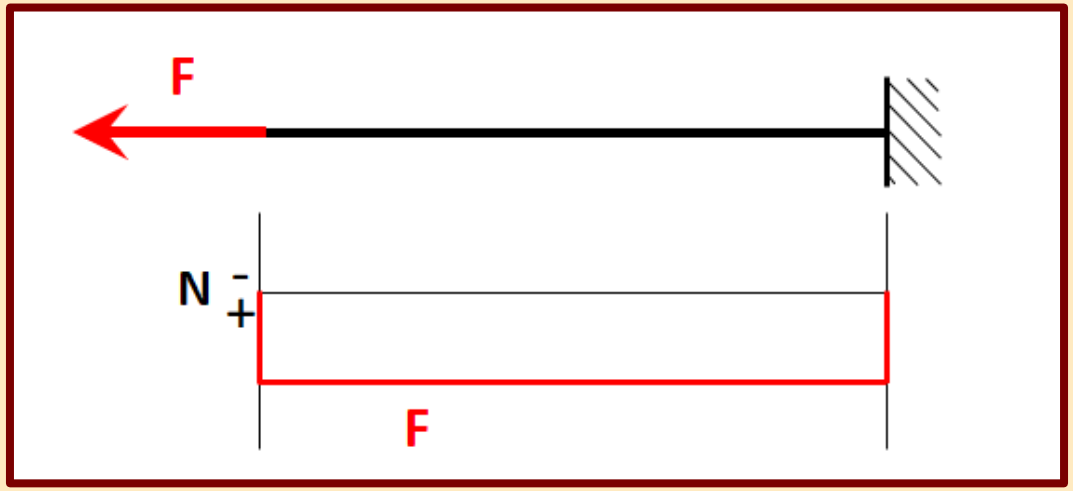
Feszültségszámítás:
tiszta húzás (-nyomás)

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

TISZTA HÚZÁS ÉRTELMEZÉSE

- Ha a keresztmetszetekben csak a rúd tengelyirányába eső (km. síkjára merőleges), centrikus (km. súlypontján áthaladó), azaz központos erő működik, tiszta húzásról beszélünk.
- Leginkább húzással foglalkozunk, nyomást csak a zömök rudak esetében vizsgáljuk. A nyomott rudak kihajlását (stabilitásvizsgálat) később elemezzük.





PÉLDÁK TISZTA HÚZÁSRA (-NYOMÁSRA)

FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA

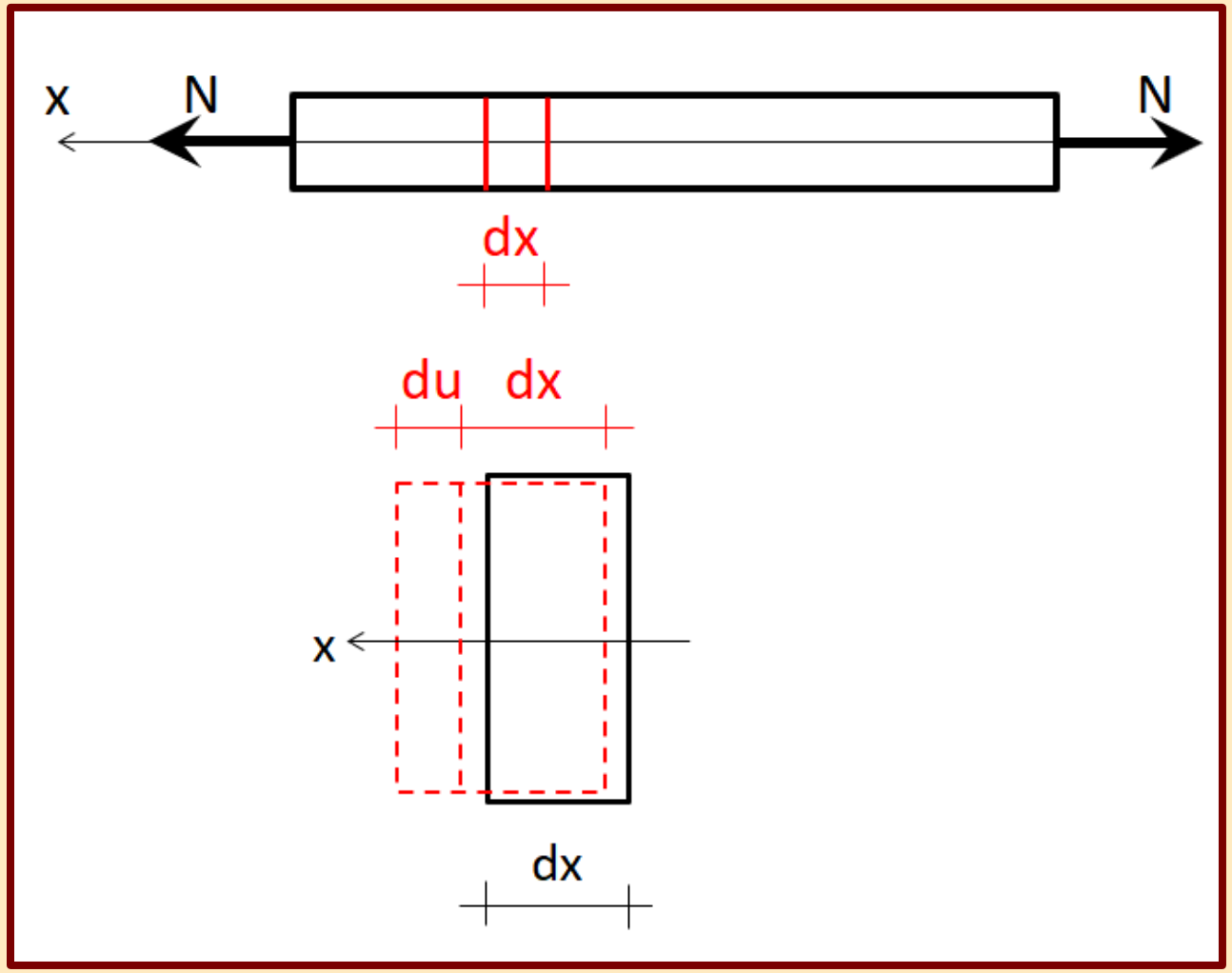
GEOMETRIAI EGYENLET

- elmozdulás ↔ alakváltozás
- A km.-ek önmagukkal párhuzamosan tolódnak el, a fajlagos megnyúlás konstans a km. felülete mentén.

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_{x\,(y,z)} = \acute{a}llandó$$

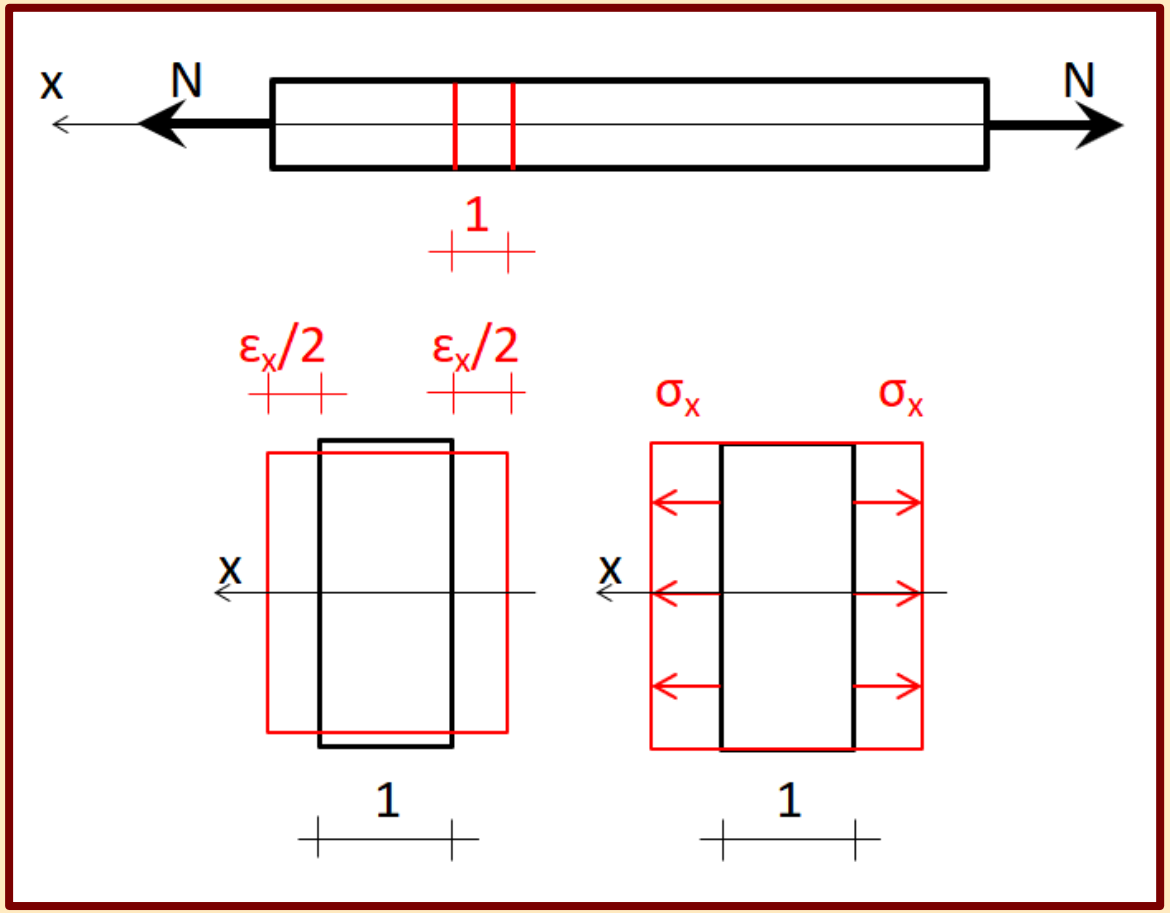
- Szögtorzulás nem keletkezik.

$$\gamma_{xz\,(y,z)} = 0$$



ANYAGEGYENLET

- alakváltozás ↔ feszültség
- Hooke-törvény: lineárisan rugalmas viselkedés
- Az anyagegyenlet alapján a km.-ben egyenletesen kialakuló fajlagos megnyúlás vele arányos, vagyis ugyancsak egyenletes feszültségeloszlást eredményez.



$$\sigma_{x\,(y,z)} = E \cdot \varepsilon_{x\,(y,z)}$$

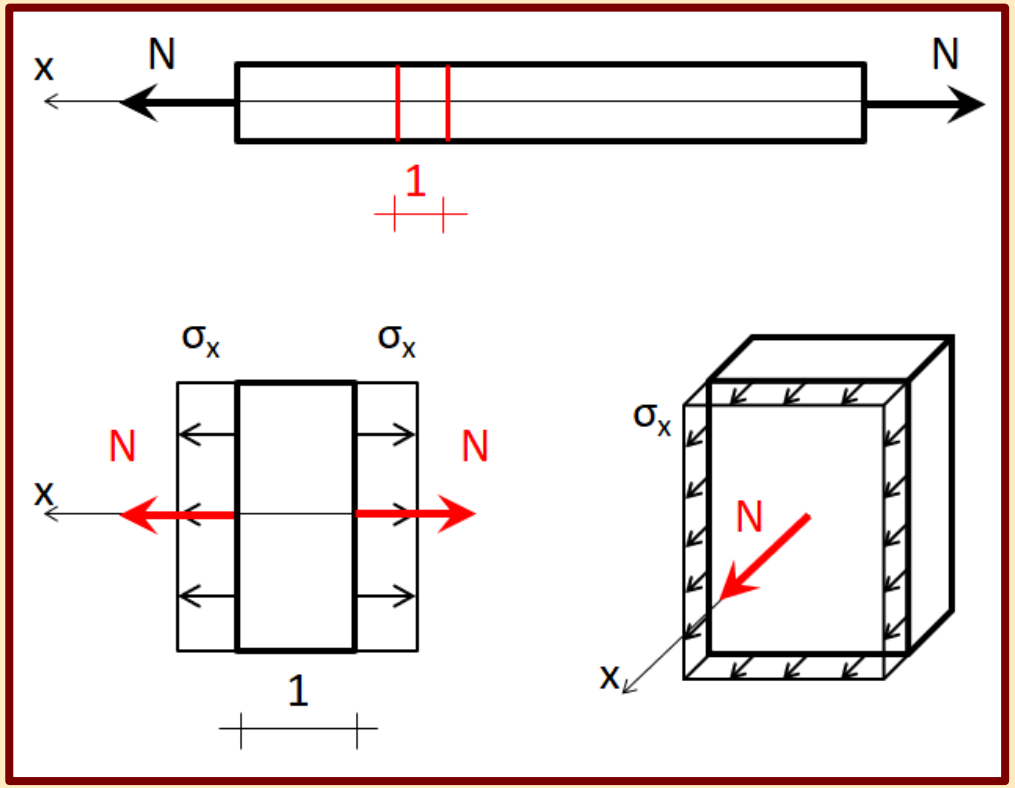
- Nyírófeszültség nem keletkezik a km.-ben.

$$\tau_{xz\,(y,z)} = G \cdot \gamma_{xz\,(y,z)}$$

$$\gamma_{xz\,(y,z)} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{xz\,(y,z)} = 0$$

EGYENSÚLYI EGYENLET

- feszültség ↔ igénybevétel
- A vizsgált rúddarab egyensúlyát a normáligénybevétel és a feszültségi ábra eredője biztosítja. (A normáligénybevétel a feszültségi ábra eredőjeként is értelmezhető.)
- Az egyensúlyi (vízszintes vetületi) egyenlet



$$\int_{(A)} \sigma_{x\,(y,z)} dA = N$$

$$\sigma_x \int_{(A)} dA = N \quad (\sigma_x \; konstansként \; kiemelhető)$$

$$\sigma_x \cdot A = N$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

ALAKVÁLTOZÁSOK MEGHATÁROZÁSA

RÚD HOSSZIRÁNYÚ MEGNYÚLÁSA

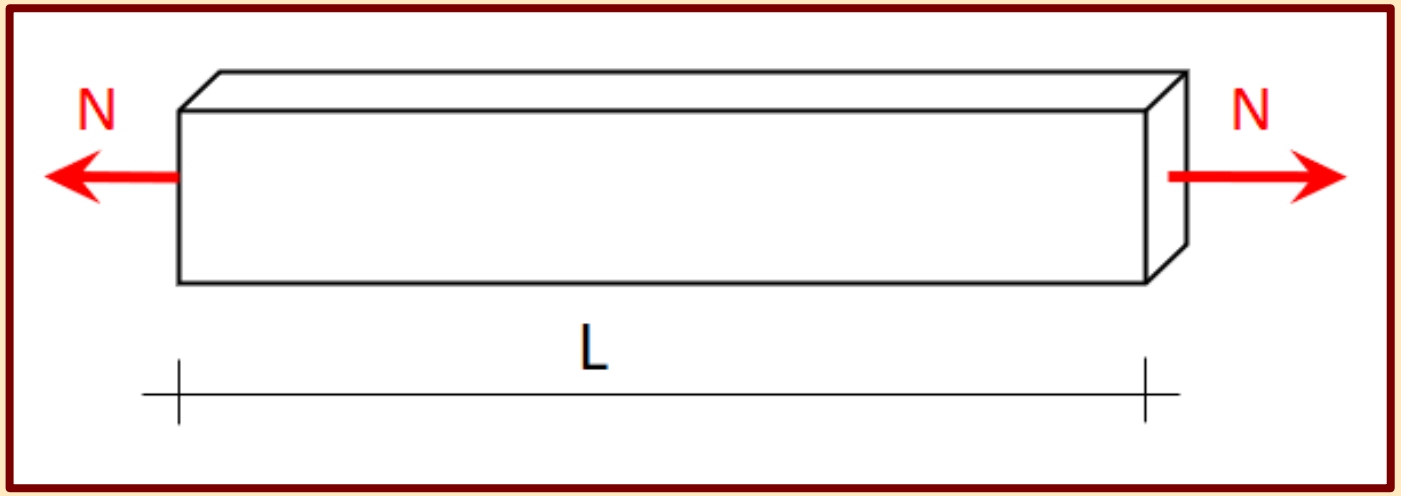
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$$

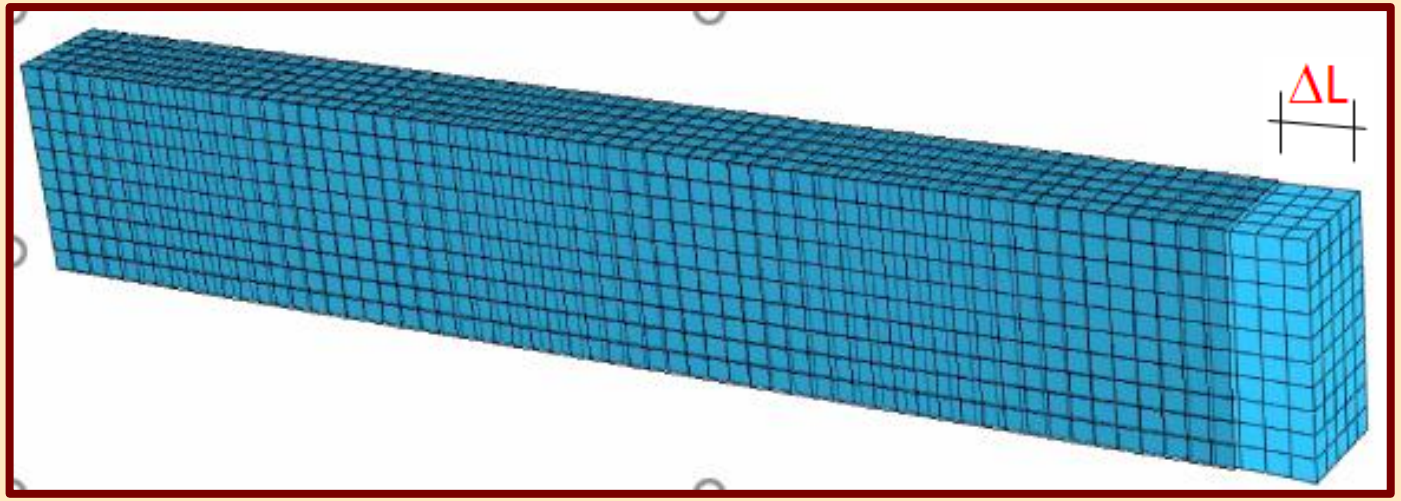
$$\Delta L = \varepsilon_x \cdot L$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{N}{E \cdot A}$$

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}$$

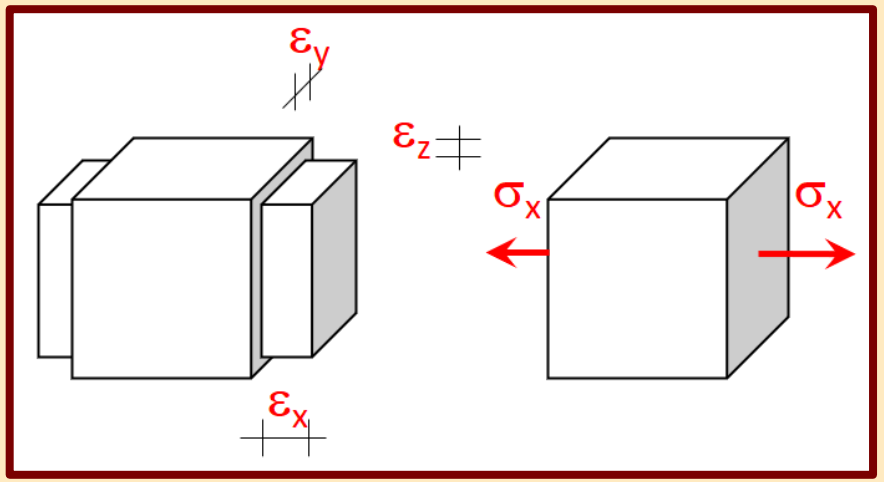




RÚD KERESZTIRÁNYÚ MEGNYÚLÁSA

- Az erő hatásvonalába eső, hosszirányú megnyúlás ellentétes keresztirányú megnyúlásokat eredményez, ezt harántkontrakciónak nevezzük.

$$\varepsilon_k = -\nu \cdot \varepsilon_x \quad \rightarrow \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x$$



- A ν-t Poisson-tényezőnek hívjuk, értéke 0,1-0,5 alakul.

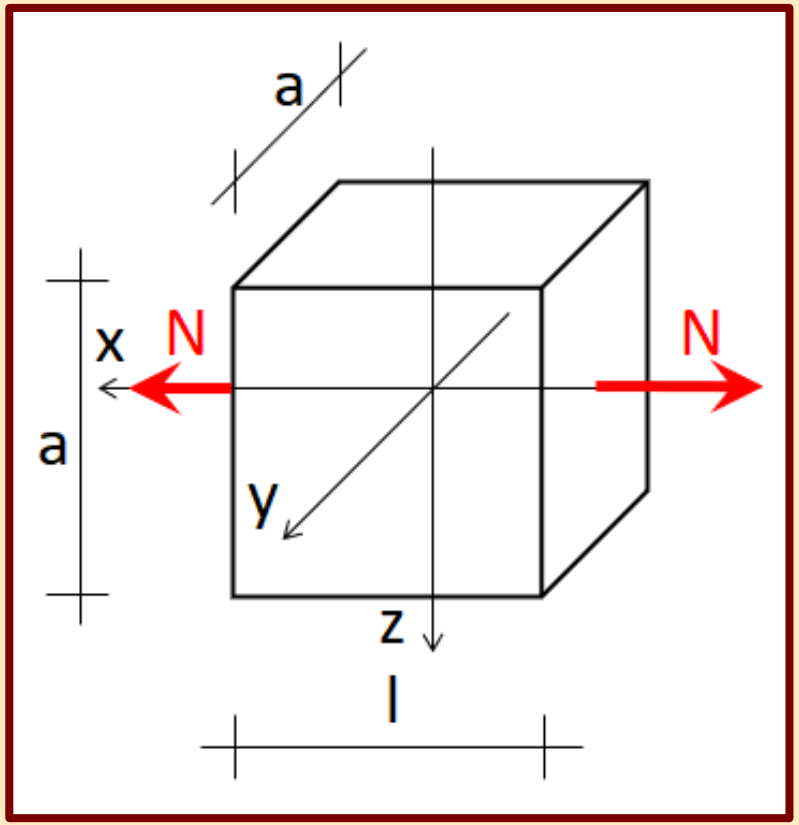
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$$

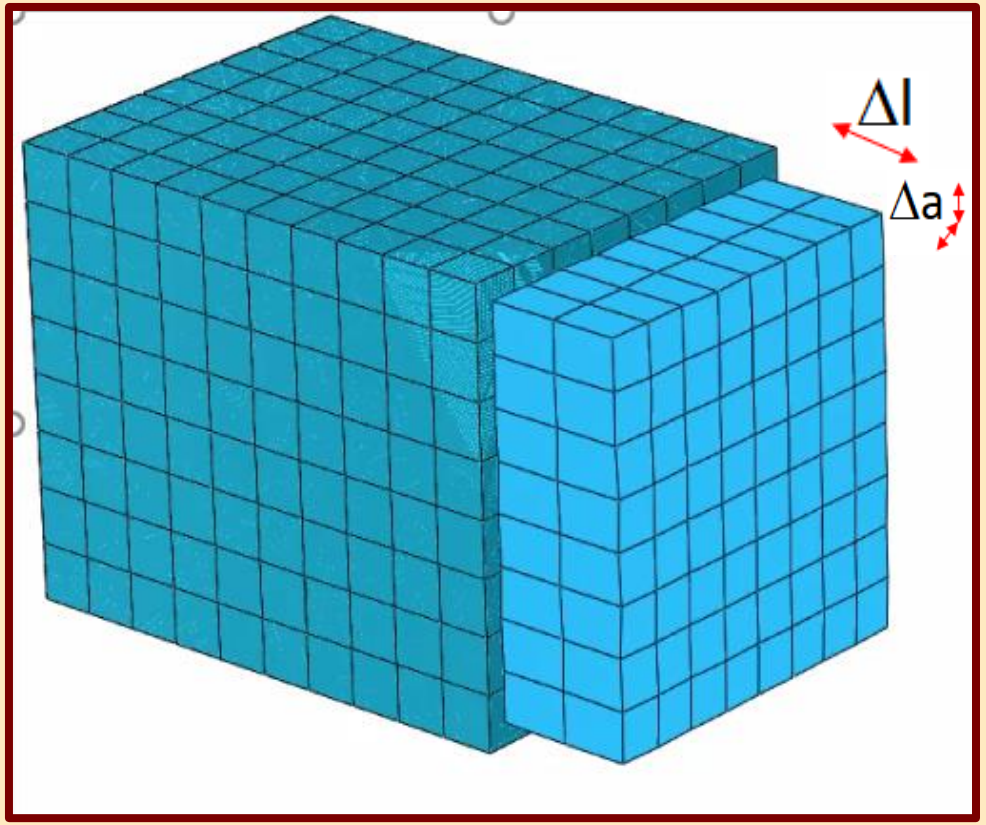
$$\Delta l = \varepsilon_x \cdot l$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\Delta a}{a}$$

$$\Delta a = \varepsilon_y \cdot a$$

$$\Delta a = \varepsilon_z \cdot a$$





RÚDELEM FESZÜLTSÉGEI ÉS ALAKVÁLTOZÁSAI

- Befogott rúd két különböző keresztmetszetű elemből

$$L_1 > L_2 \quad ; \quad A_1 > A_2$$

- A feszültségek alakulása

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_2}$$

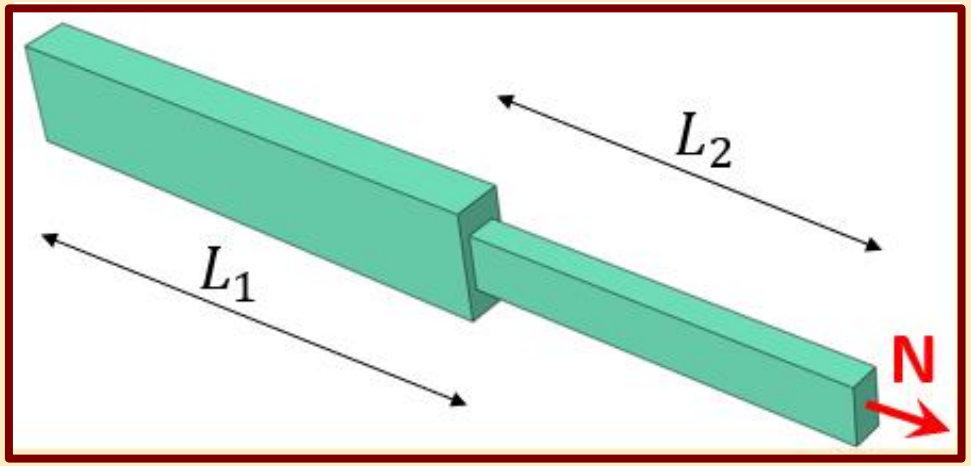
$$\sigma_1 < \sigma_2$$

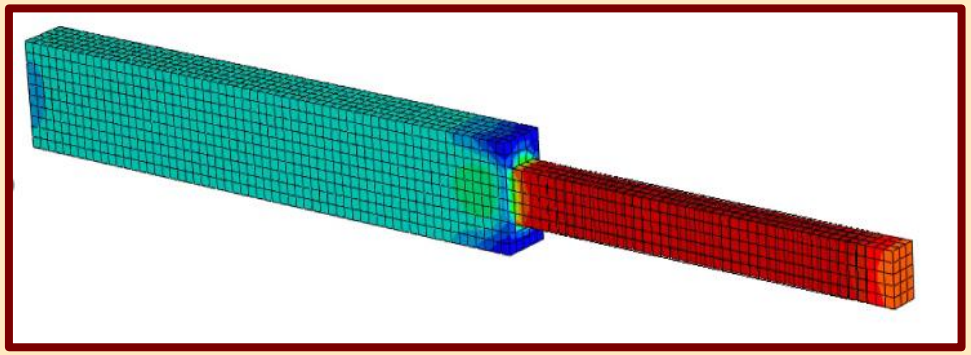
- A megnyúlások alakulása

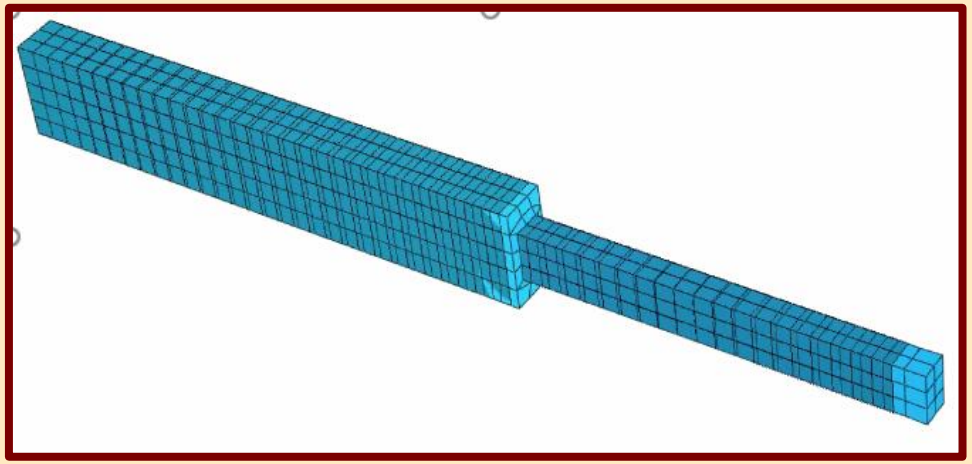
$$\Delta L_1 = \frac{N \cdot L_1}{E \cdot A_1}$$

$$\Delta L_2 = \frac{N \cdot L_2}{E \cdot A_2}$$

$$\Delta L_1 < \Delta L_2$$







Tartószerkezetek mechanikája II.

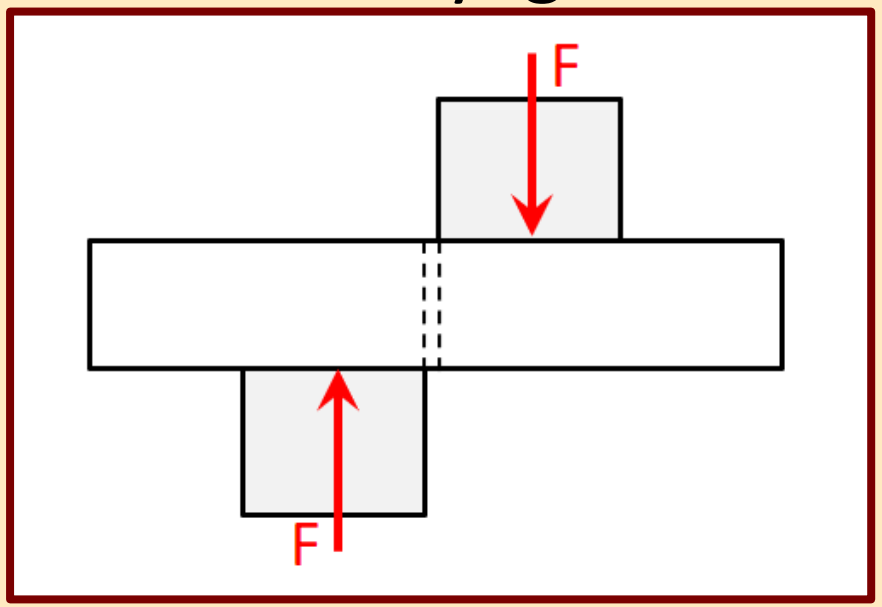
6.

Feszültségszámítás:
tiszta nyírás - szegecskapcsolatok, fakötések

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

TISZTA NYÍRÁS ÉRTELMEZÉSE

- Ha a keresztmetszetekben csak a test hossztengelyére merőleges (km. síkjába eső), a km. súlypontján áthaladó erő működik, tiszta nyírásról beszélünk.
- A valóságban nem lehet ilyen eset, mert a nyíróigénybevétel a hajlítónyomatékkal együtt lép fel. (differenciálisan összefüggenek)
- Kötőelemeknél, kapcsolatoknál feltételezhetjük mégis a tiszta nyírást, mert a nyomaték elhanyagolható.



PÉLDÁK TISZTA NYÍRÁSRA

FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA

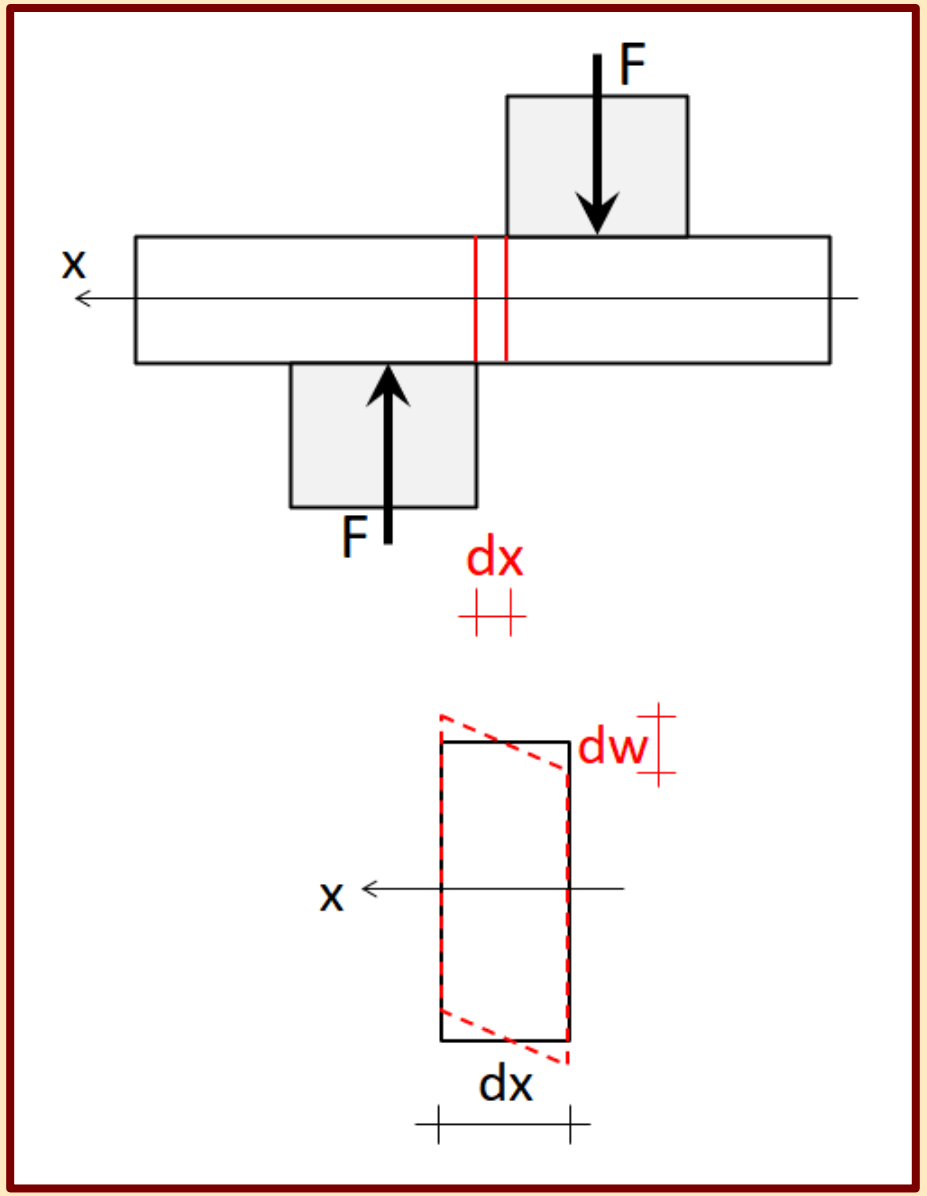
GEOMETRIAI EGYENLET

- elmozdulás ↔ alakváltozás
- A km.-ek a hossztengelyre merőlegesen tolódnak el, a kezdeti derékszög megváltozik, ez a szögtorzulás konstans a km. felülete mentén.

$$\frac{dw}{dx} = \gamma_{xz\,(y,z)} = \acute{a}llandó$$

- Fajlagos megnyúlás nem keletkezik.

$$\varepsilon_{x\,(y,z)} = 0$$



ANYAGEGYENLET

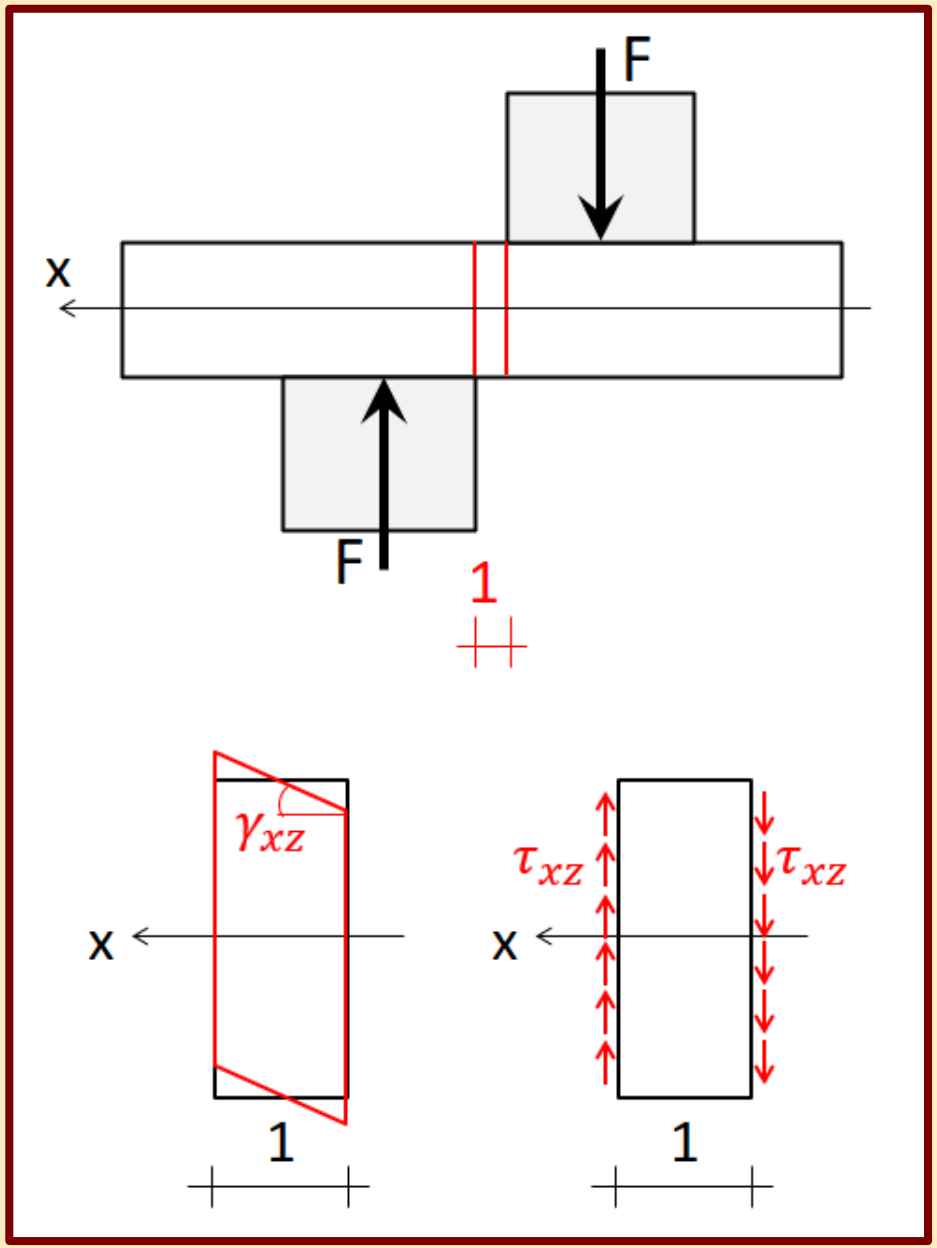
- alakváltozás ↔ feszültség
- Hooke-törvény: lineárisan rugalmas viselkedés
- Az anyagegyenlet alapján a km.-ben egyenletesen kialakuló szögtorzulás vele arányos, vagyis ugyancsak egyenletes nyírófeszültség eloszlást eredményez.

$$\tau_{xz\,(y,z)} = G \cdot \gamma_{xz\,(y,z)}$$

- Normálfeszültség nem keletkezik a km.-ben.

$$\sigma_{x\,(y,z)} = E \cdot \varepsilon_{x\,(y,z)}$$

$$\varepsilon_{x\,(y,z)} = 0 \;\rightarrow\; \sigma_{x\,(y,z)} = 0$$



EGYENSÚLYI EGYENLET

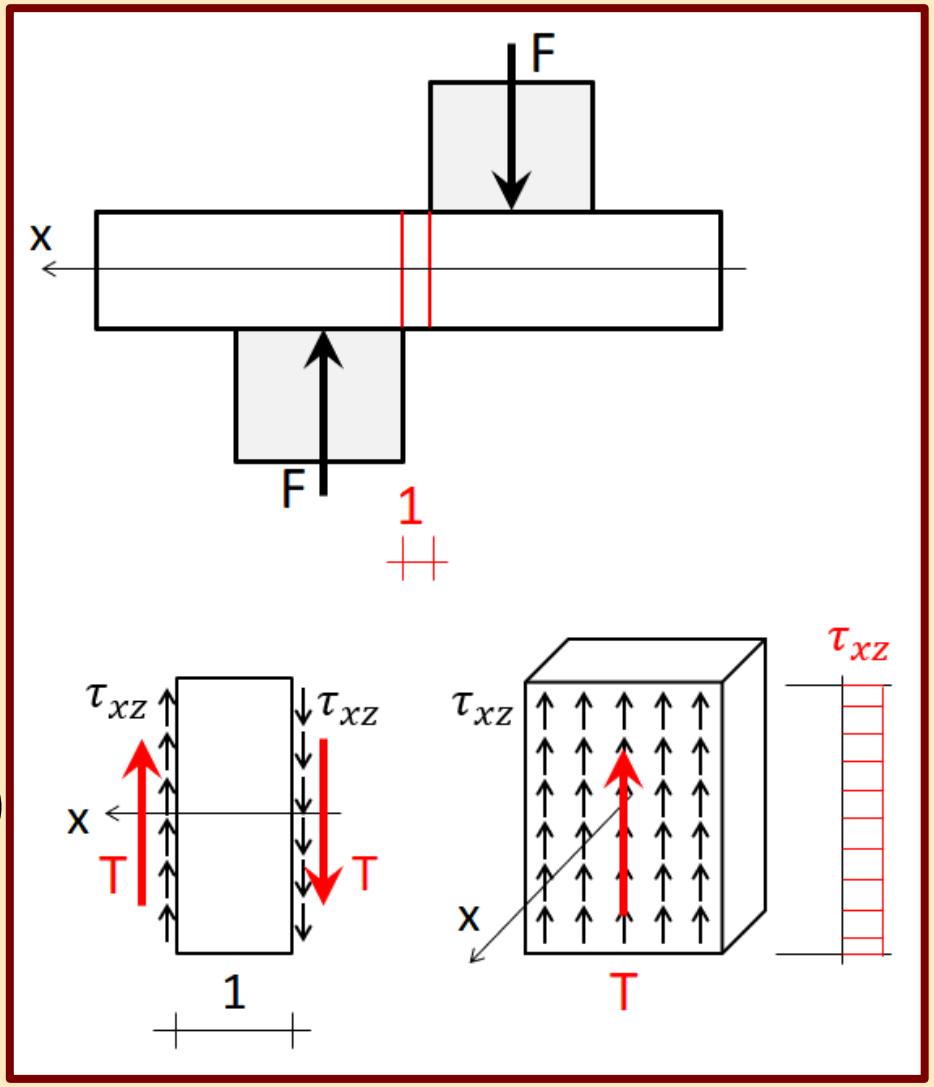
- feszültség ↔ igénybevétel
- A vizsgált rúddarab egyensúlyát a nyíróigénybevétel és a feszültségi ábra eredője biztosítja. (A nyíróigénybevétel a feszültségi ábra eredőjeként is értelmezhető.)
- Az egyensúlyi (függőleges vetületi) egyenlet

$$\int_{(A)} \tau_{xz\,(y,z)} dA = T$$

$$\tau_{xz} \int_{(A)} dA = T \ (\tau_{xz}\ konstansként\ kiemelhető)$$

$$\tau_{xz} \cdot A = T$$

$$\tau_{xz} = \frac{T}{A}$$



DUALITÁS TÉTELE

- Eddigiekben csak a km.-i síkba eső nyírófeszültségekkel foglalkoztunk.
- A test egy pontját elemi hasábként kiragadva, annak egyensúlyban kell lennie.
- A nyomatéki egyensúly teljesüléséhez a hasáb km.-be eső síkjaiban keletkező feszültségei mellett, az arra merőleges síkjaiban ellentett forgatási értelmű, azonos nagyságú nyírófeszültségeknek kell ébrednie. Tehát a nyírófeszültségek mindig párban lépnek fel.

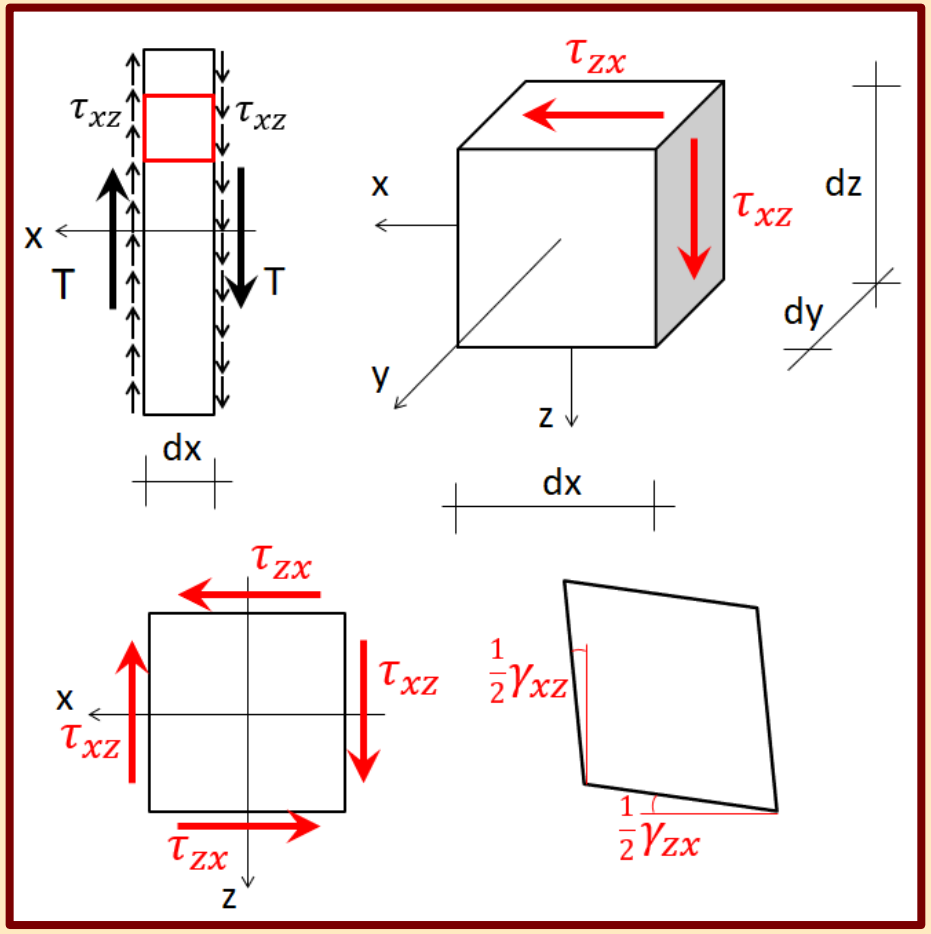
$$\sum M_{yi} = \tau_{xz} \cdot dx \cdot dA - \tau_{zx} \cdot dz \cdot dA = 0$$

$$\sum M_{yi} = \tau_{xz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \tau_{zx} \cdot dz \cdot dx \cdot dy = 0$$

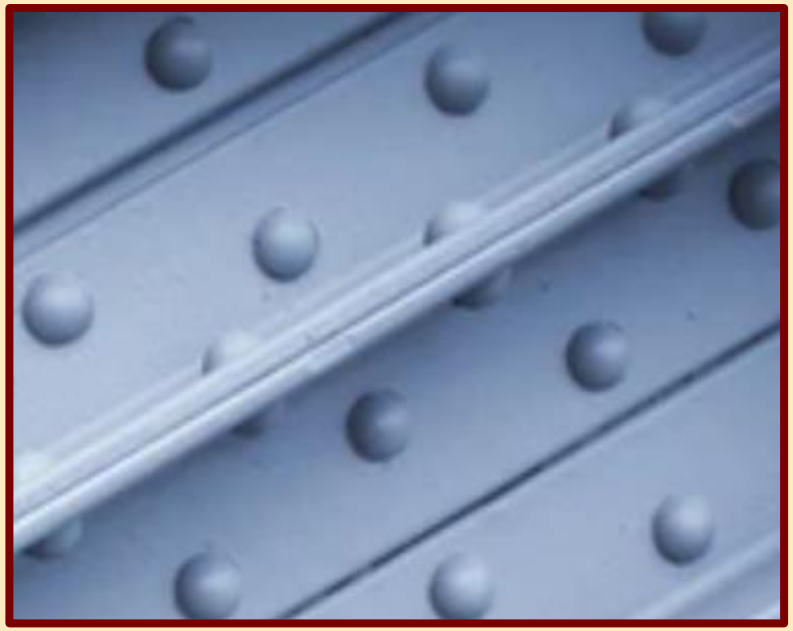
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad \left(\tau_{xy} = \tau_{yx} \;;\; \tau_{yz} = \tau_{zy}\right)$$

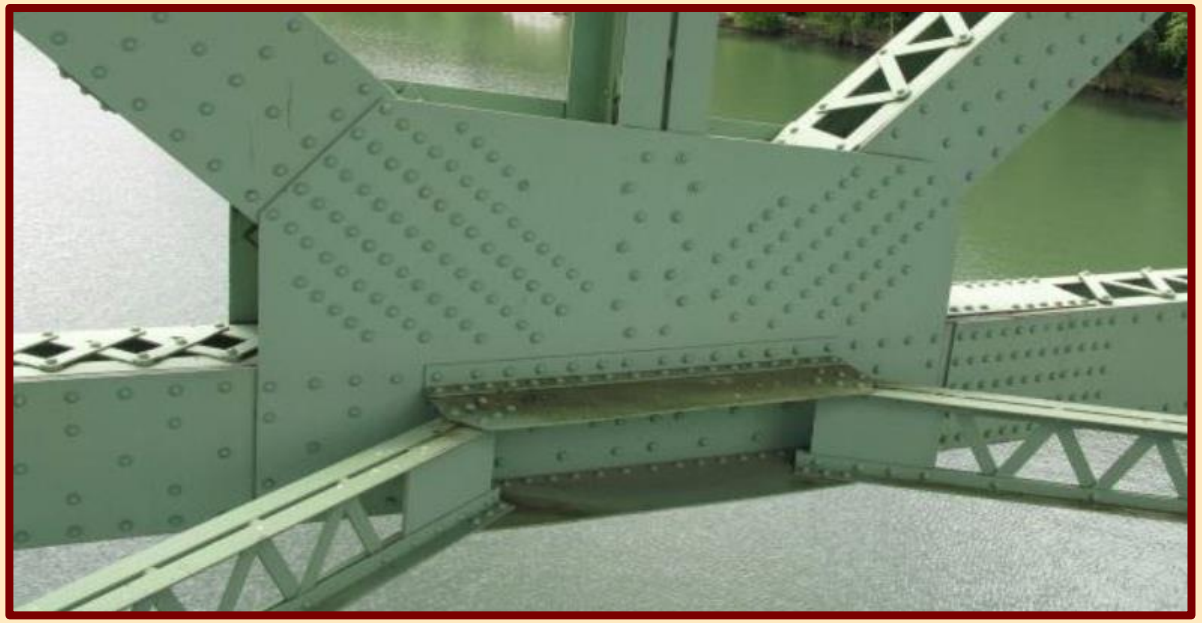
- A duális működés a nyírófeszültségeken kívül a hatásukra ébredő szögtorzulásokra is érvényes.

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} \;;\quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \;;\quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}$$



SZEGECSKAPCSOLATOK





SZEGECSKAPCSOLATOK SZÁMÍTÁSA

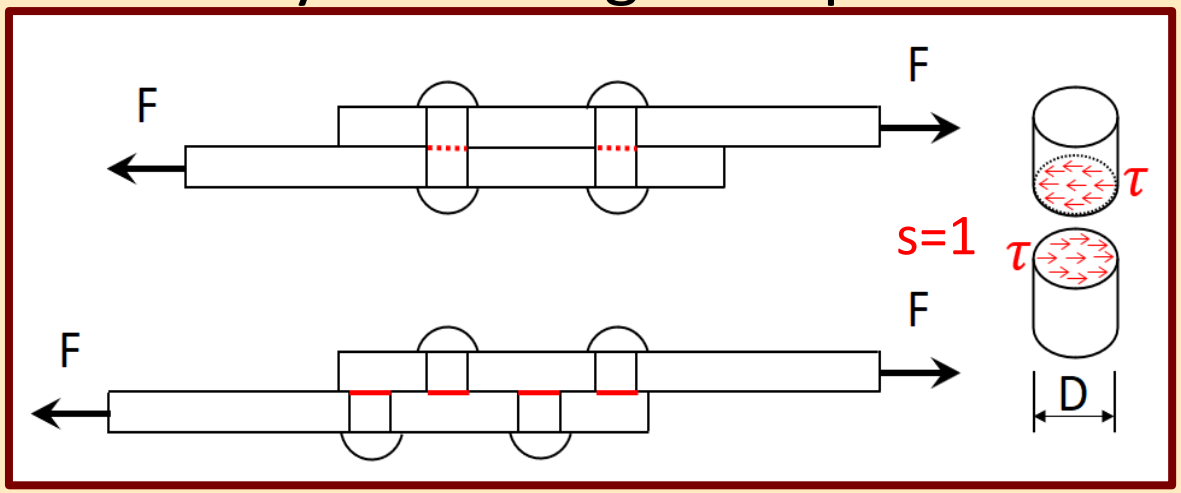
TISZTA NYÍRÁS

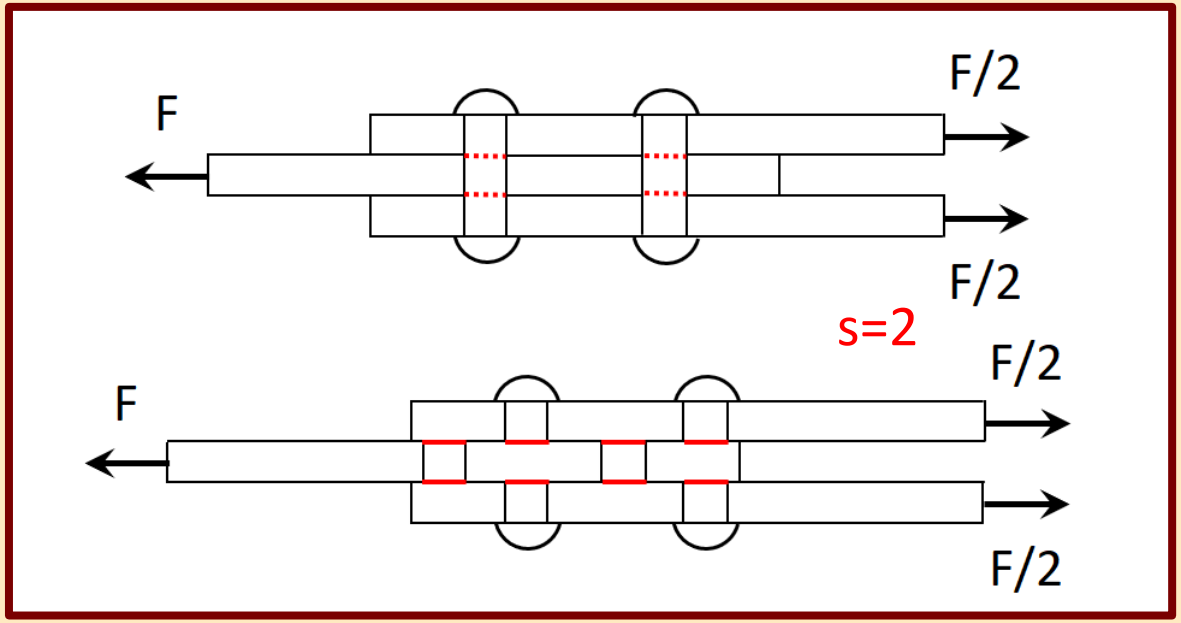
- A lemezek ellentétes irányú elmozdulását akadályozzák meg a beépített szegecsek.
- A szegecsorsó km.-e tiszta nyírásnak van kitéve, tönkremenetelkor a szegecs elnyíródik.
- A szegecs nyírófeszültsége és méretezése:

$$\tau = \frac{F}{n \cdot \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot s} \leq \tau_e$$

n – szegecsszám

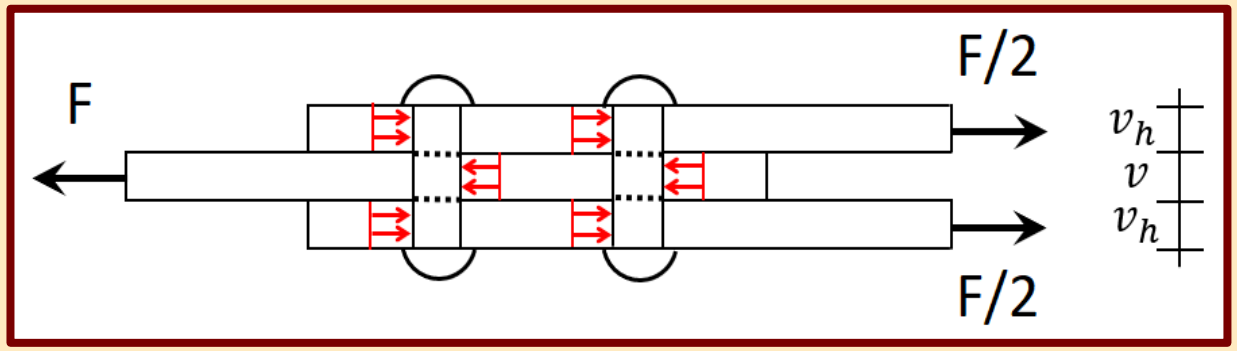
s – nyírási síkok száma (ha s=1, egyszer nyírt, ha s=2, kétszer nyírt a kapcsolat)





PALÁSTNYOMÁS

- A szegecsorsó palástja és a lemezek az érintkezési felületen az erők hatásainak következtében nyomást gyakorolnak egymásra.
- A valós palástnyomás nem egyenletes eloszlású, ezért ehelyett egy egyenletes palástnyomást veszünk figyelembe a középső sík mentén a számításokban.
- A szegecs (és lemezek) palástnyomása és méretezése:

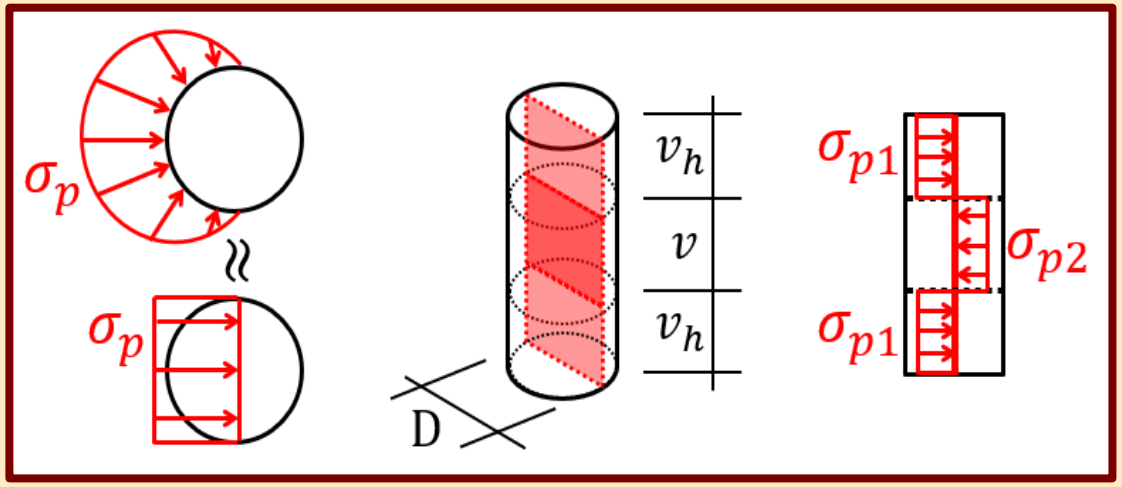


$$\sigma_{p1} = \frac{F}{n \cdot D \cdot 2 \cdot v_h} \quad (hevederek)$$

$$\sigma_{p2} = \frac{F}{n \cdot D \cdot v} \quad (alaplemez)$$

$$\sigma_p = max\begin{Bmatrix}\sigma_{p1}\\ \sigma_{p2}\end{Bmatrix} \rightarrow v_{min} = min\begin{Bmatrix}v\\ 2 \cdot v_h\end{Bmatrix}$$

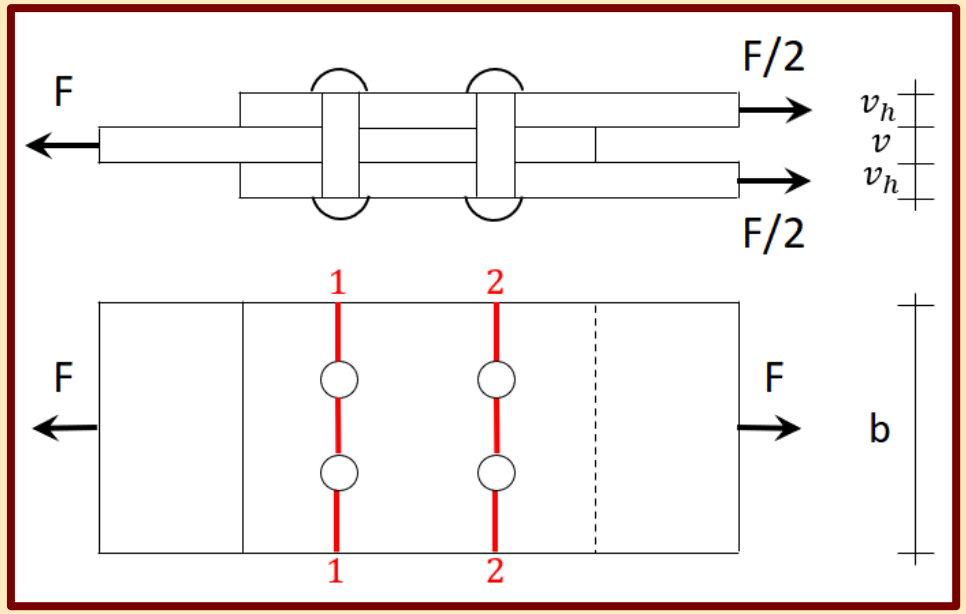
$$\sigma_p = \frac{F}{n \cdot D \cdot v_{min}} \leq \sigma_{pe}$$



A v_{min} az egyirányban dolgozó lemezek összvastagságai közül a legkisebb érték.

TISZTA HÚZÁS A LEMEZEKBEN

- Az erők hatására a lemezek keresztmetszeteiben húzóigénybevétel ébred.
- A legnagyobb feszültség a legkisebb km.-i területnél jön létre, vagyis a lyukgyengítéseknél.
- A lemezek húzófeszültsége és méretezése:



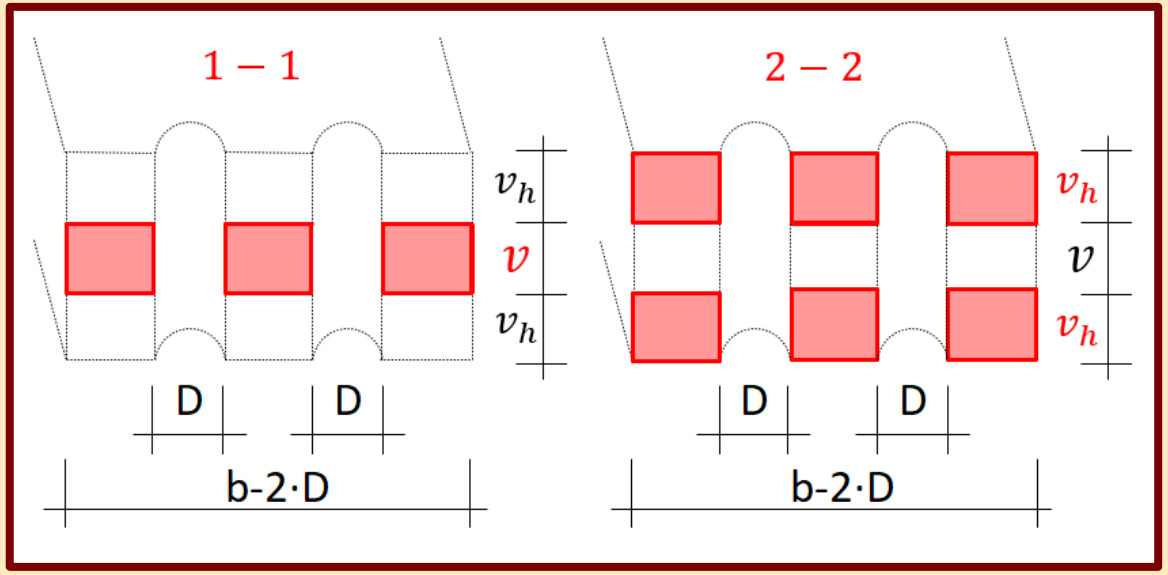
$$\sigma_1 = \frac{F}{v \cdot (b - x \cdot D)} \quad (alaplemez)$$

$$\sigma_2 = \frac{F}{2 \cdot v_h \cdot (b - x \cdot D)} \quad (hevederek)$$

$$\sigma = max\begin{Bmatrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{Bmatrix} \rightarrow v_{min} = min\begin{Bmatrix} v \\ 2 \cdot v_h\end{Bmatrix}$$

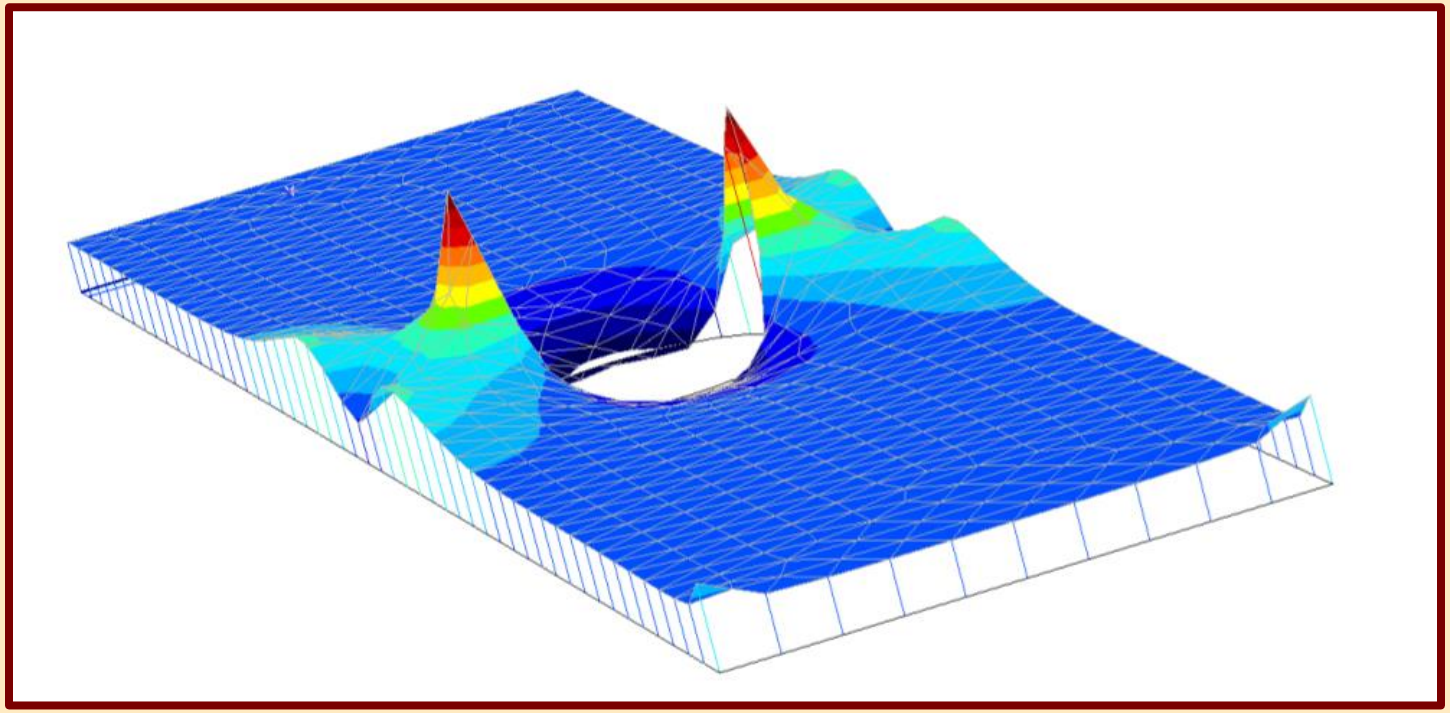
$$\sigma = \frac{F}{v_{min} \cdot (b - x \cdot D)} \leq \sigma_e$$

Az x a szegecssorok száma.



SZEGECSKAPCSOLATOK SZÁMÍTÁSÁNAK EGYSZERŰSÍTÉSEI

- A szegecsek nyírását és palástnyomását is egyenletes feszültségeloszlással számítjuk.
- A szegecsek azonos mértékben felelnek a terhelő erő felvételéért.
- A lyukkivágások kis környezetében feszültségcsúcsok alakulnak ki. Ezek a képlékeny átrendeződés segítségével leépülnek, így elfogadható közelítés a gyengített km.-ek egyenletes feszültségeloszlása méretezéskor.



FAKÖTÉSEK

FAKÖTÉSEK SZÁMÍTÁSA

- Az elemek a megfelelő (ács)kapcsolat vagy kötőelemek segítségével megőrzik elmozdulásmentességüket.
- A fa anizotróp anyag, a vizsgált feszültségek rostiránnyal bezárt szögét is figyelembe kell venni a számításkor.
- Tiszta nyírás:

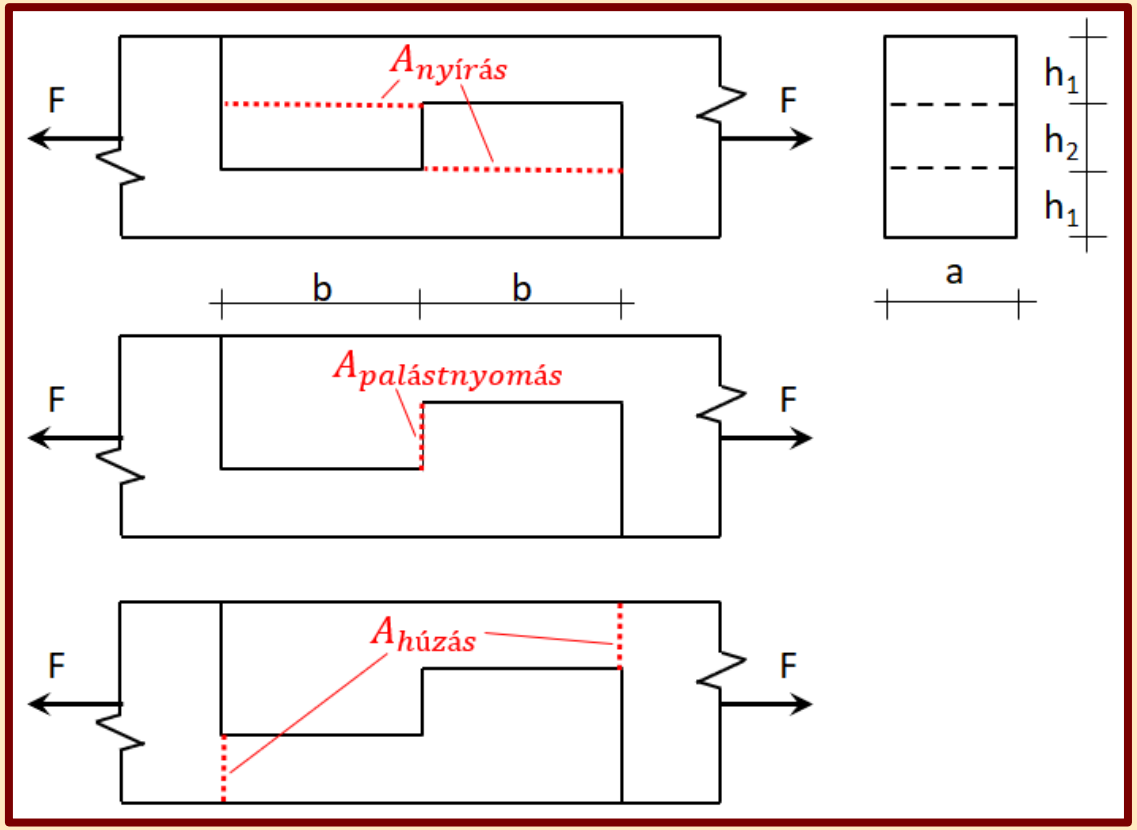
$$\tau = \frac{F}{A_{nyírás}} \leq \tau_e$$

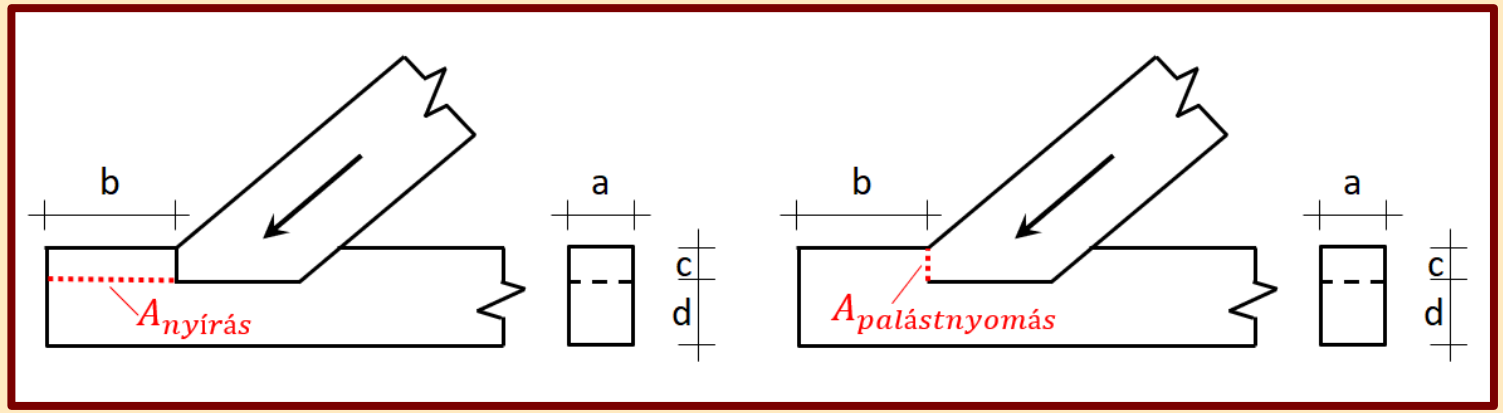
- Palástnyomás:

$$\sigma_p = \frac{F}{A_{palástny.}} \leq \sigma_{pe}$$

- Tiszta húzás:

$$\sigma = \frac{F}{A_{húzás}} \leq \sigma_e$$





Tartószerkezetek mechanikája II.

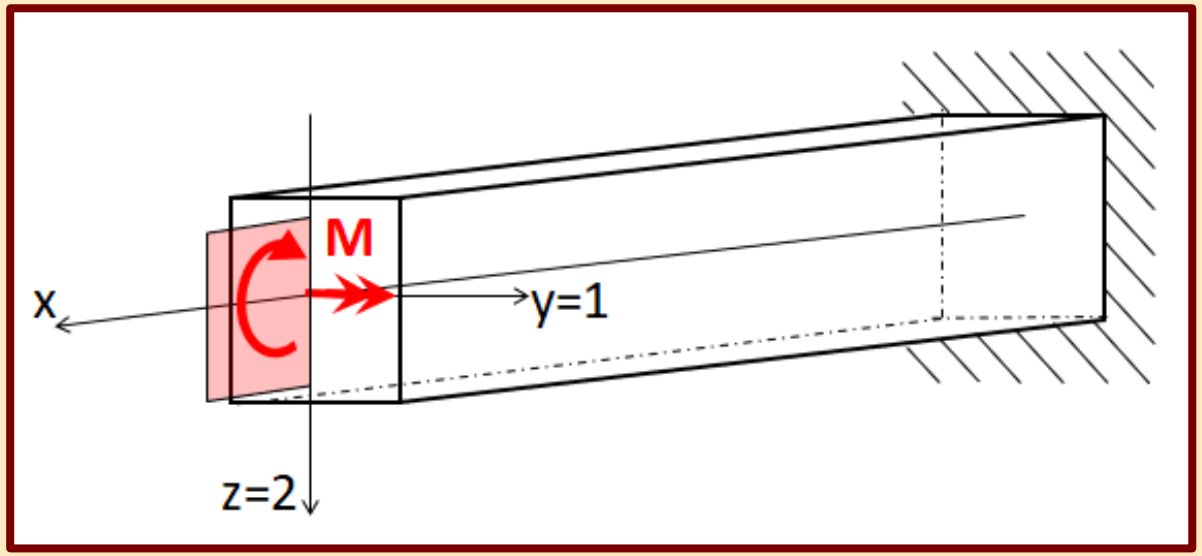
7.

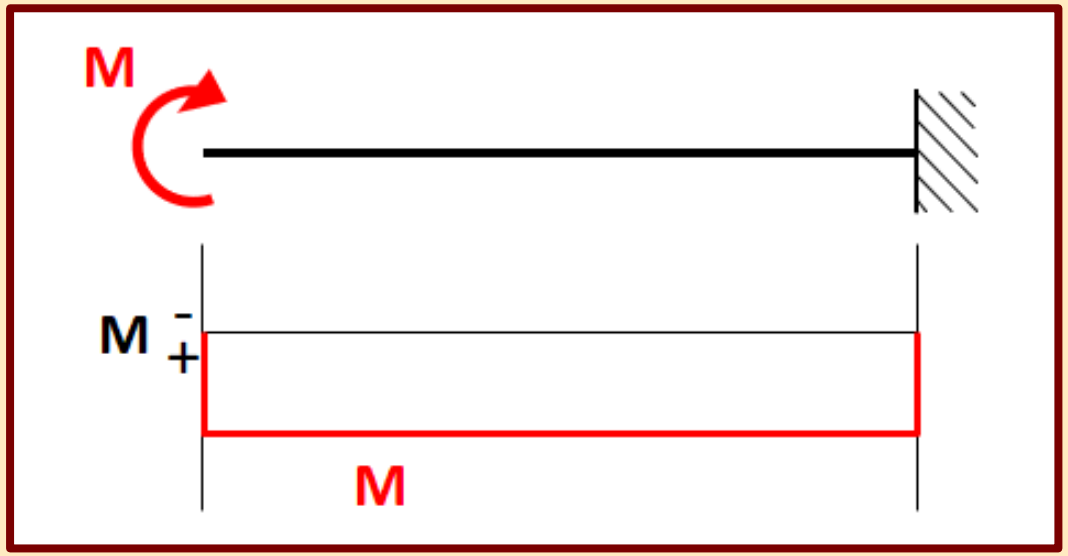
Feszültségszámítás: tiszta egyenes hajlítás

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

TISZTA EGYENES HAJLÍTÁS ÉRTELMEZÉSE

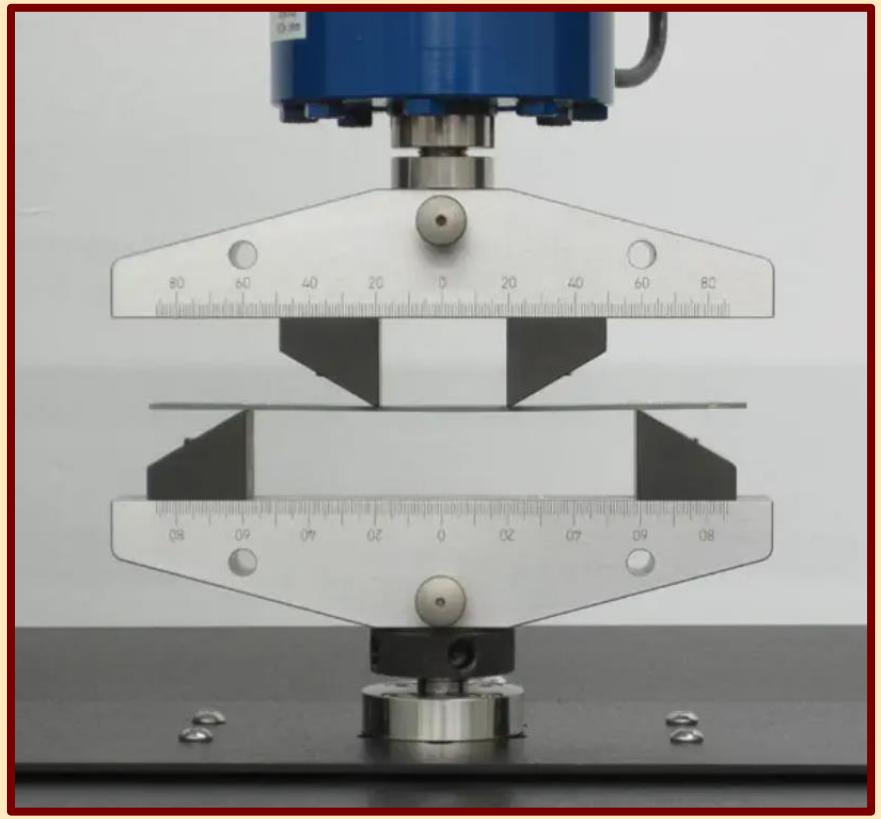
- Ha a test hossztengelye és egy a km. súlypontján áthaladó valamely tengely által meghatározott síkban forgató nyomaték működik csak a keresztmetszetekben (vagyis a nyomatékvektor a km.-i síkba esik), tiszta hajlításról beszélünk.
- Ha a nyomaték a test hossztengelye és a km. egyik főinercia tengelye által meghatározott síkban működik (vagyis a nyomatékvektor a km. másik főirányába esik), egyenes hajlításról beszélünk.

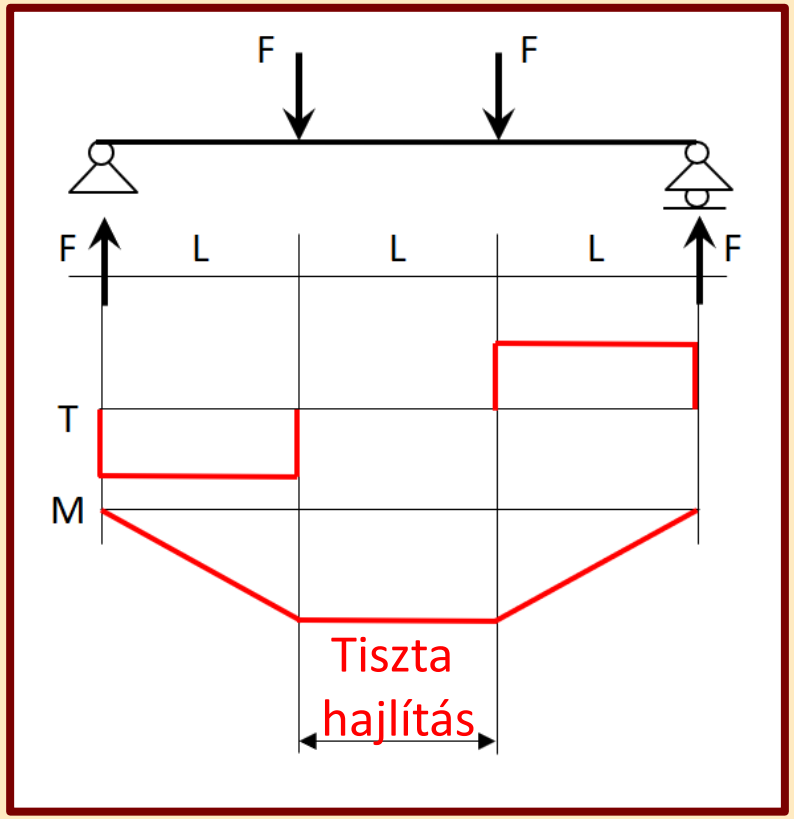




PÉLDÁK TISZTA EGYENES HAJLÍTÁSRA

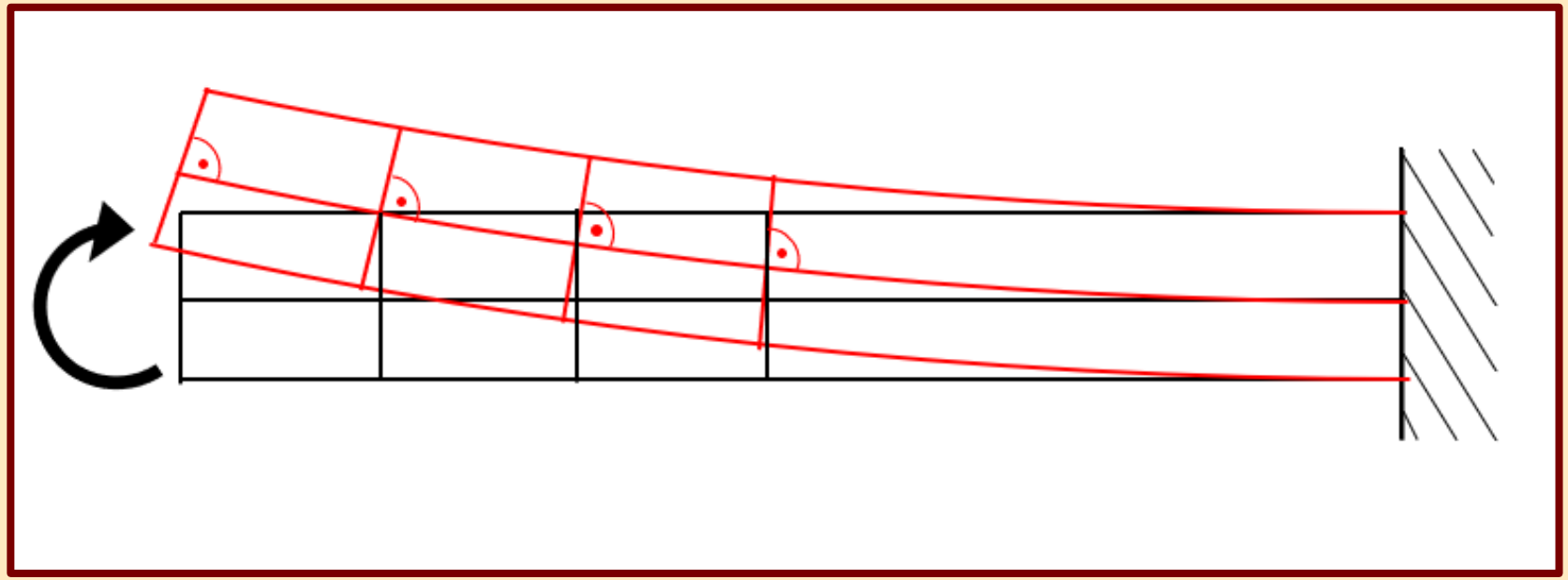
- Valós igénybevételként a tiszta hajlítás ritkán lép fel, viszont gyakran fordul elő más igénybevételekkel (nyírás, nyomás), ezért fontos a vele kapcsolatos összefüggések megismerése.
- Hajlítóvizsgálat (négy pontos) során előállítható tiszta hajlítás (középső tartomány).





ALAKVÁLTOZÁSOKKAL KAPCSOLATOS FELTEVÉSEK

- A tartó hossztengelye egyenes hajlítás hatására a hajlítás síkjában meggörbül. A km.-ek a hajlítás síkjára merőleges súlyponti főinercia tengely körül elfordulnak, amely tengelyt a hajlítás tengelyének nevezzük.
- Bernoulli-Navier hipotézis:
  - A km.-ek a hajlításból származó alakváltozások lezajlása után is síkok maradnak.
  - A km.-ek továbbra is merőlegesek maradnak a meggörbült tartótengelyre.



FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA

GEOMETRIAI EGYENLET

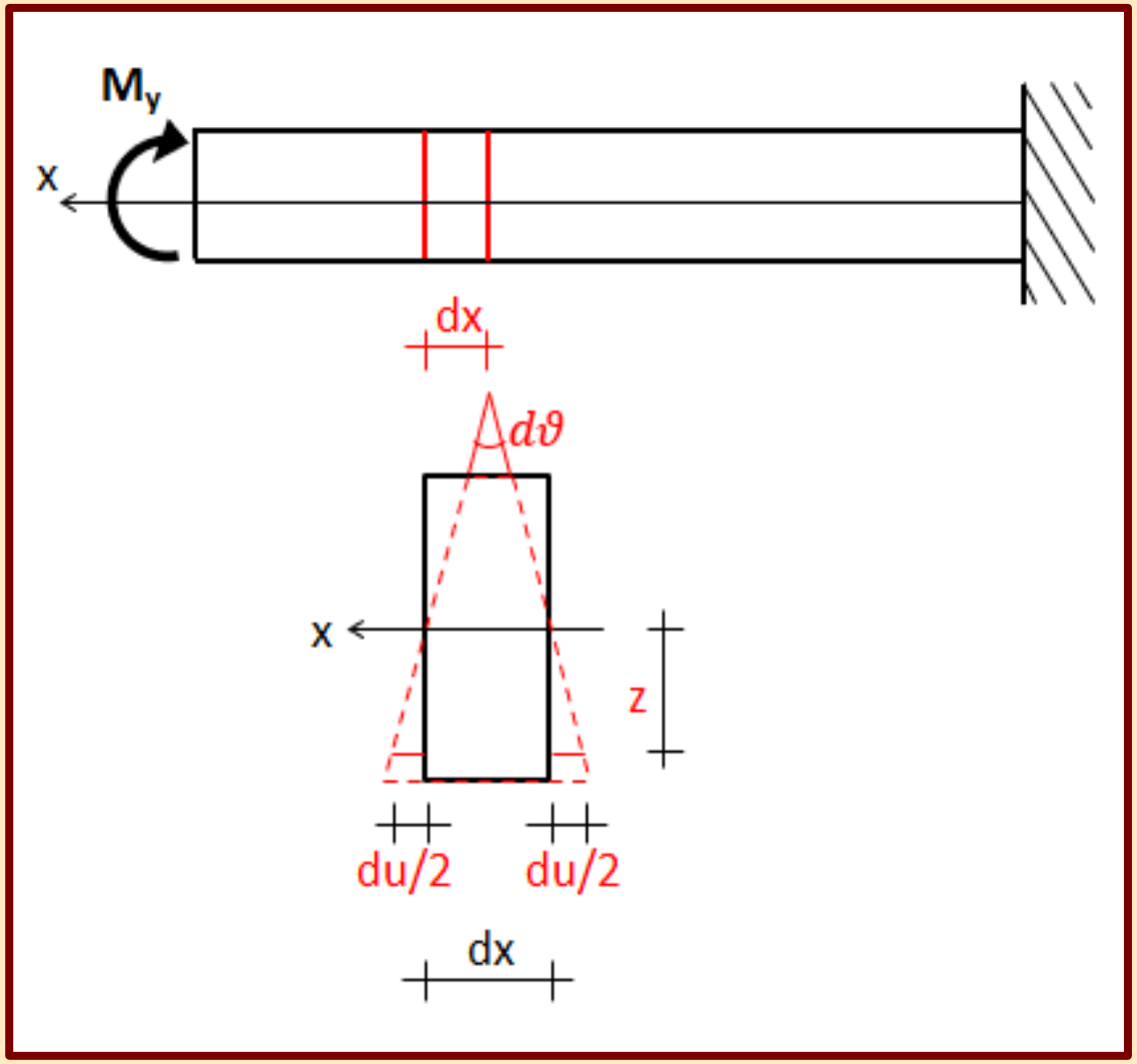
- elmozdulás ↔ alakváltozás
- A km.-ek a hajlítás tengelye körül síklapként elfordulnak, a véglapok között relatív elfordulás keletkezik.
- Fajlagos megnyúlás alakul ki, amely a hajlítás tengelyétől mért távolsággal egyenesen arányos.

$$\frac{d\vartheta_y}{dx} = \kappa_y \quad ; \quad d\vartheta_y \cdot \mathrm{z} = du$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\vartheta_y \cdot \mathrm{z}}{dx} = \kappa_y \cdot z = \varepsilon_{x(y,z)}$$

- Szögtorzulás nem keletkezik.

$$\gamma_{xz\,(y,z)} = 0$$

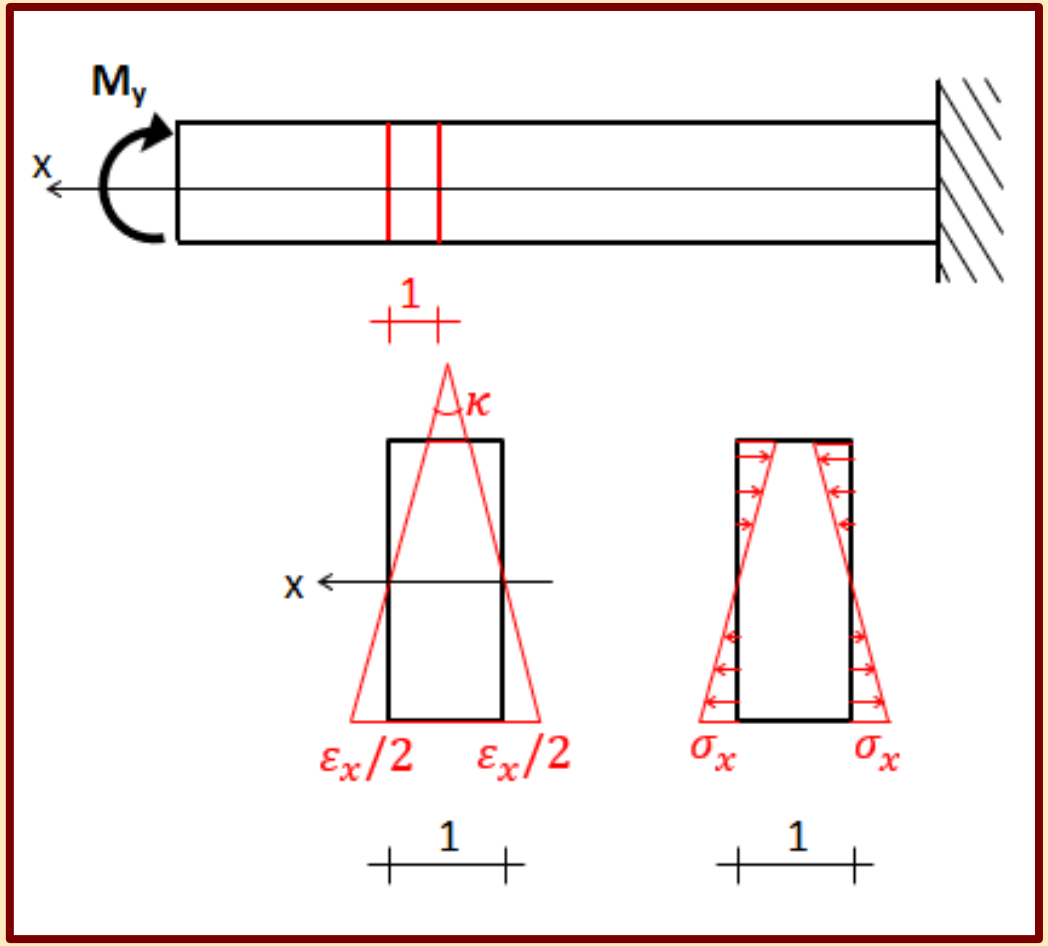


ANYAGEGYENLET

- alakváltozás ↔ feszültség
- Hooke-törvény: lineárisan rugalmas viselkedés
- Az anyagegyenlet alapján a km.-ben lineárisan változó fajlagos megnyúlás vele arányos, vagyis ugyancsak lineáris normálfeszültség eloszlást eredményez. Amely tengely mentén zérus a feszültség, semleges tengelynek nevezzük. Egyenes hajlításnál a hajlítás tengelyével egybe esik.

$$\sigma_{x\,(y,z)} = E \cdot \varepsilon_{x\,(y,z)}$$

$$\sigma_{x\,(z)} = E \cdot \kappa_y \cdot z$$



- Nyírófeszültség nem keletkezik a km.-ben.

$$\tau_{xz\,(y,z)} = G \cdot \gamma_{xz\,(y,z)} \quad ; \quad \gamma_{xz\,(y,z)} = 0 \;\rightarrow\; \tau_{xz\,(y,z)} = 0$$

EGYENSÚLYI EGYENLET

- feszültség ↔ igénybevétel
- A vizsgált rúddarab egyensúlyát a hajlító nyomatéki igénybevétel és a feszültségi ábra eredője biztosítja. (A nyomatéki igénybevétel a feszültségi ábra eredőjeként is értelmezhető.)
- Az egyensúlyi (nyomatéki) egyenlet

$$\int_{(A)} \sigma_{x\,(z)} \cdot z \cdot dA = M_y$$

$$\int_{(A)} E \cdot \kappa_y \cdot z \cdot z \cdot dA = M_y$$

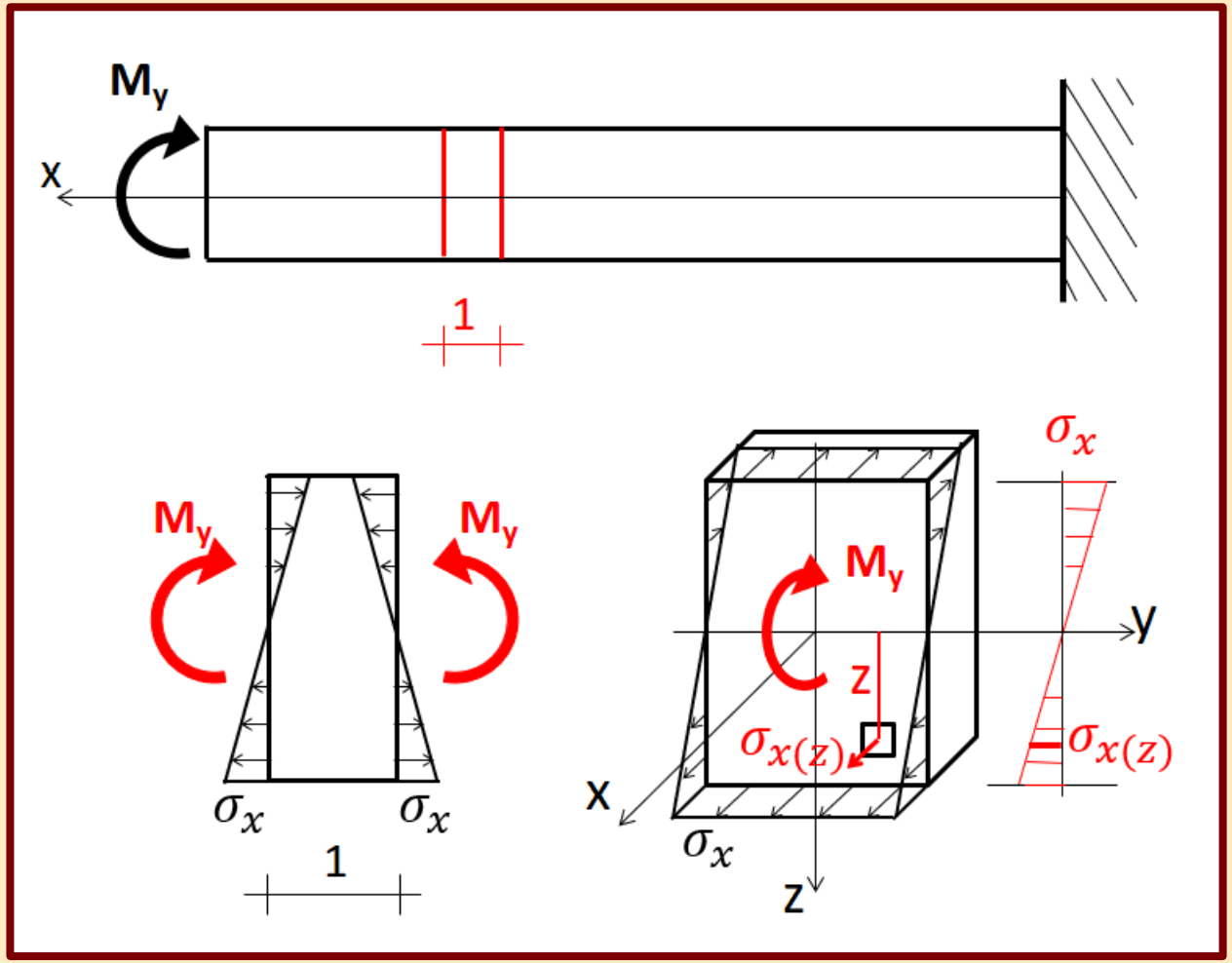
$$E \cdot \kappa_y \int_{(A)} z^2 \cdot dA = M_y$$

$$E \cdot \kappa_y \cdot I_y = M_y$$

$$\kappa_y = \frac{M_y}{E \cdot I_y}$$

$$\sigma_x = E \cdot \kappa_y \cdot z = E \cdot \frac{M_y}{E \cdot I_y} \cdot z$$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

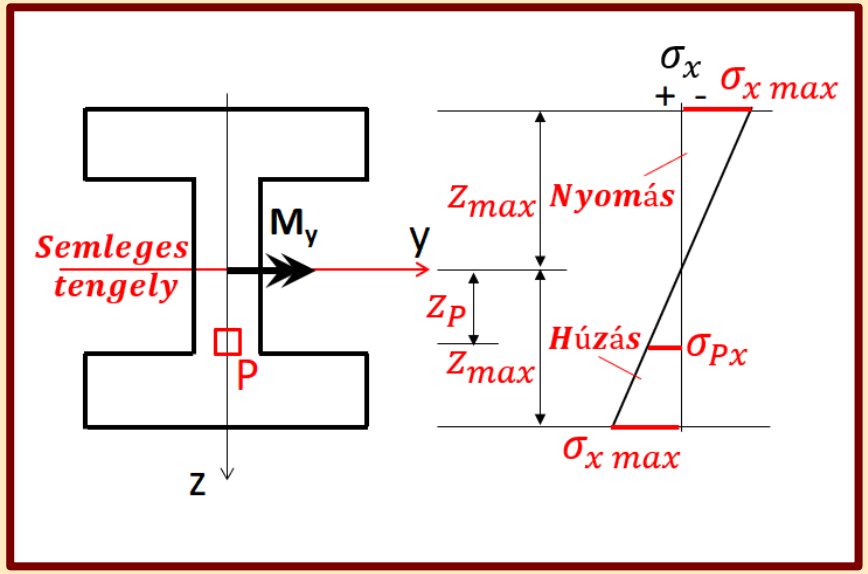


FESZÜLTSÉGSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA

- Km. egy pontjának feszültsége:

$$\sigma_{Px} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_P$$

  - A z_p a semleges t.-től a P pontig mért távolság.



- Km. maximális feszültsége (y szimm.tengely):

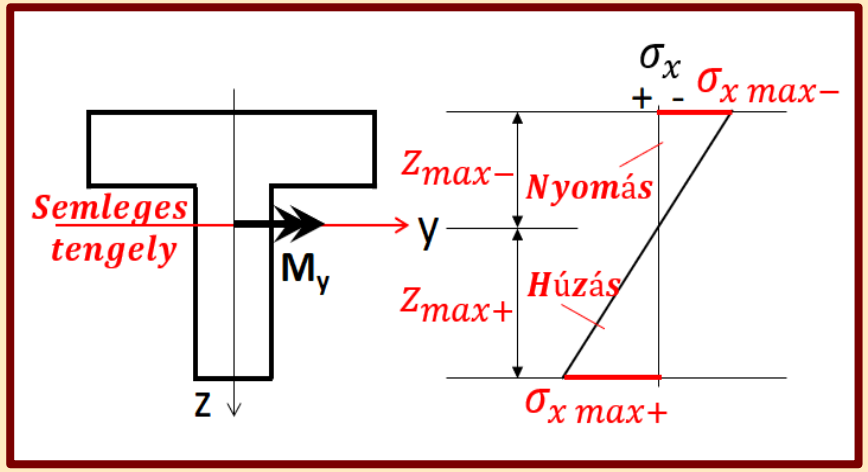
$$\sigma_{x\,max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} = \frac{M_y}{W_y} \quad ; \quad W_y = \frac{I_y}{z_{max}}$$

  - A z_{max} szélsőszál-távolságot, a σ_{max} szélsőszál-feszültséget jelent.
  - W_y-t keresztmetszeti tényezőnek hívjuk.

- Km. maximális feszültsége (y nem szimm.tengely):

$$\sigma_{x\,max}{}^{-} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max-} = \frac{M_y}{W_y{}^{-}} \quad ; \quad W_y{}^{-} = \frac{I_y}{z_{max-}}$$

$$\sigma_{x\,max}{}^{+} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max+} = \frac{M_y}{W_y{}^{+}} \quad ; \quad W_y{}^{+} = \frac{I_y}{z_{max+}}$$



ALAKVÁLTOZÁSOK, ELMOZDULÁSOK MEGHATÁROZÁSA

- Fajlagos relatív szögelfordulás (egységnyi hosszúságú szakasz véglapjai közötti elfordulás), másnéven görbület:

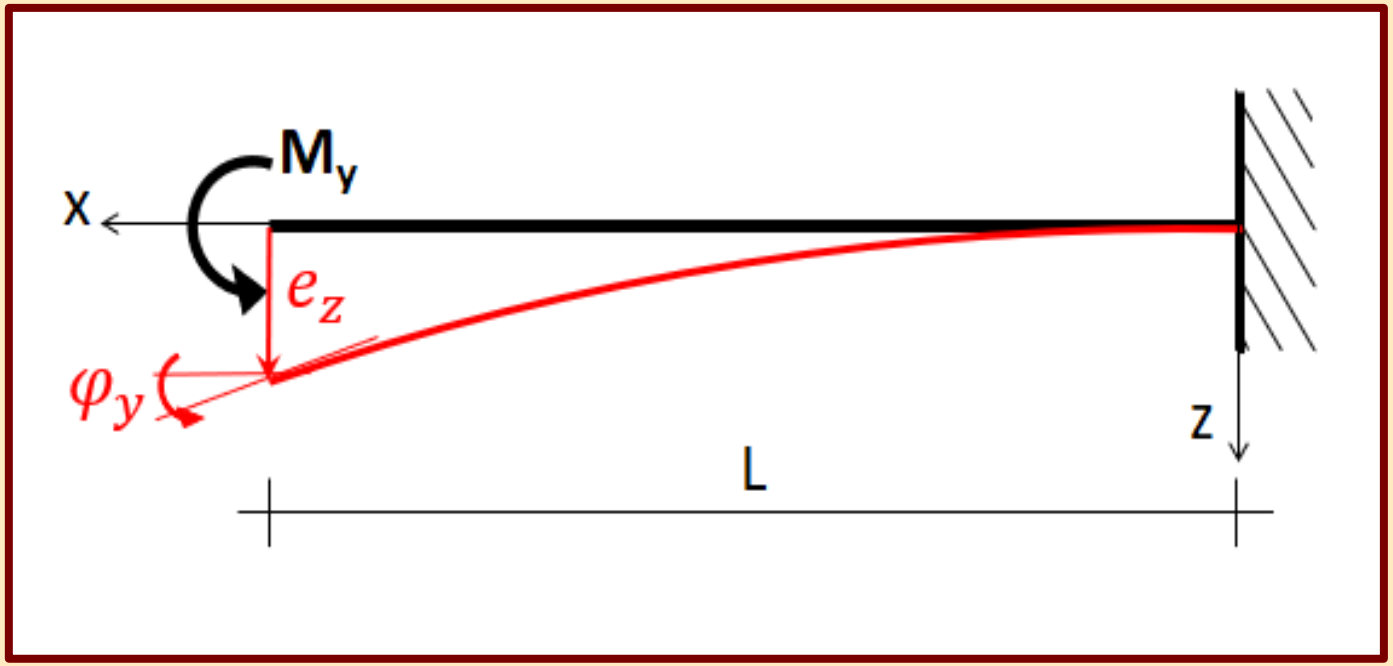
$$\kappa_y = \frac{M_y}{E \cdot I_y}$$

- Konzol tiszta egyenes hajlítása esetén
  - a konzolvég elfordulása:

$$\varphi_y = \frac{M_y \cdot L}{E \cdot I_y}$$

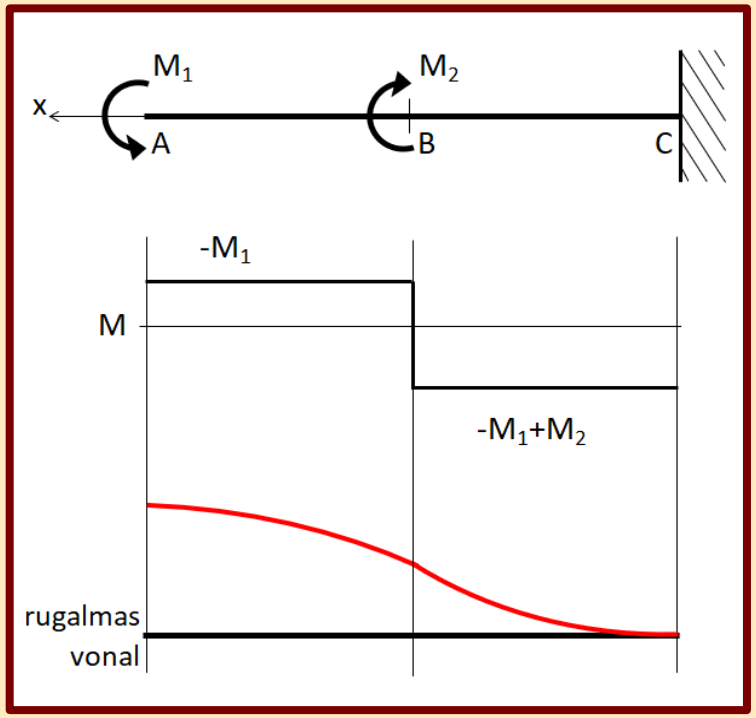
  - a konzolvég eltolódása:

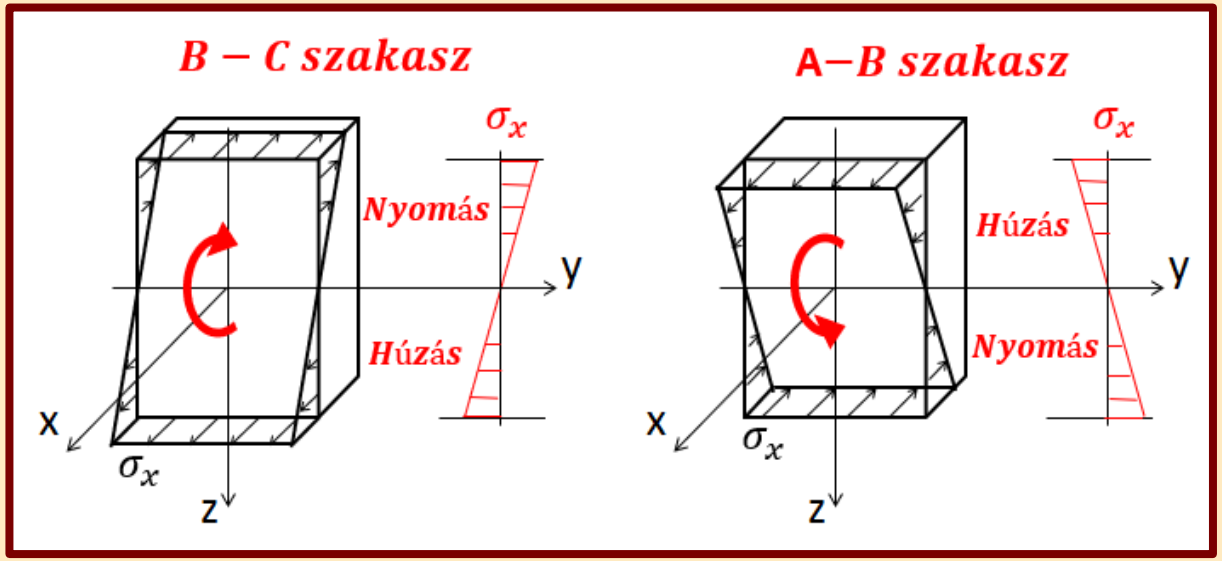
$$e_z = \frac{M_y \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I_y}$$



RÚDELEM IGÉNYBEVÉTELE, ALAKVÁLTOZÁSA ÉS A FESZÜLTSÉGEK

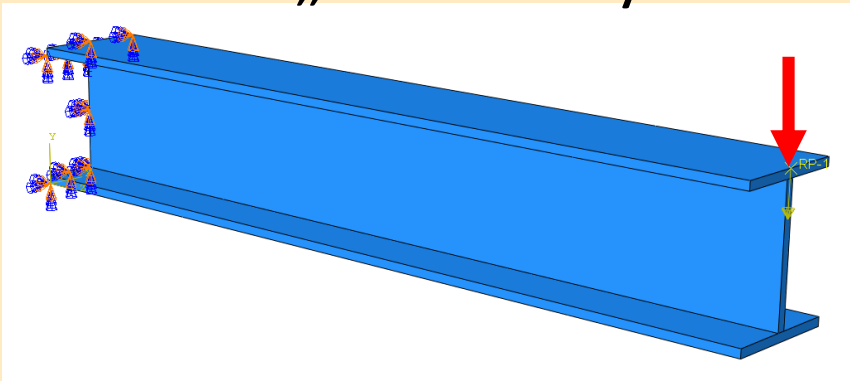
- A nyomatéki ábra mindig a húzott oldalon van.
- B-C szakasz:
  - Nyomatéki ábra <u>alul</u> helyezkedik el.
  - A rugalmas vonal <u>alul</u>ról domború görbületű.
  - A feszültségek a km-ekben <u>alul</u> húzófeszültségek, felül nyomófeszültségek.
- A-B szakasz:
  - Nyomatéki ábra <u>felül</u> helyezkedik el.
  - A rugalmas vonal <u>felül</u>ről domború görbületű.
  - A feszültségek a km-ekben <u>felül</u> húzófeszültségek, alul nyomófeszültségek.

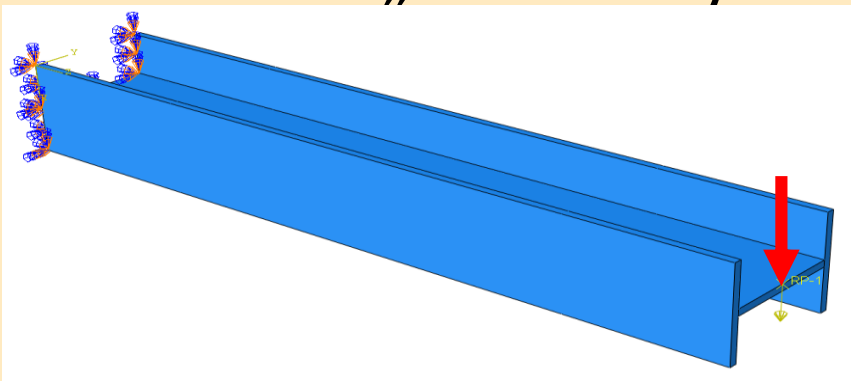




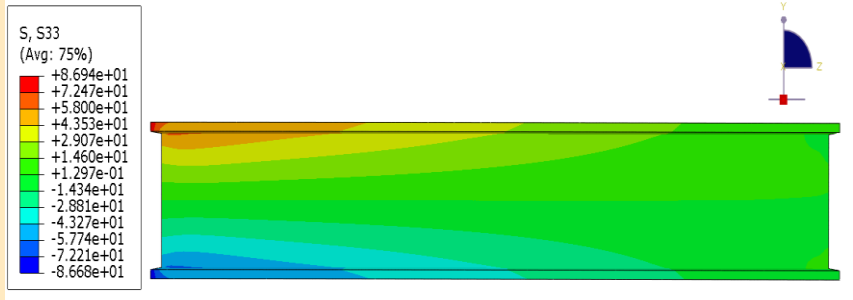
A KERESZTMETSZET KIALAKÍTÁSÁNAK SZEREPE

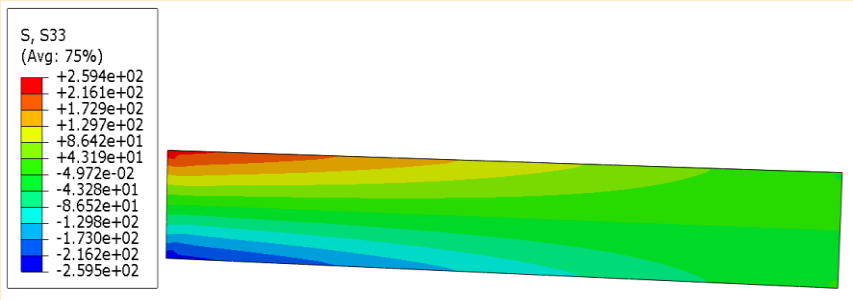
- Km. elrendezése: álló „I” szelvény fekvő „I” szelvény



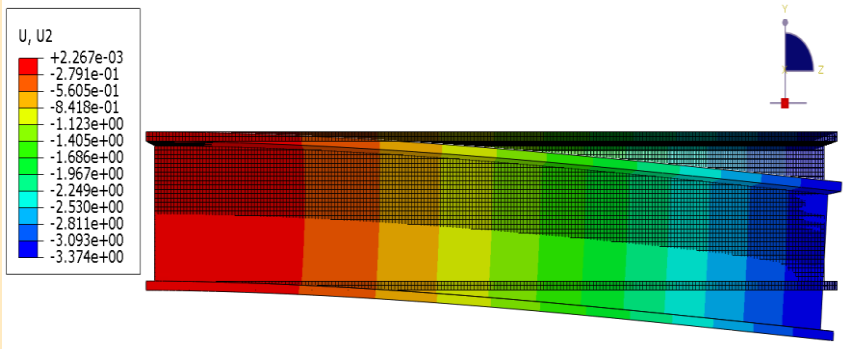


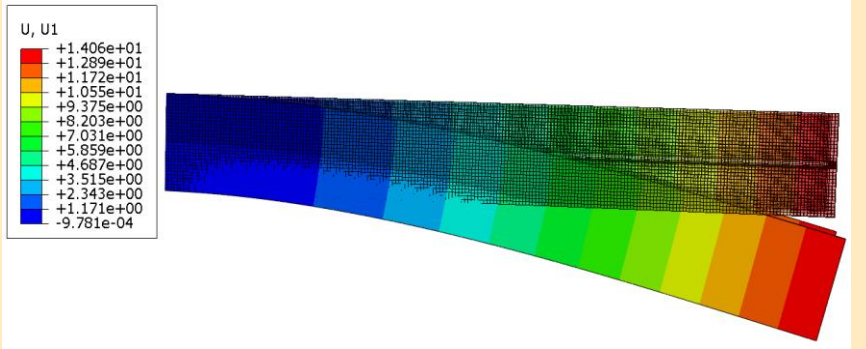
- Feszültségek alakulása: kisebb feszültségek nagyobb feszültségek





- Lehajlások alakulása: kisebb lehajlások nagyobb lehajlások





Tartószerkezetek mechanikája II.

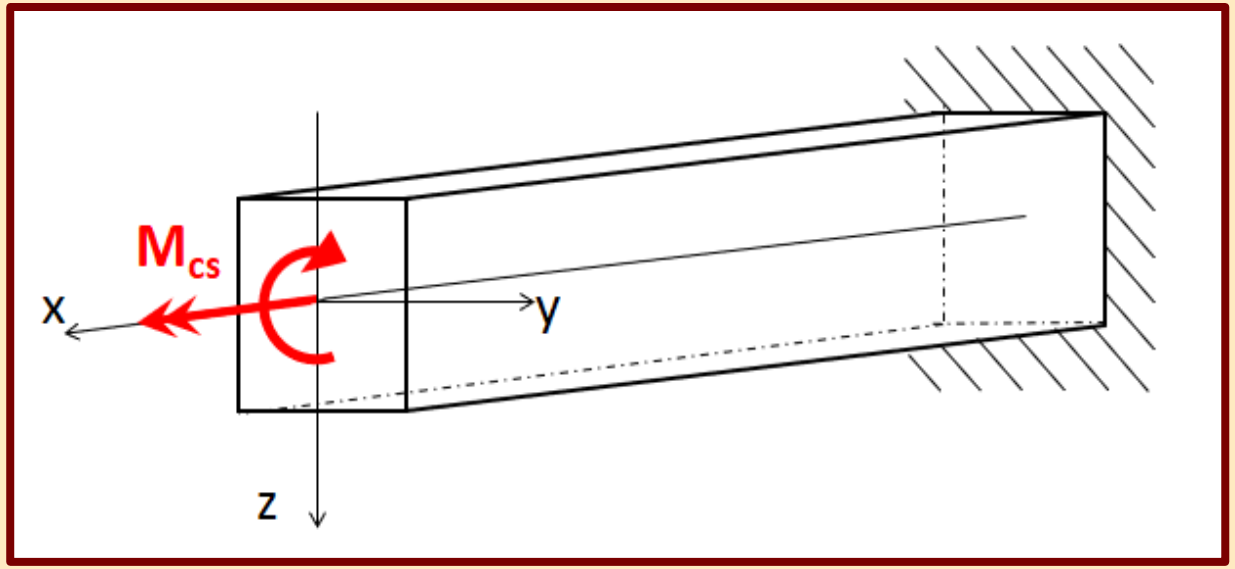
8.

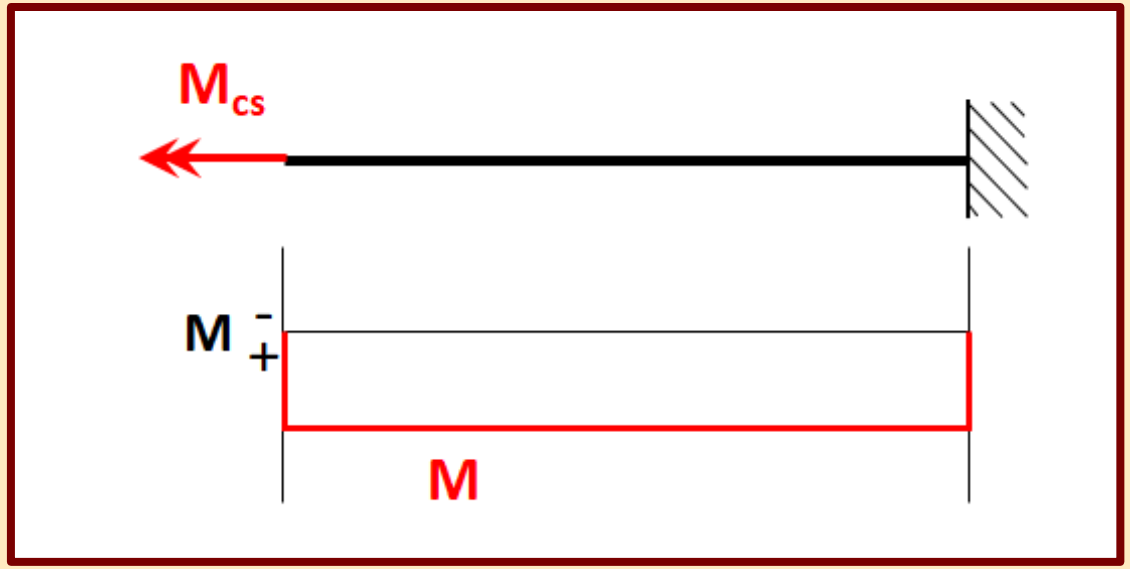
Feszültségszámítás: tiszta csavarás

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

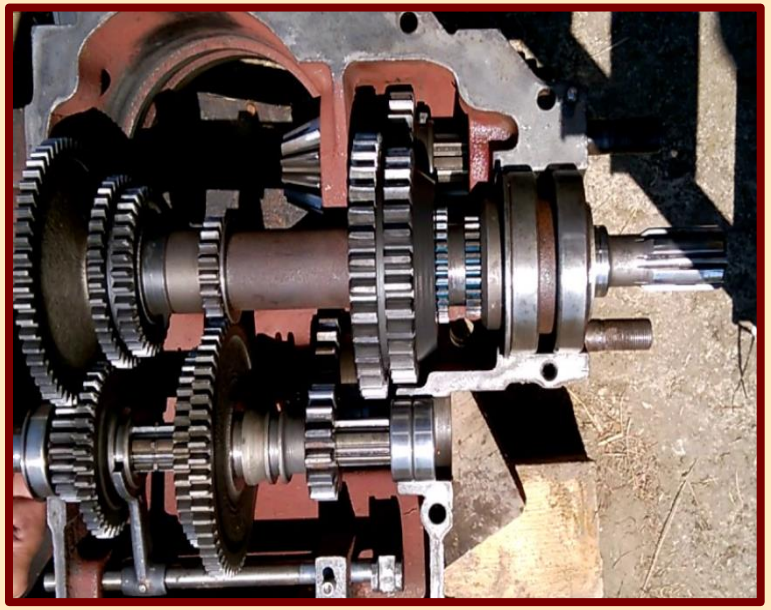
TISZTA CSAVARÁS ÉRTELMEZÉSE

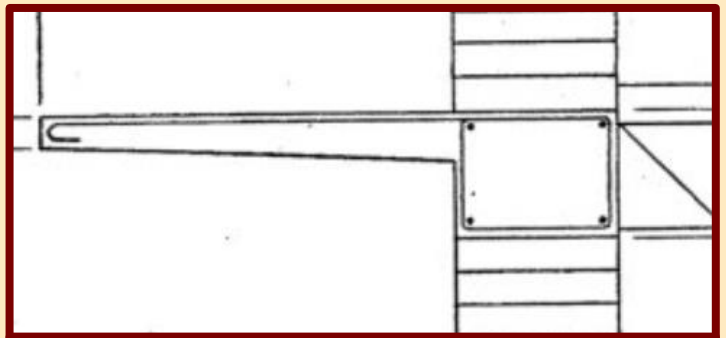
- Ha a keresztmetszetekben csak a keresztmetszeti síkban forgató nyomaték működik (vagyis ha a nyomatékvektor a test hossztengelyébe esik), tiszta csavarásról beszélünk.
- A tartók csavarással szembeni viselkedése függ a km.-ek kialakításától, ezért a vizsgálatainkat a km.-ek kategorizálása alapján végezzük.

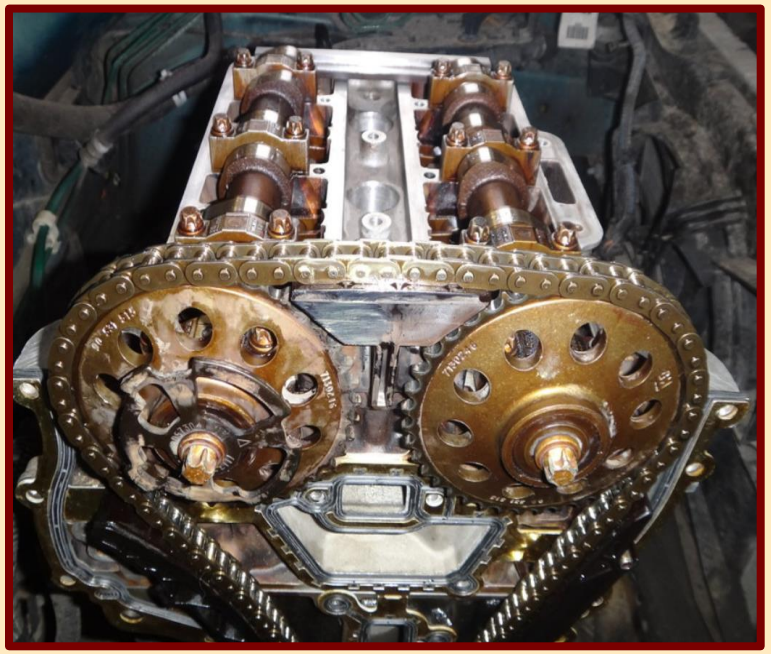




PÉLDÁK CSAVARÁSRA







FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA KÖRSZIMMETRIKUS KERESZTMETSZETEK ESETÉN

GEOMETRIAI EGYENLET

- elmozdulás ⟷ alakváltozás
- A km.-ek a tartó hossztengelye körül síklapként elfordulnak, a véglapok között relatív elfordulás keletkezik.
- Szögtorzulás alakul ki, amely a tartó tengelyétől centrikusan mért távolsággal egyenesen arányos.

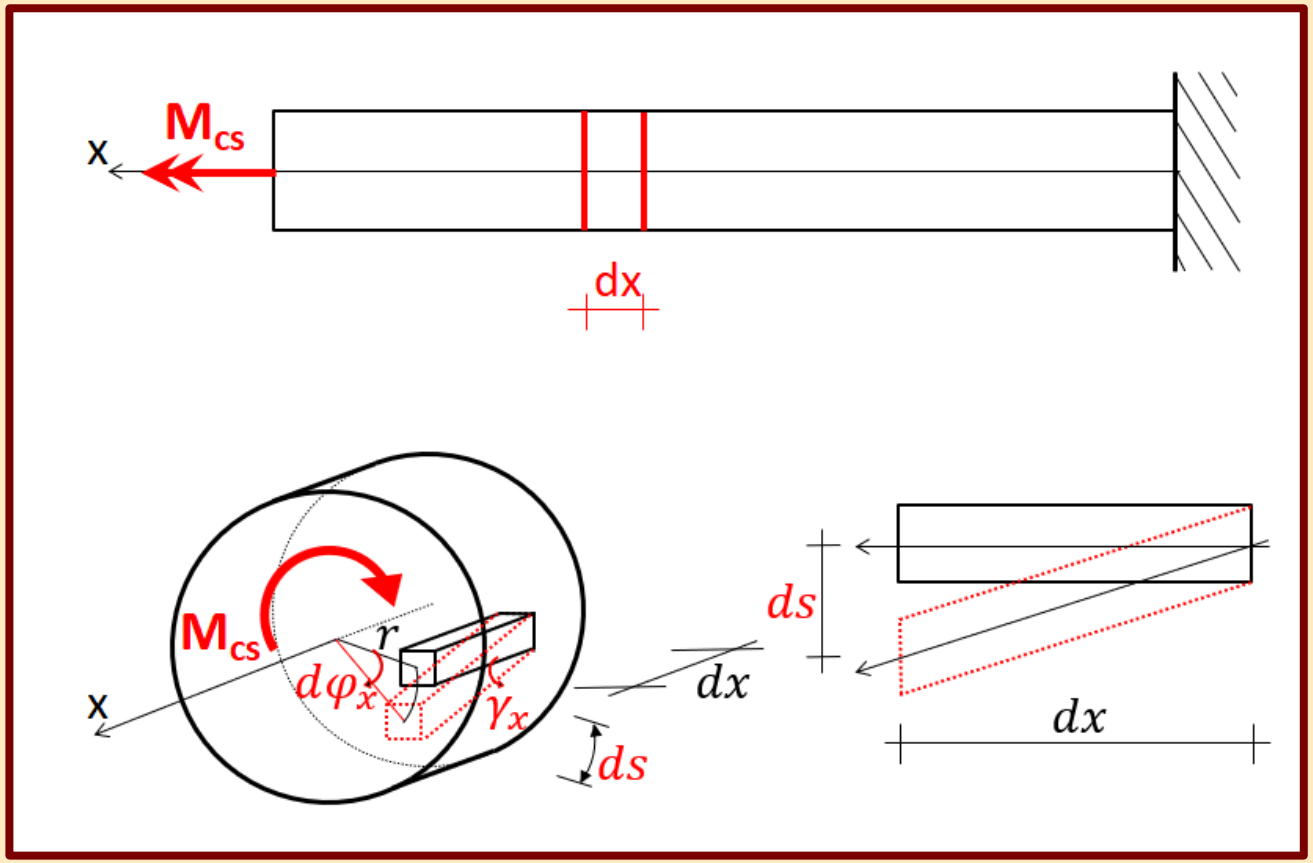
$$\frac{d\varphi_x}{dx} = \kappa_{cs}$$

$$d\varphi_x \cdot r = ds = \gamma_{x\,(y,z)} \cdot dx$$

$$\frac{d\varphi_x \cdot r}{dx} = \kappa_{cs} \cdot r = \gamma_{x(y,z)}$$

- Fajlagos megnyúlás nem keletkezik.

$$\varepsilon_{x\,(y,z)} = 0$$

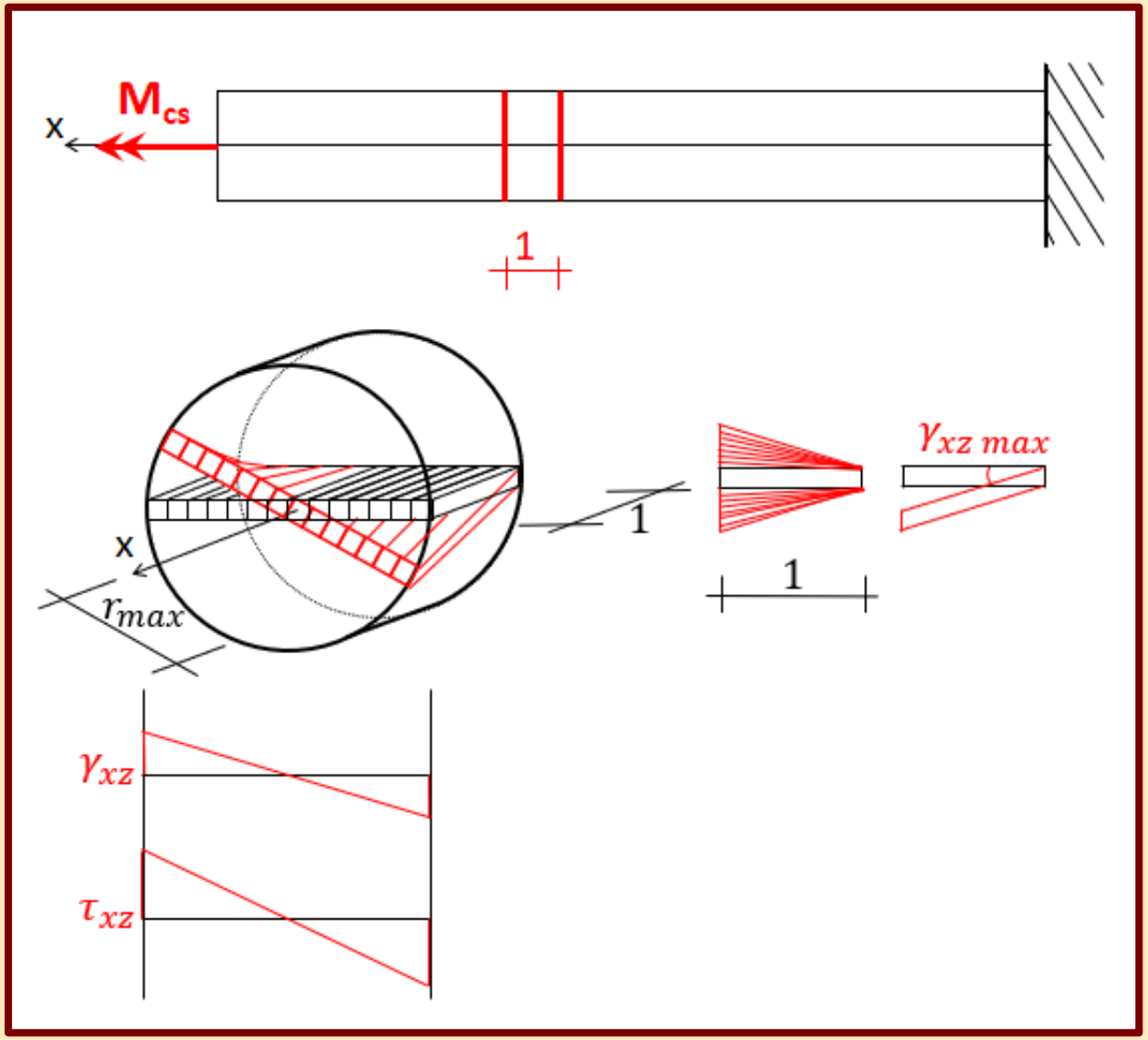


ANYAGEGYENLET

- alakváltozás ↔ feszültség
- Hooke-törvény: lineárisan rugalmas viselkedés
- Az anyagegyenlet alapján a km.-ben centrikus módon a súlyponttól mért, lineárisan növekvő szögtorzulás vele arányos, vagyis ugyancsak centrikusan lineáris változású nyírófeszültség eloszlást eredményez.

$$\tau_{x\,(y,z)} = G \cdot \gamma_{x\,(y,z)}$$

$$\tau_{x\,(y,z)} = G \cdot \kappa_{cs} \cdot r$$



- Normálfeszültség nem keletkezik a km.-ben.

$$\sigma_{x\,(y,z)} = E \cdot \varepsilon_{x\,(y,z)} \quad ; \quad \varepsilon_{x\,(y,z)} = 0 \;\rightarrow\; \sigma_{x\,(y,z)} = 0$$

EGYENSÚLYI EGYENLET

- feszültség ↔ igénybevétel
- A vizsgált elem egyensúlyát a nyomatéki igénybevétel és a fesz. ábra eredője biztosítja. (A nyomatéki igénybevétel a fesz. ábra eredőjeként is értelmezhető.)
- Az egyensúlyi (nyomatéki) egyenlet

$$\int_{(A)} \tau_{x\,(r)} \cdot r \cdot dA = M_{cs}$$

$$\int_{(A)} G \cdot \kappa_{cs} \cdot r \cdot r \cdot dA = M_{cs}$$

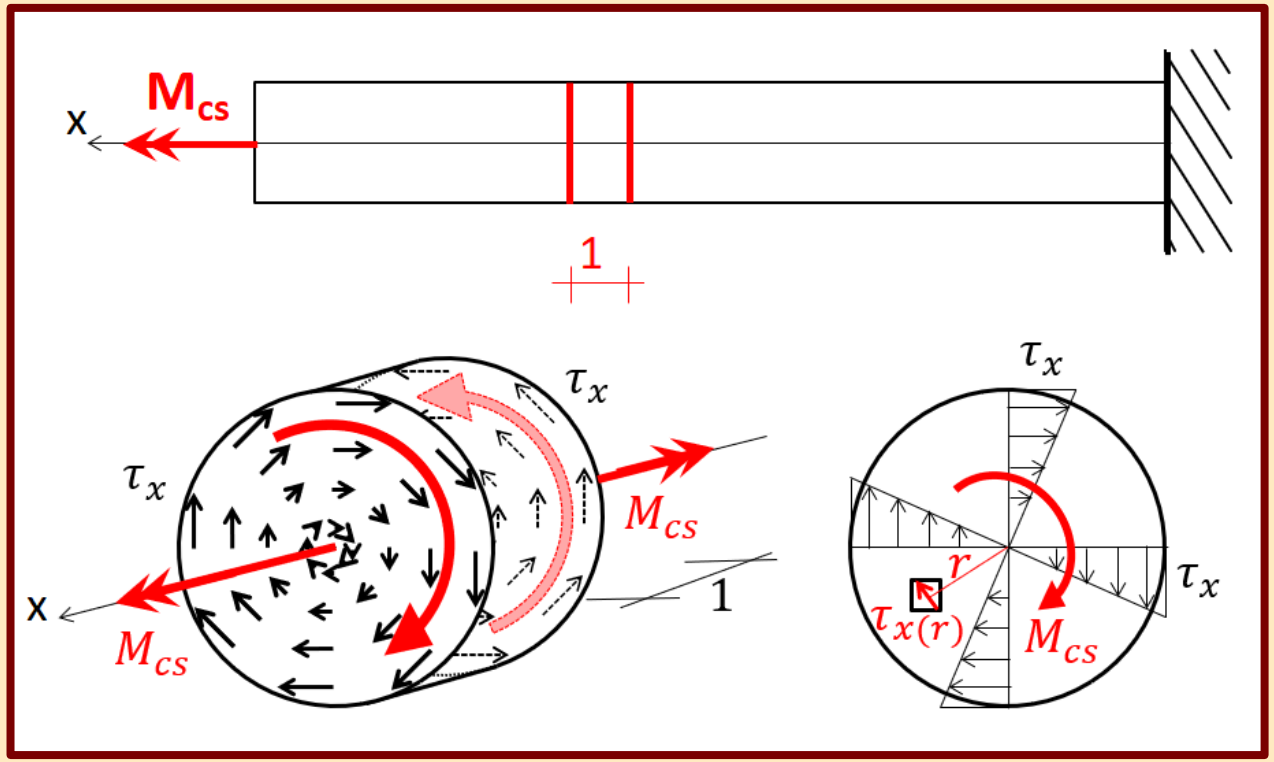
$$G \cdot \kappa_{cs} \int_{(A)} r^2 \cdot dA = M_{cs}$$

$$G \cdot \kappa_{cs} \cdot I_0 = M_{cs}$$

$$\kappa_{cs} = \frac{M_{cs}}{G \cdot I_0}$$

$$\tau_x = G \cdot \kappa_{cs} \cdot r = G \cdot \frac{M_{cs}}{G \cdot I_0} \cdot r$$

$$\tau_x = \frac{M_{cs}}{I_0} \cdot r$$



FESZÜLTSÉGSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA

- Kör km. egy pontjának feszültsége:

$$\tau_{Pxy} = \frac{M_{cs}}{I_0} \cdot r_P \quad ; \quad \tau_{Qxz} = \frac{M_{cs}}{I_0} \cdot r_Q$$

  - Az r_P és az r_Q a súlyponttól a P és a Q pontig mért távolság.

- Kör km. maximális feszültsége:

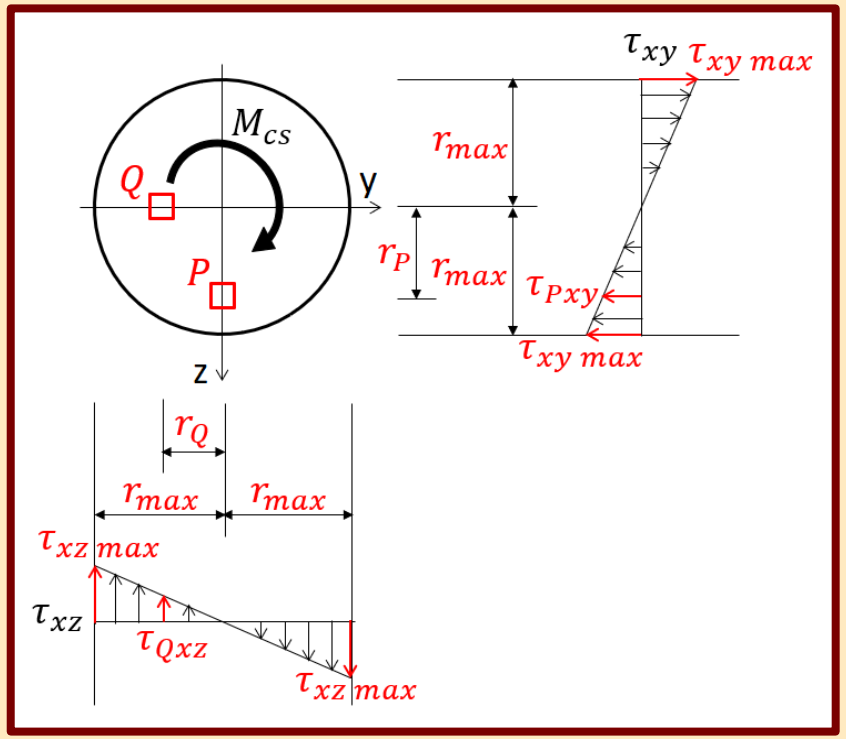
$$\tau_{x\,max} = \frac{M_{cs}}{I_0} \cdot r_{max}$$

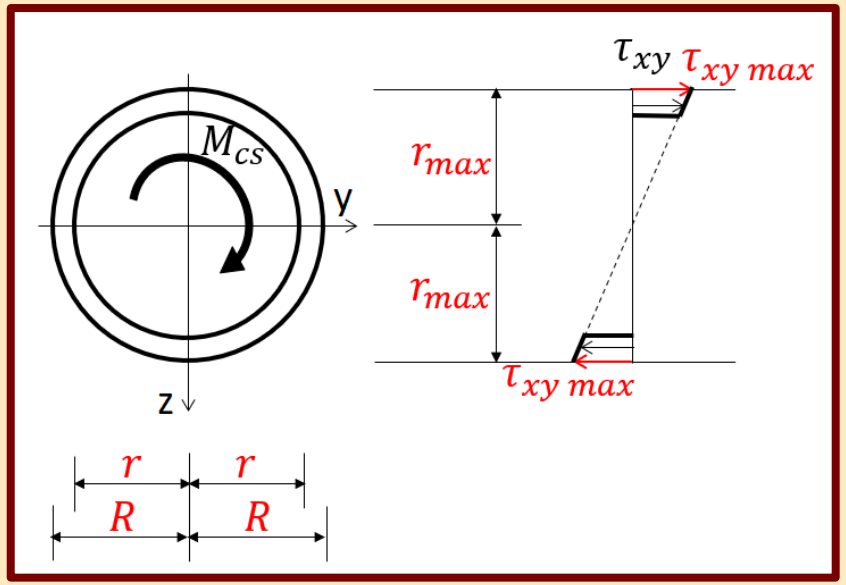
  - Az r_{max} a súlyponttól mért legnagyobb távolság.

- Körgyűrű km. maximális feszültsége:

$$\tau_{x\,max} = \frac{M_{cs}}{I_0} \cdot r_{max}$$

  - A poláris inercia (körgyűrű): $I_0 = \frac{(R^4 - r^4) \cdot \pi}{2}$





ALAKVÁLTOZÁSOK, ELMOZDULÁSOK MEGHATÁROZÁSA

- Fajlagos relatív elcsavarodás (egységnyi hosszúságú szakasz véglapjai közötti elcsavarodás, szögelfordulás):

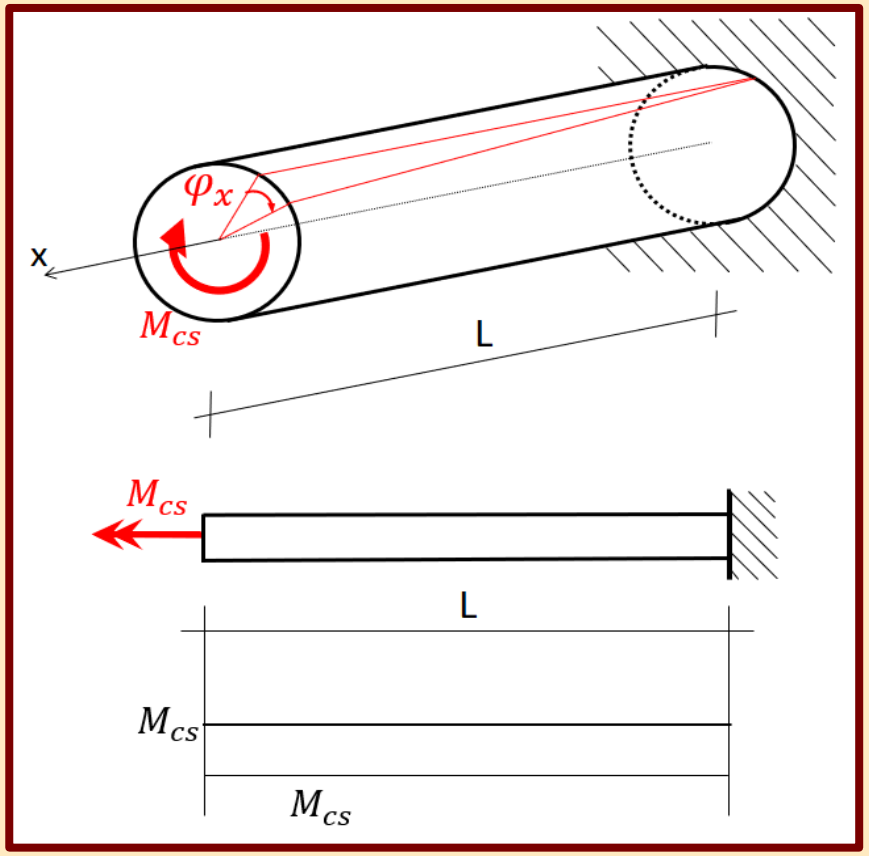
$$\kappa_{cs} = \frac{M_{cs}}{G \cdot I_0}$$

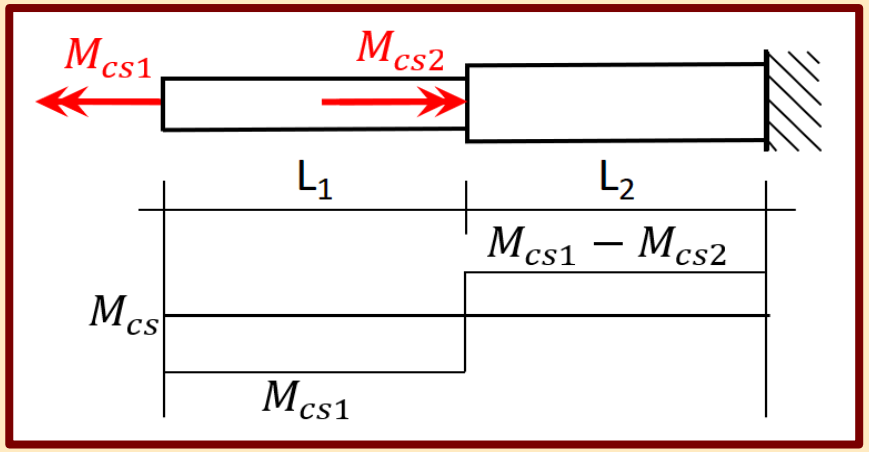
- Konzol tiszta csavarása esetén (egy szakasz)
  - a konzolvég elfordulása:

$$\varphi_x = \frac{M_{cs} \cdot L}{G \cdot I_0}$$

- Konzol tiszta csavarása esetén (több szakasz)
  - a konzolvég elfordulása:

$$\varphi_x = \frac{M_{cs1} \cdot L_1}{G_1 \cdot I_{01}} + \frac{(M_{cs1} - M_{cs2}) \cdot L_2}{G_2 \cdot I_{02}}$$

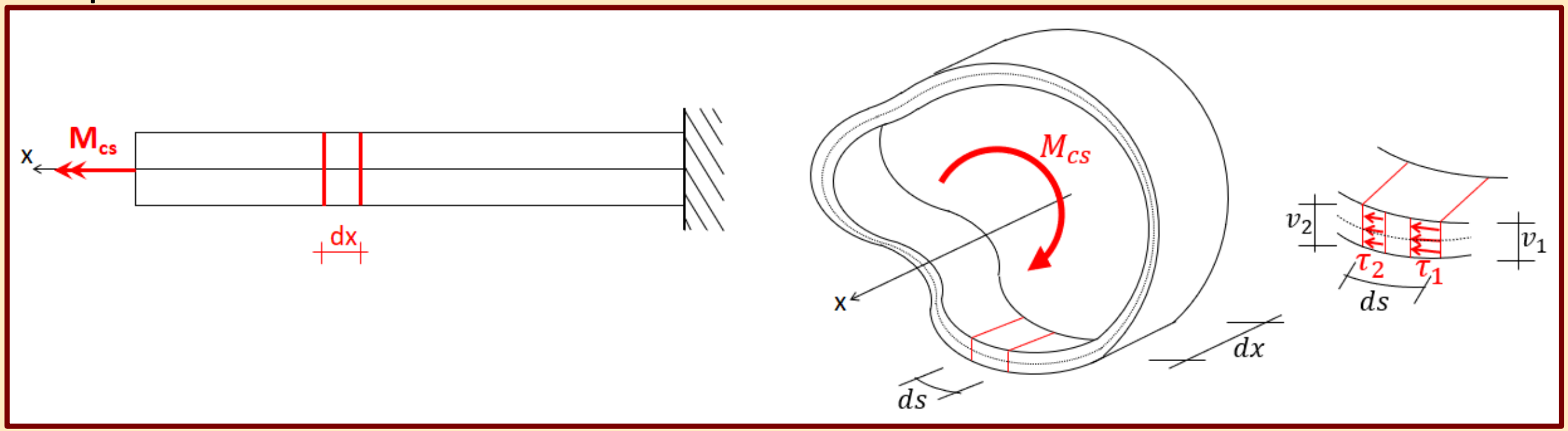




FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA VÉKONYFALÚ ZÁRT KERESZTMETSZETEK ESETÉN

SZÁMÍTÁSI FELTEVÉSEK

- A falvastagság kicsiny, lényeges kisebb a km. befoglaló méreteinél.
- A feszültség eloszlására geometriai és anyagegyenletek nélkül teszünk megállapítást. A falvastagság mentén állandónak vesszük a feszültségeloszlást.
- A feszültségek iránya párhuzamos mindenhol a falvastagság felében húzott középvonallal.

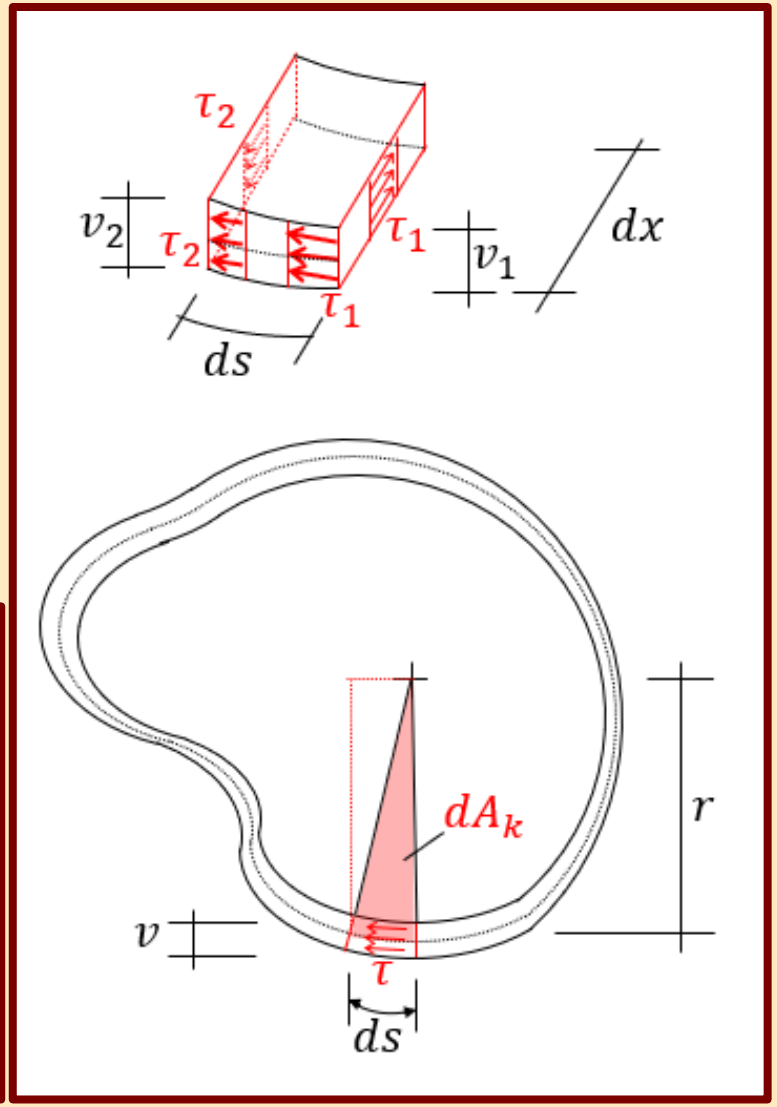


EGYENSÚLYI EGYENLETEK

- Vetületi egyenlet a dx hosszúságú elemből kivágott ds szélességű darabra x irányban. Az eltérő vastagságok mentén eltérő nyírófeszültségek alakulnak ki.

$$\tau_1 \cdot v_1 \cdot dx = \tau_2 \cdot v_2 \cdot dx$$
$$\tau_1 \cdot v_1 = \tau_2 \cdot v_2$$
$$\tau \cdot v = \acute{a}llandó$$

A τ·v szorzatot nyírófolyamnak nevezzük.

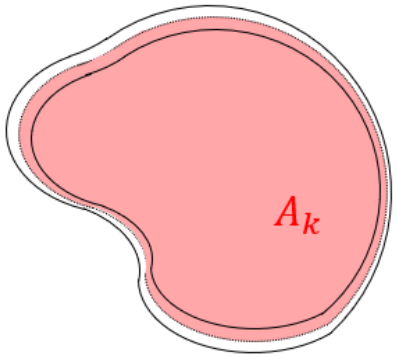


- Nyomatéki egyenlet a súlypontra: a km.-ben kialakuló nyírófeszültségek nyomatéka egyensúlyozza a rá ható csavarónyomatékot.

$$\int_{(A)} \tau \cdot v \cdot r \cdot ds = M_{cs}$$
$$\tau \cdot v \int_{(A)} 2 \cdot dA_k = M_{cs}$$
$$\tau \cdot v \cdot 2 \cdot A_k = M_{cs}$$

Bredt–képlet: $\tau = \dfrac{M_{cs}}{2 \cdot A_k \cdot v}$

A_k – *a falvastagság felében húzott* középvonal által határolt terület.



FESZÜLTSÉGSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA

- Zárt szelvény egy pontjának feszültsége:

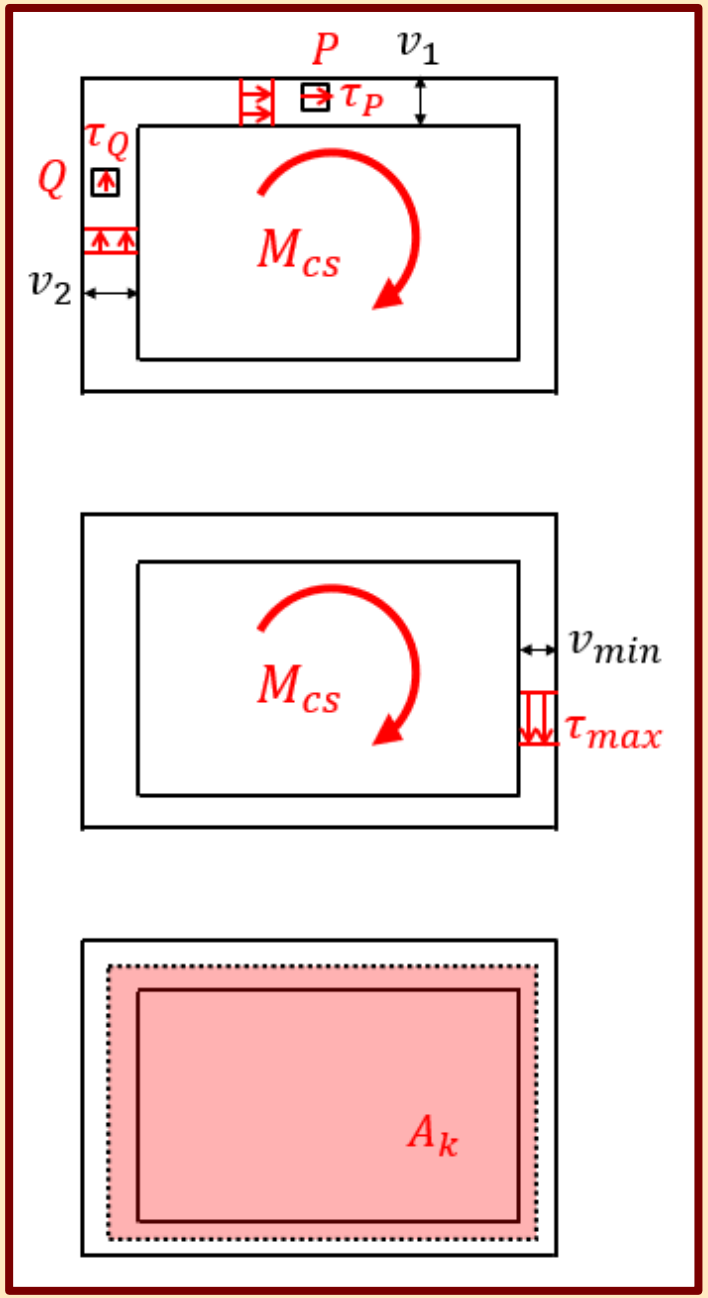
$$\tau_P = \frac{M_{cs}}{2 \cdot A_k \cdot v_1}$$

$$\tau_Q = \frac{M_{cs}}{2 \cdot A_k \cdot v_2}$$

  - A v_1 és a v_2 a P és a Q pontoknál mért falvastagság.

- Zárt szelvény maximális feszültsége: a km. legkisebb falvastagsága (v_{min}) mentén elhelyezkedő pontokban alakul ki.

$$\tau_{max} = \frac{M_{cs}}{2 \cdot A_k \cdot v_{min}}$$



FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA DERÉKSZÖGŰ NÉGYSZÖG KERESZTMETSZETEK ESETÉN

- Derékszögű négyszög km.-ű rúd csavarása esetén hossztengely irányú alakváltozások is ébrednek (öblösödés), ha azok kialakulása nem gátolt.
- A dualitás miatt a sarokpontokban nem keletkezik nyírófeszültség.
- A legnagyobb nyírófeszültség a hosszabbik oldal felében keletkezik, amely az oldalméretek arányától függ.

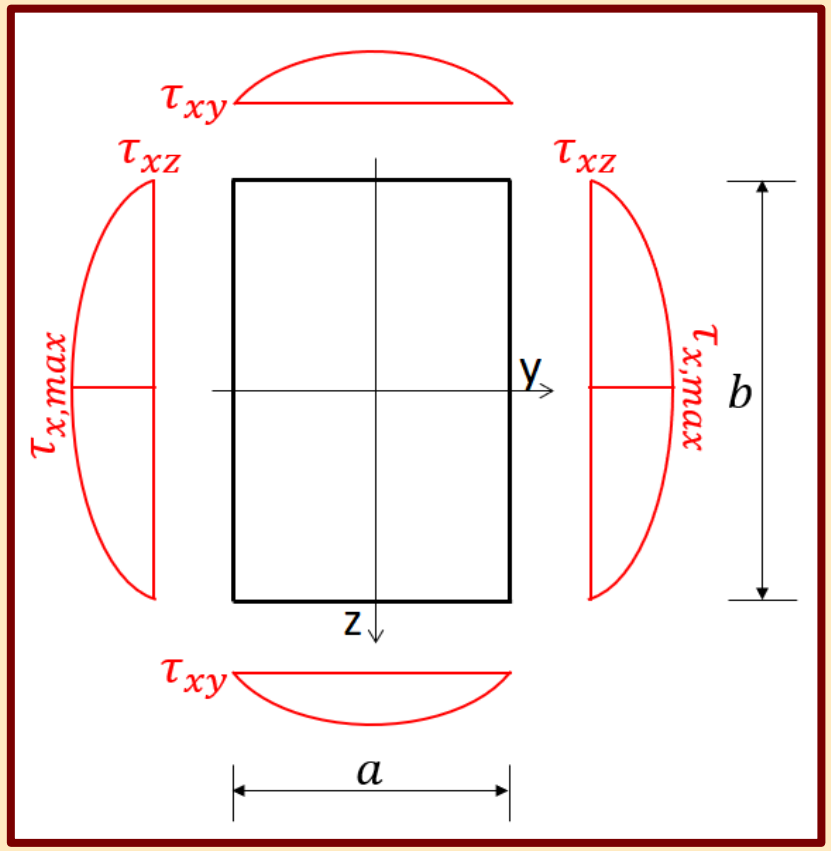
$$\tau_{max} = \frac{M_{cs}}{a^2 \cdot b} \cdot (3 + 1{,}8 \cdot \frac{a}{b})$$

- Ha az oldalarány (a/b) közelíti a 0-t (vékony lemez):

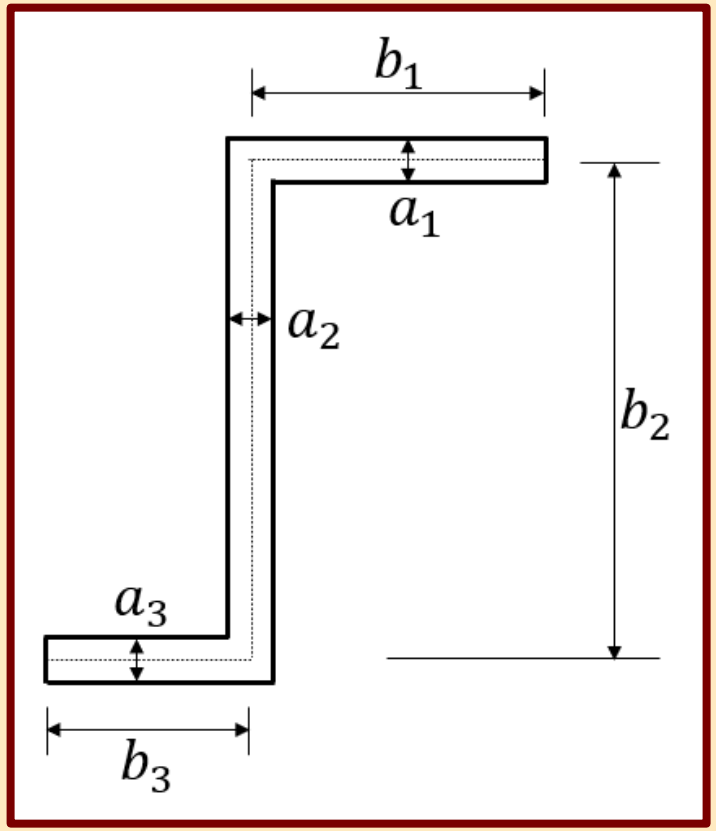
$$\tau_{max} = \frac{3 \cdot M_{cs}}{a^2 \cdot b} = \frac{M_{cs}}{I_{cs}} \cdot a$$

- A csavaró inercia vékony lemez esetén:

$$I_{cs} = \frac{a^3 \cdot b}{3}$$



FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA VÉKONYFALÚ NYITOTT KERESZTMETSZETEK ESETÉN



- A vékonyfalú nyitott szelvények előnytelenül működnek csavarással szemben, lényegesen kisebb a teherbírásuk a zárt szelvényekhez képest.
- Vékonyfalú nyitott szelvény egy pontjának feszültsége, valamint maximális feszültsége levezetés nélkül:

$$\tau = \frac{M_{cs}}{I_{cs}} \cdot a$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{cs}}{I_{cs}} \cdot a_{max}$$

- A felhasználandó csavarási inerciát a középvonal mentén felbontott részek hosszabbik oldalára felírt inerciáinak összegéből állítjuk elő.

$$I_{cs} = \frac{\sum {a_i}^3 \cdot b_i}{3}$$

Tartószerkezetek mechanikája II.

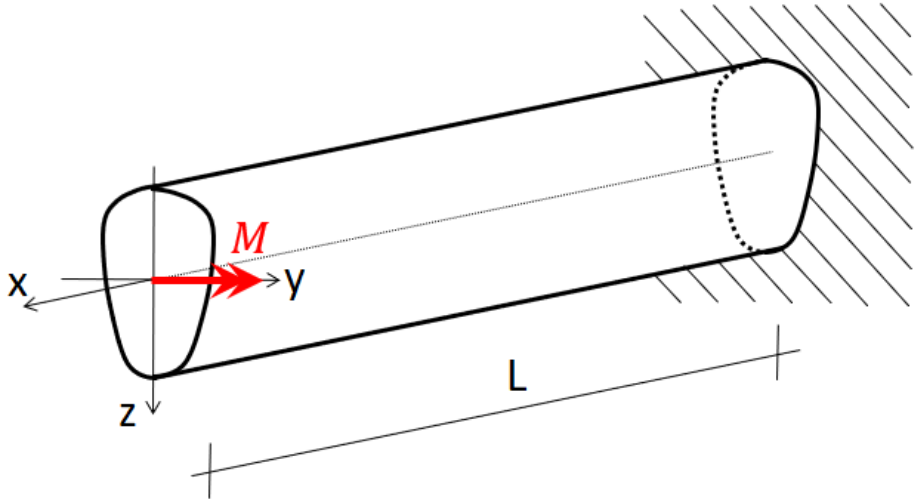
9.

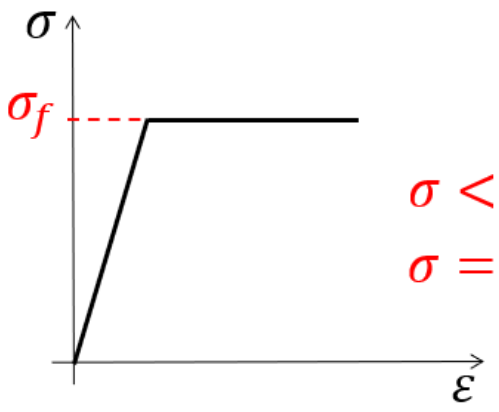
Feszültségszámítás: rugalmas-képlékeny hajlítás

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

A RUGALMAS-KÉPLÉKENY HAJLÍTÁS ÉRTELMEZÉSE, FELTEVÉSEI

- A km.-ek és a tartók hajlítással szembeni rugalmas és képlékeny viselkedését vizsgáljuk növekvő nyomatékkal szemben.
- Szimmetrikus km.-eket vizsgálunk egyenes hajlítás (M vektor a km. főirányába esik) hatására.
- Érvényesek a Bernoulli-Navier feltételezések.
- Az anyagi viselkedést lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékenynek minősítjük.





$\sigma < \sigma_f$ – *lineárisan rugalmas*

$\sigma = \sigma_f$ – *tökéletesen képlékeny*

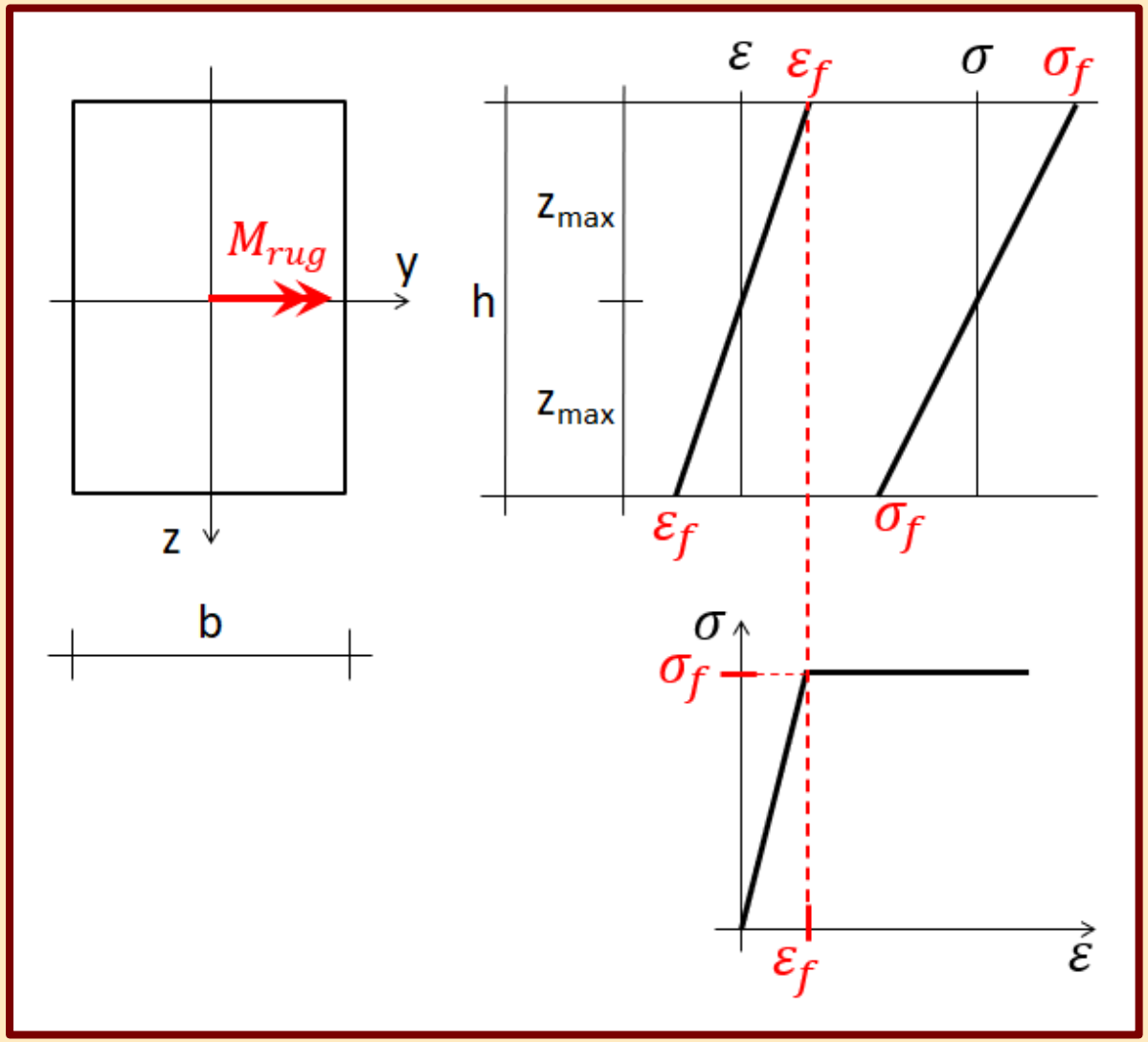
RUGALMAS ÁLLAPOT, RUGALMAS TEHERBÍRÁS

- Azt a nyomatékot, amely hatására a szélsőszál-feszültségek elérik a folyáshatárt (rugalmas és képlékeny viselkedés határát), rugalmas teherbírásnak nevezzük.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{rug}}{I_y} \cdot z_{max} = \sigma_f$$

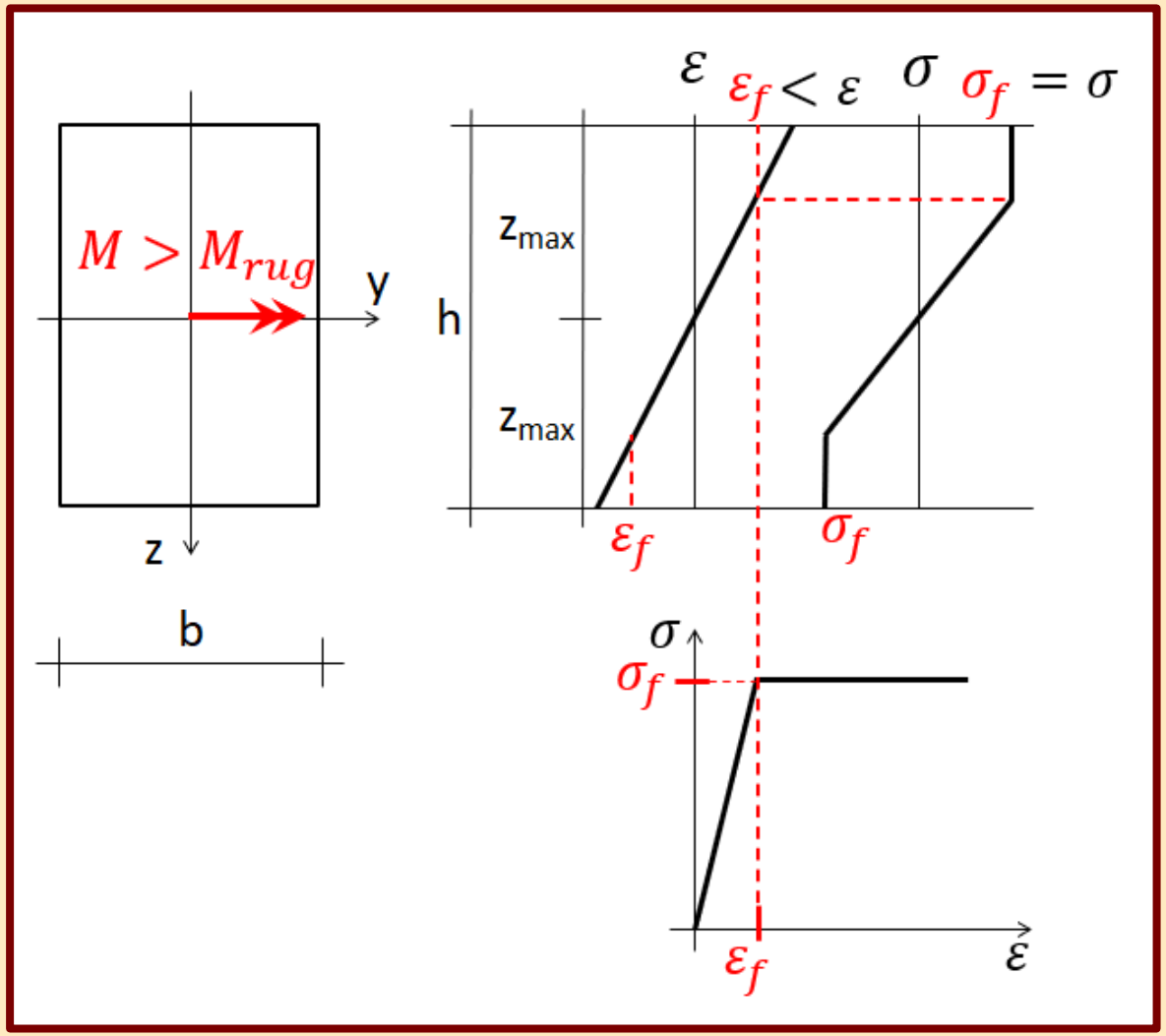
$$M_{rug.} = \frac{I_y}{z_{max}} \cdot \sigma_f$$

$$M_{rug.} = W_{y,rug.} \cdot \sigma_f$$



A RUGALMAS-KÉPLÉKENY ÁLLAPOT

- Ha a nyomatékot a rugalmas teherbírásnál nagyobbra növeljük, a km. rugalmas-képlékeny állapotba kerül. A km. szélső tartománya megfolyik.
- A km. szélső pontjai közül, ahol az $\varepsilon > \varepsilon_f$, a feszültségek megegyeznek a folyáshatárral, $\sigma = \sigma_f$. Ezen tartomány képlékeny állapotban van, itt konstans a feszültségeloszlás.
- A km. pontjai közül, ahol az $\varepsilon < \varepsilon_f$, a feszültségek kisebbek a folyáshatárnál, $\sigma < \sigma_f$. Ezen tartomány rugalmas állapotban van, itt lineáris a feszültségeloszlás a Hooke-törvénynek megfelelően.



A KÉPLÉKENY ÁLLAPOT, KÉPLÉKENY TEHERBÍRÁS

- Azt a nyomatékot, amely hatására a km. valamennyi pontja eléri a folyáshatárt, képlékeny teherbírásnak nevezzük.
- Vetületi egyenlet:

$$\int_{(A_1)} \sigma_f \cdot dA = \int_{(A_2)} \sigma_f \cdot dA$$

$$A_1 = A_2$$

A képlékeny semleges tengely területileg felezi a km.-t.

- Nyomatéki egyenlet:

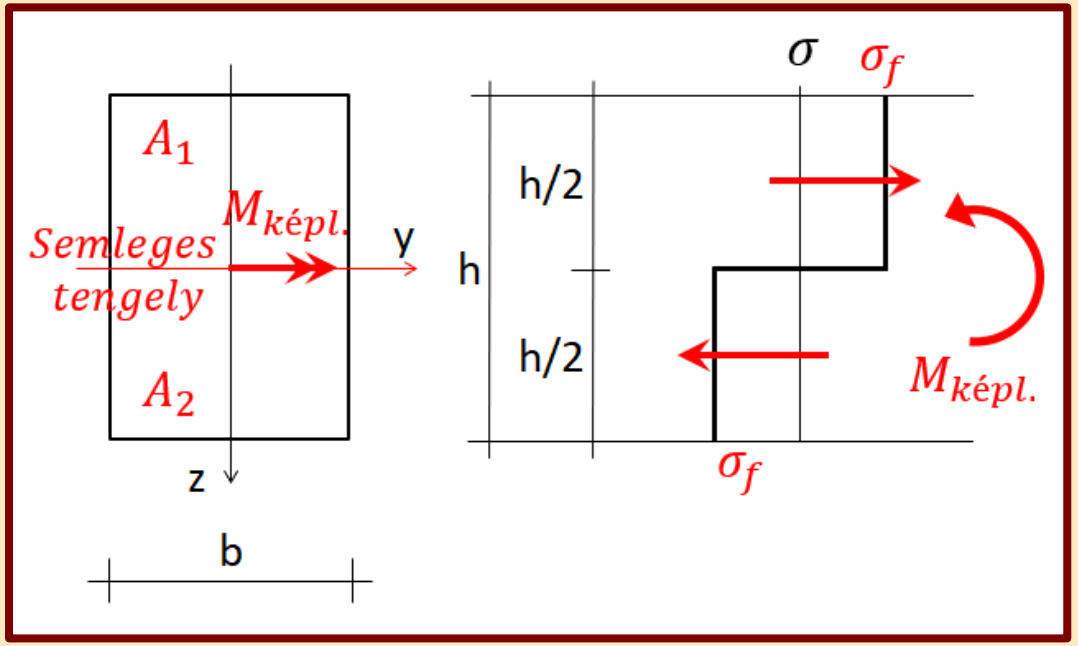
$$\int_{(A_1)} r \cdot \sigma_f \cdot dA + \int_{(A_2)} r \cdot \sigma_f \cdot dA = M_{képl.}$$

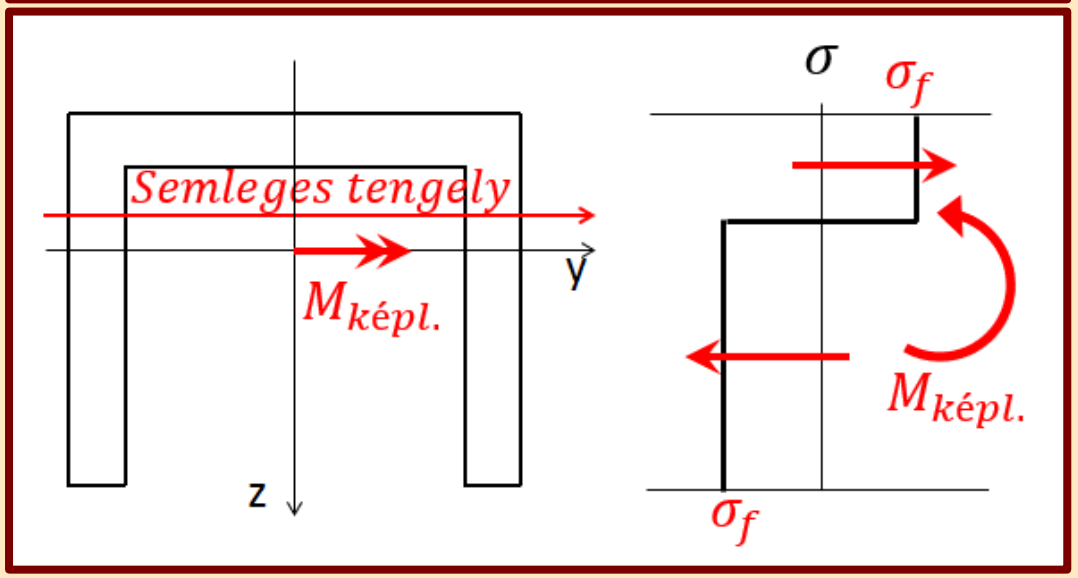
$$\sigma_f \int_{(A_1)} r \cdot dA + \sigma_f \int_{(A_2)} r \cdot dA = M_{képl.}$$

$$\sigma_f \cdot S_{y,A_1} + \sigma_f \cdot S_{y,A_2} = M_{képl.}$$

$$2 \cdot \sigma_f \cdot S_{y,fél} = M_{képl.}$$

Az $S_{y,fél}$ a félkeresztmetszet statikai nyomatéka az y tengelyre.





A RUGALMAS TEHERBÍRÁS EGYENSÚLYI EGYENLETTEL

- Az egyensúlyi egyenlet közvetlen felírásával határozzuk meg a rugalmas teherbírást, nem az egyenes hajlítás (Navier-formula) képletével.
- Vetületi egyenlet:

$$\sum F_i = N - N = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{2} \cdot \sigma_f - \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{2} \cdot \sigma_f = 0$$

- Nyomatéki egyenlet:

$$\sum M_{yi} = N \cdot k_{rug.} + N \cdot k_{rug.} = M_{rug.}$$

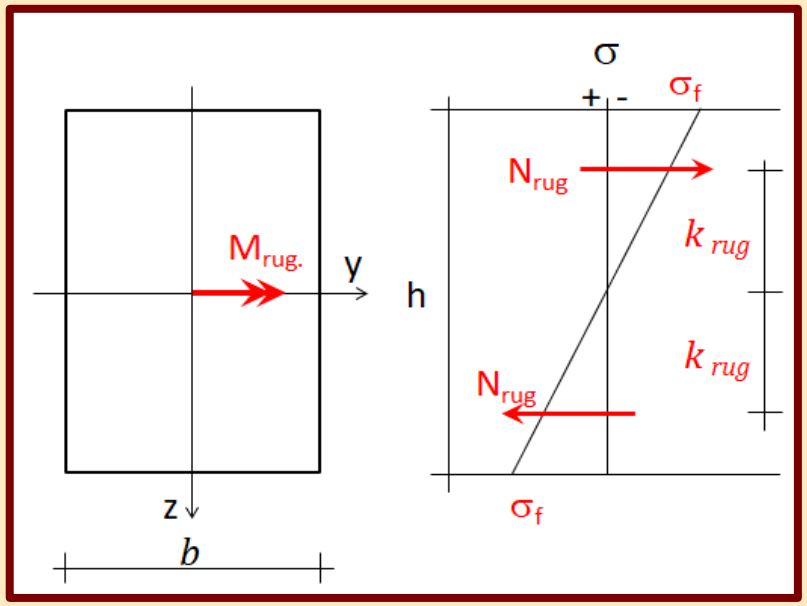
$$\sum M_{yi} = 2 \cdot N \cdot k_{rug.} = M_{rug.}$$

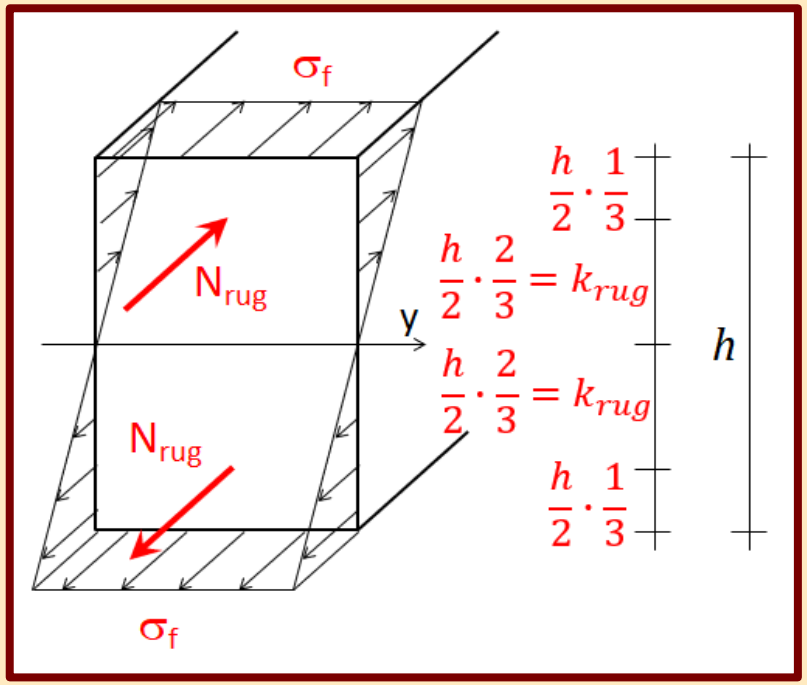
$$\sum M_{yi} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{2} \cdot \sigma_f \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} = M_{rug.}$$

$$\sum M_{yi} = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \sigma_f = M_{rug.}$$

- A rugalmas hajlítás képletével:

$$W_{y,rug.} \cdot \sigma_f = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \sigma_f = M_{rug.}$$





A KÉPLÉKENY TEHERBÍRÁS EGYENSÚLYI EGYENLETTEL

- Az egyensúlyi egyenlet közvetlen felírásával határozzuk meg a képlékeny teherbírást.
- Vetületi egyenlet:

$$\sum F_i = N - N = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \sigma_f - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \sigma_f = 0$$

- Nyomatéki egyenlet:

$$\sum M_{yi} = N \cdot k_{képl.} + N \cdot k_{képl.} = M_{képl.}$$

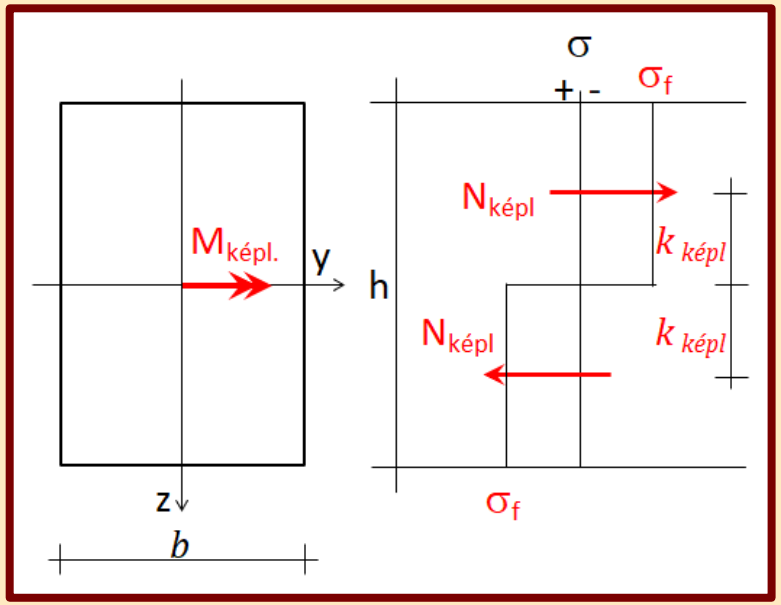
$$\sum M_{yi} = 2 \cdot N \cdot k_{képl.} = M_{képl.}$$

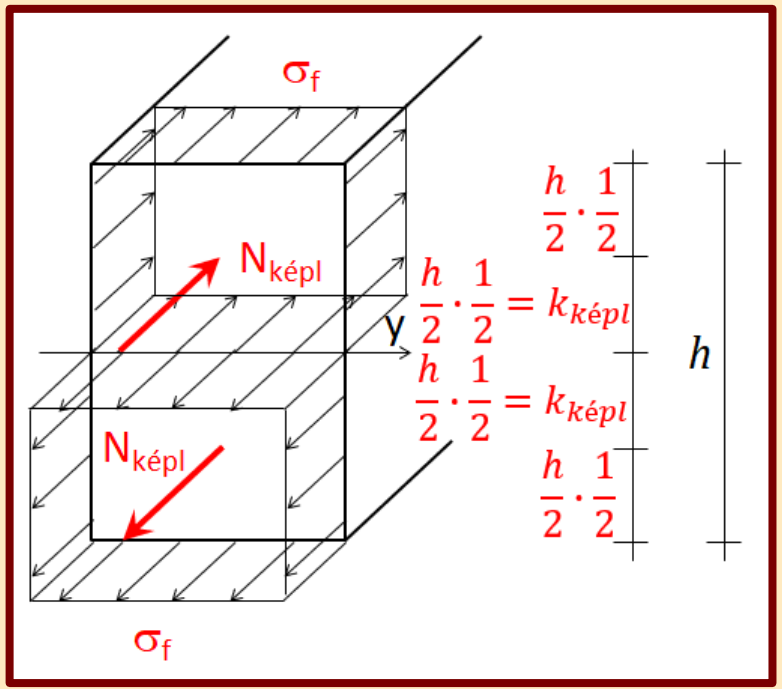
$$\sum M_{yi} = 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} \cdot \sigma_f \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} = M_{képl.}$$

$$\sum M_{yi} = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_f = M_{képl.}$$

- A képlékeny teherbírás képletével:

$$2 \cdot \sigma_f \cdot S_{y,fél} = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_f = M_{képl.}$$





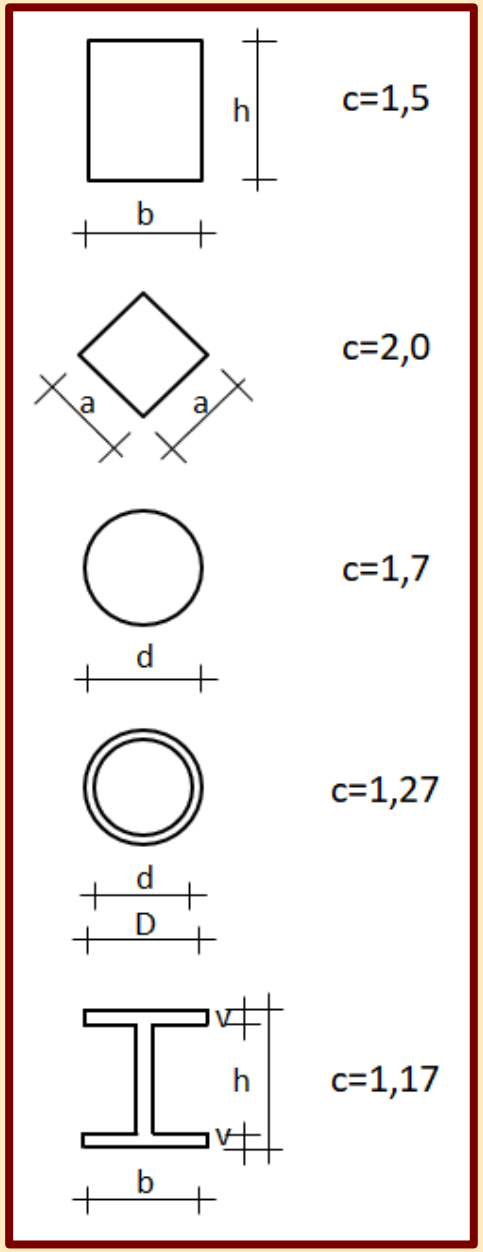
A KERESZTMETSZET KÉPLÉKENY TÖBLETTEHERBÍRÁSA

- A keresztmetszet képlékeny és rugalmas nyomatéki teherbírásának arányát fejezi ki a képlékeny többletteherbírás. Megmutatja, milyen mértékben terhelhető a km. a folyás kialakulásától a törés bekövetkezéséig.
- Adott keresztmetszetre jellemző adat. Egyes km.-ek képlékeny tartaléka eltér egymástól.

$$c = \frac{M_{képl.}}{M_{rug.}}$$

- Téglalap km. képlékeny többletteherbírása:

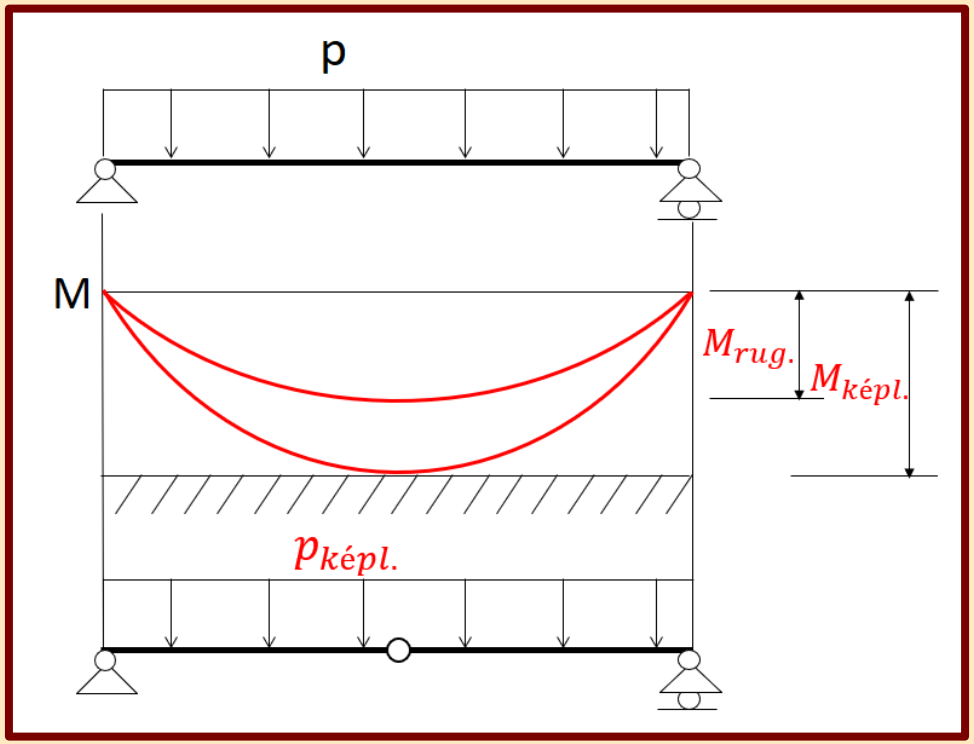
$$c = \frac{M_{képl.}}{M_{rug.}} = \frac{\frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_f}{\frac{b \cdot h^2}{6} \cdot \sigma_f} = 1{,}5$$



HATÁROZOTT TARTÓK KÉPLÉKENY TARTALÉKA

- A teher növelésével M_{max} eléri $M_{rug.}$ értékét. Ebben a km.-ben a szélső szálak megfolynak, a tartó rugalmas teherbírása kimerül.
- A teher további növelésével M_{max} eléri $M_{képl.}$ értékét, a teljes km. képlékennyé válik, a tartó törési (képlékeny) teherbírása is kimerül.

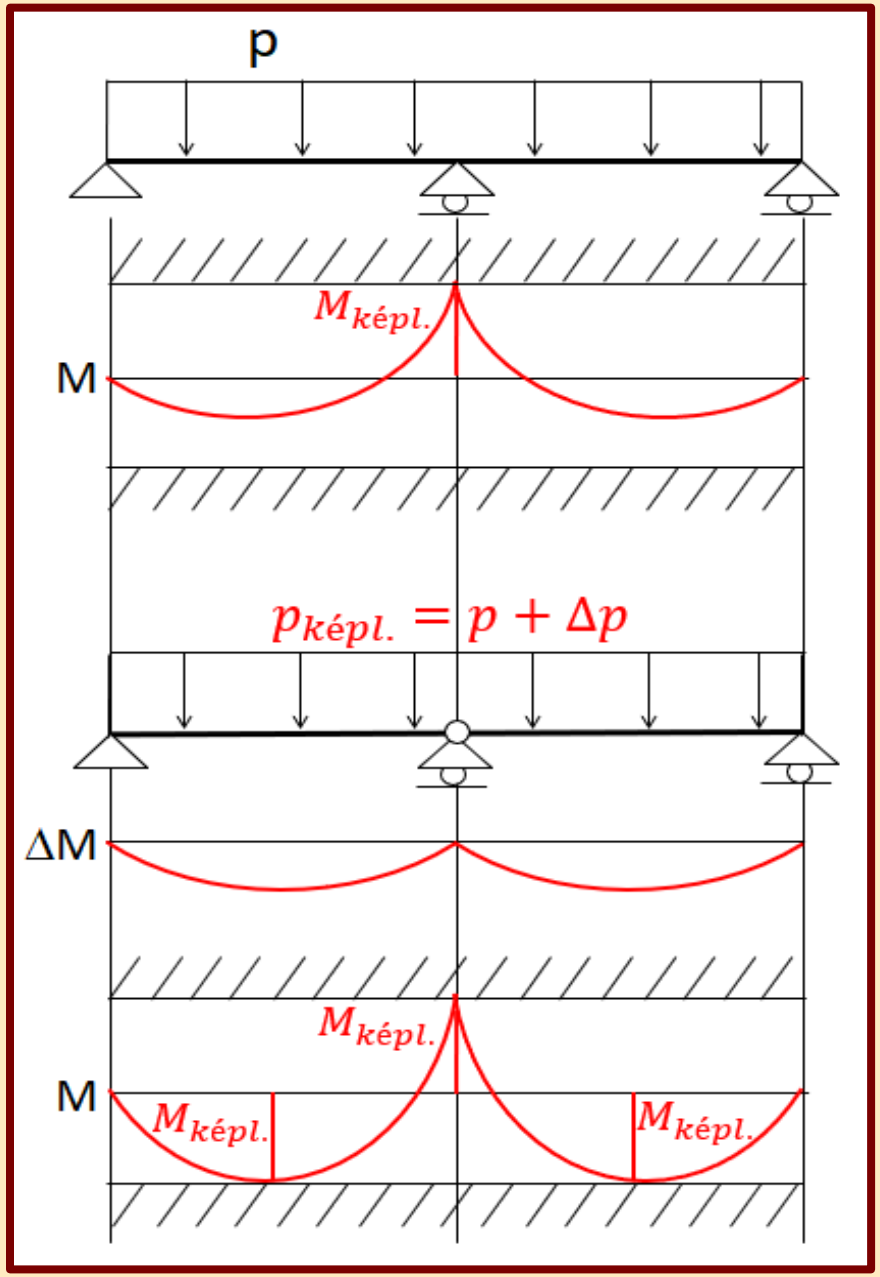
$$M_{max} = M_{képl.} = \frac{p_{képl.} \cdot l^2}{8} \rightarrow p_{képl.} = \frac{M_{képl.} \cdot 8}{l^2}$$



- Ezt a km.-t képlékeny csuklónak minősítjük, tetszőlegesen nagy elfordulás jöhet benne létre, további nyomaték elviselésére nem képes. A tartó a csukló hatására labilissá válik.
- Statikailag határozott tartók képlékeny tartaléka tehát csak a km.-ek képlékeny többletteherbírásából adódik.

HATÁROZATLAN TARTÓK KÉPLÉKENY TARTALÉKA

- Statikailag határozatlan tartók a határozatlanság fokának megfelelő számú többletmerevséggel rendelkeznek. Egy képlékeny csukló ezt a merevséget eggyel csökkenti. A csukló kialakulása után a teher tovább növelhető, további km. válik képlékennyé (csuklóvá). A határozatlanság fokával megegyező számú képlékeny csukló alakulhat ki a tartó tönkremeneteléig (labilissá válásáig).
- Statikailag határozatlan tartók képlékeny tartaléka tehát a km.-ek, valamint a tartó (határozatlanságából adódó) képlékeny többletteherbírásából adódik össze.



Tartószerkezetek mechanikája II.

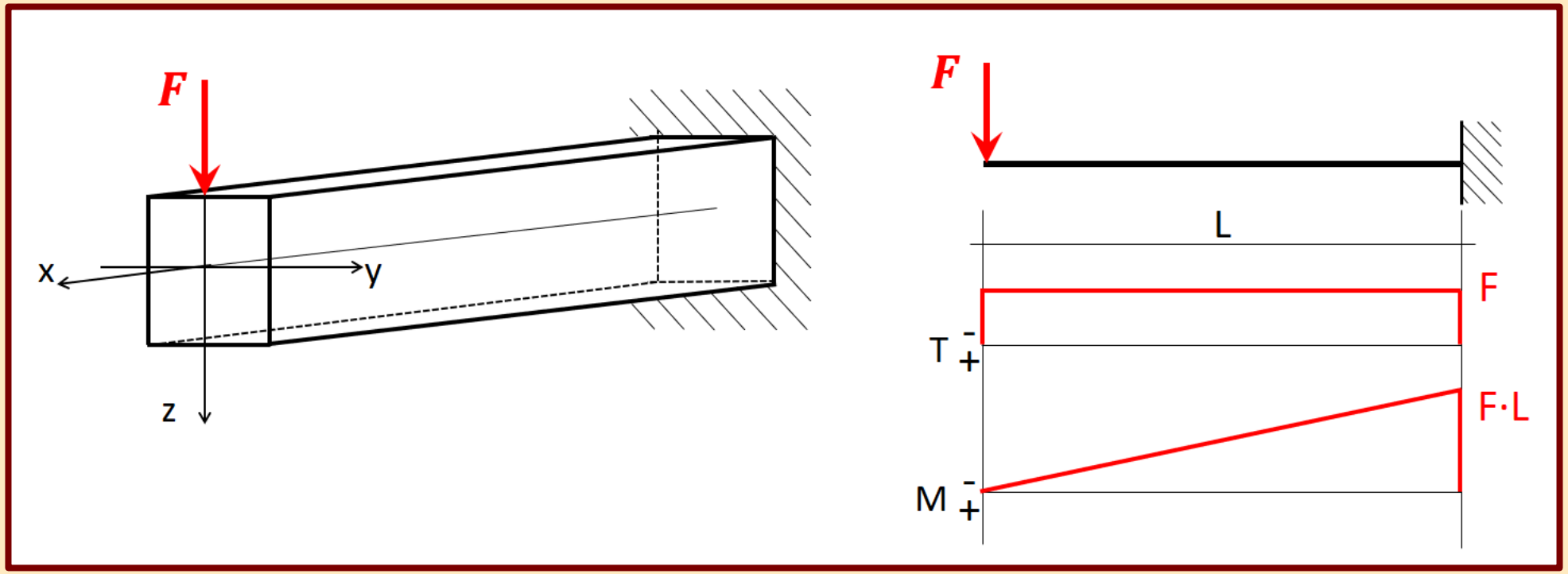
10.

Feszültségszámítás: hajlítással egyidejű nyírás

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

A HAJLÍTÁSSAL EGYIDEJŰ NYÍRÁS ÉRTELMEZÉSE

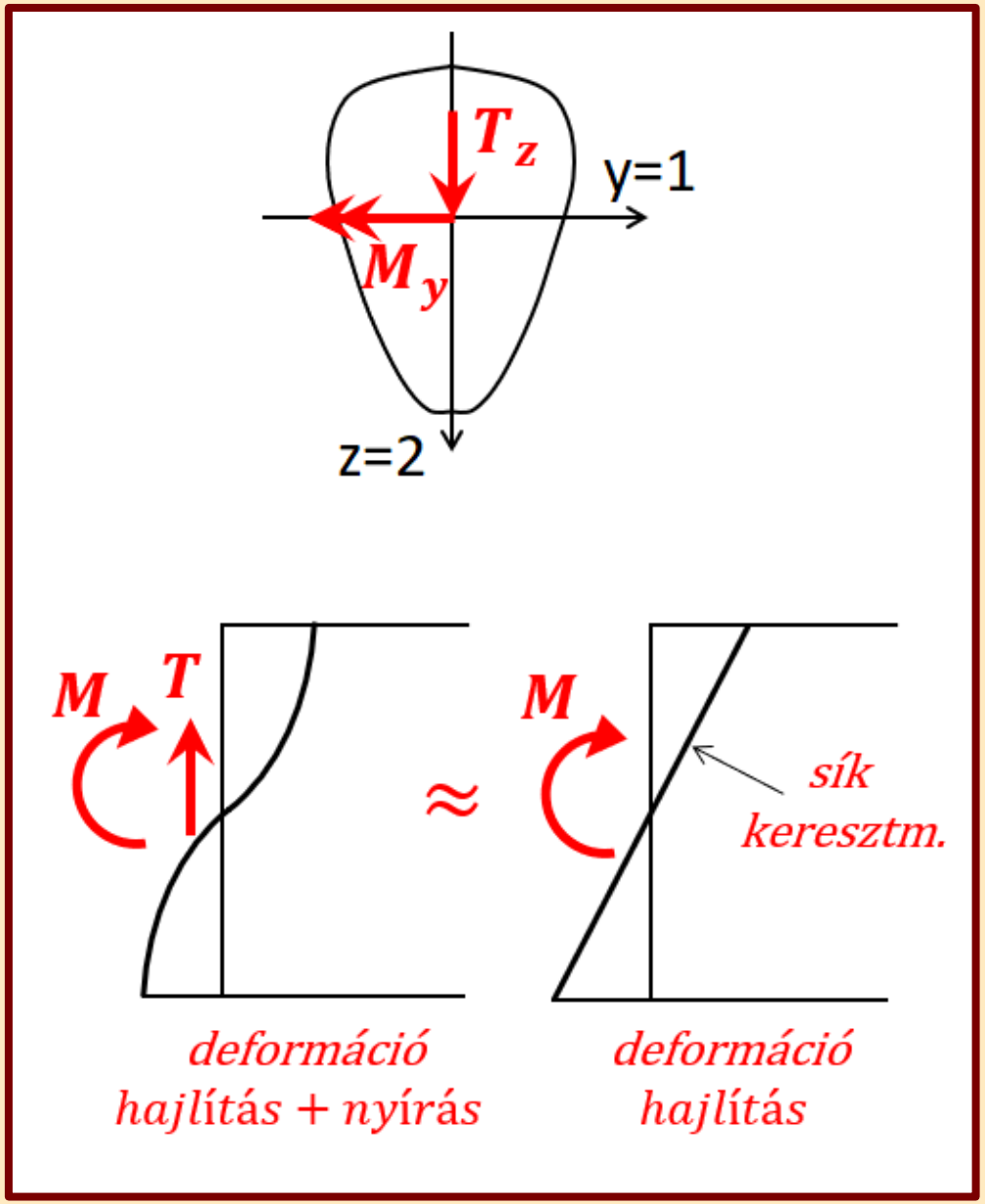
- Ha a keresztmetszetekben egyidejűleg nyíróerő és hajlítónyomaték működik, akkor a rúdelem olyan összetett igénybevételnek van kitéve, amelyet hajlítással egyidejű nyírásnak nevezünk.
- A nyíróerő és a hajlítónyomaték matematikailag összefüggő mennyiségek.
- A tartó hossztengelyére merőleges erő a leggyakoribb terhelés, így a hatására kialakuló hajlítással egyidejű nyírás a leggyakoribb igénybevétel összetétel.



PÉLDÁK HAJLÍTÁSSAL EGYIDEJŰ NYÍRÁSRA

A HAJLÍTÁSSAL EGYIDEJŰ NYÍRÁS FELTEVÉSEI

- Szimmetrikus keresztmetszetű tartókat vizsgálunk. A teher a tartó szimmetriasíkjába esik, a nyíróigénybevétel pedig a keresztmetszet szimmetriatengelyébe.
- A hajlítónyomaték vektora a km. egyik főirányába esik (egyenes hajlítás).
- A Bernoulli-Navier hipotézis közelítőleg fenntartható. A nyíróerő következtében keletkező szögtorzulások miatt a km.-ek nem maradnak síkok. A hajlítás hatása viszont sokkal jelentősebb, ezért az ahhoz tartozó alakváltozást csak kissé módosítja a nyírás, a sík km. feltételezése megmarad.



FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA
KIINDULÁSI ÖSSZEFÜGGÉSEK

- A nyíróerő és a hajlítónyomaték közötti differenciális kapcsolat:

$$T_{z(x)} = \frac{dM_{y(x)}}{dx}$$

- Az egyenes hajlítás hatására kialakuló km.-i feszültségek eloszlása jó közelítéssel továbbra is lineárisnak vehető, a feszültségek számítása is azonos az eddigiekkel:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

- A hajlítónyomaték hatására továbbra is csak normálfeszültség, a nyíróerő hatására továbbra is csak nyírófeszültség ébred a km.-ben.
- A nyírófeszültségek dualitása érvényben van, vagyis a km.-i függőleges nyírófeszültségek mellett velük megegyező értékű vízszintes síkban működő nyírófeszültségek (csúsztatófeszültségek) is ébrednek.

EGYENSÚLYI EGYENLET

- A rúdelem dx hosszúságú szelete elkülönített darabjának egyensúlya:

$$N' + dN' = dH + N'$$

$$\int_{(A')} (\sigma_x + d\sigma_x) \cdot dA = \tau_{zx} \cdot b \cdot dx + \int_{(A')} \sigma_x \cdot dA$$

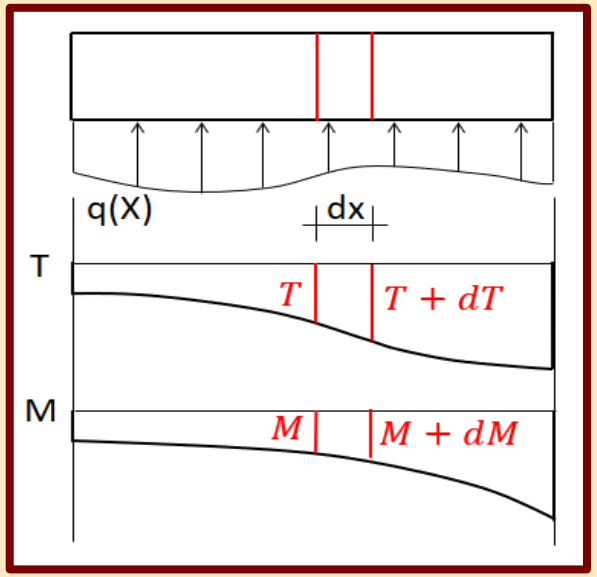
$$\int_{(A')} \sigma_x \cdot dA + \int_{(A')} d\sigma_x \cdot dA = \tau_{zx} \cdot b \cdot dx + \int_{(A')} \sigma_x \cdot dA$$

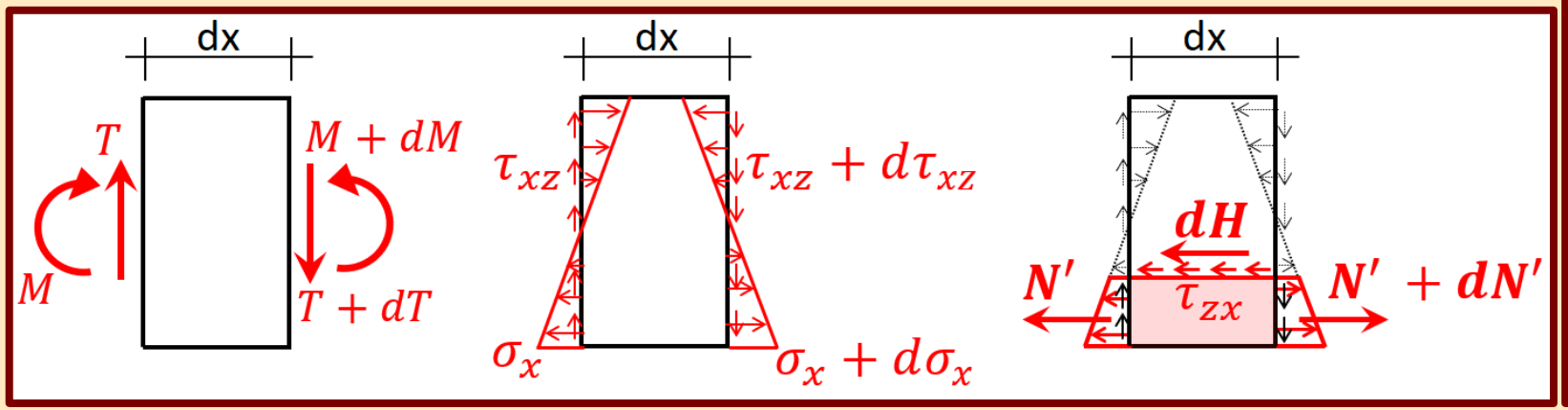
$$\int_{(A')} d\sigma_x \cdot dA = \tau_{zx} \cdot b \cdot dx$$

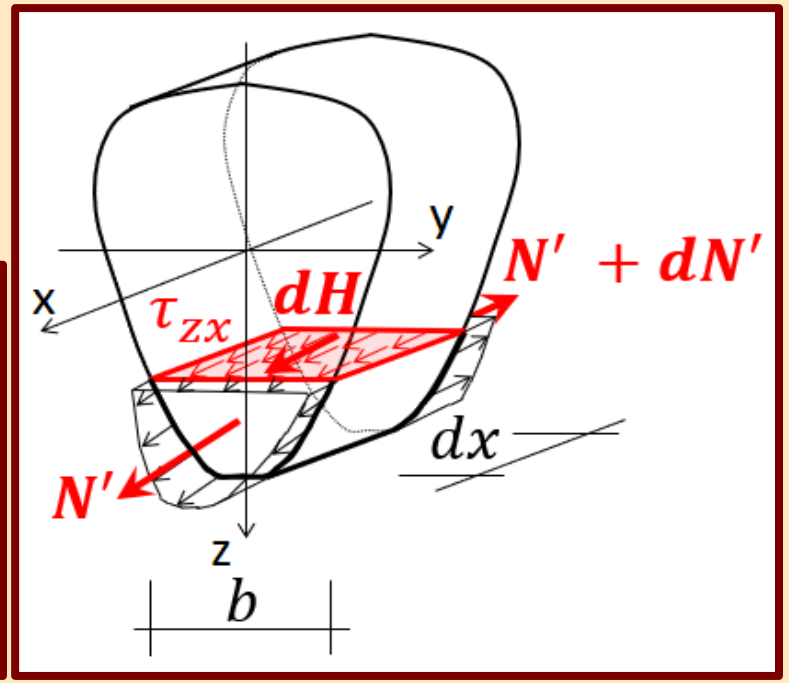
$$\int_{(A')} \frac{dM_y}{I_y} \cdot z \cdot dA = \tau_{zx} \cdot b \cdot dx$$

$$\frac{dM_y}{dx \cdot I_y \cdot b} \int_{(A')} z \cdot dA = \tau_{zx}$$

$$\frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot b} = \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (Zsuravszkij - képlet)$$







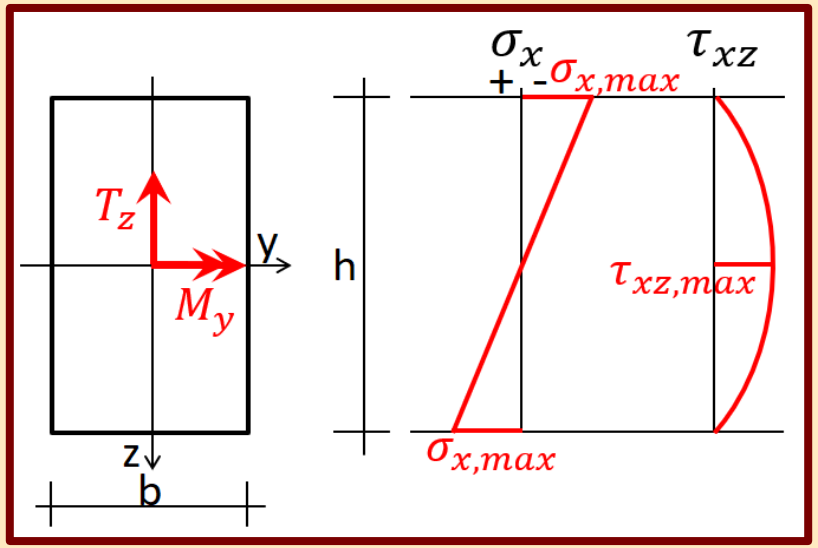
TÉGLALAP KERESZTMETSZET FESZÜLTSÉGEI

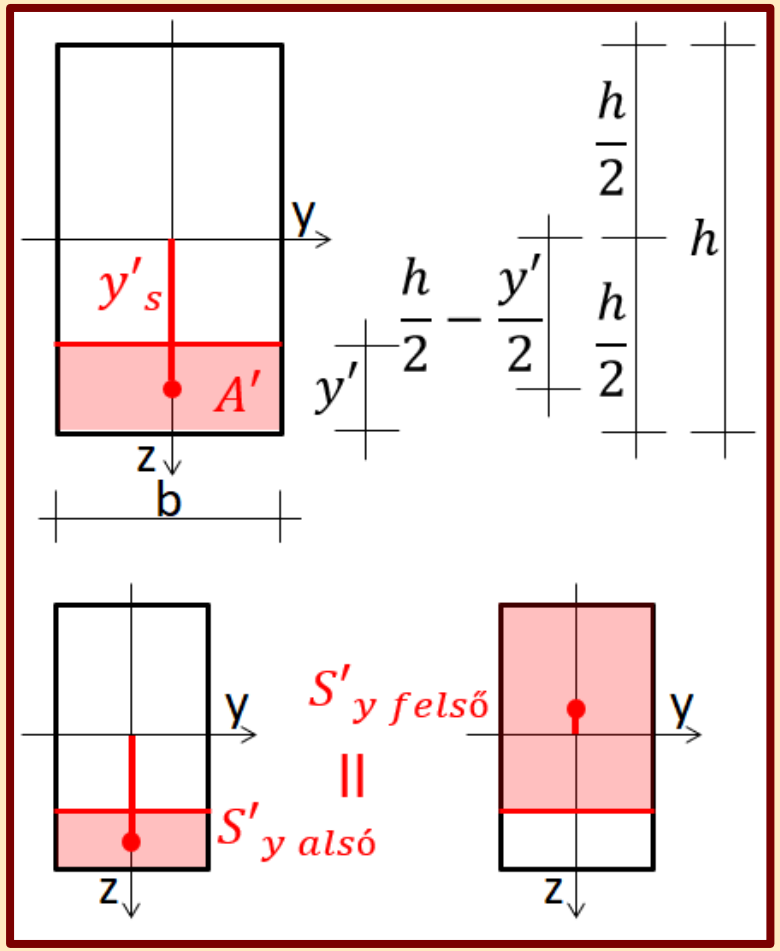
- Hajlítás

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

- Nyírás

$$\tau_{zx} = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot b}$$





- Az elcsúszni akaró rész statikai nyomatéka:

$$S'_y = A' \cdot y'_s = b \cdot y' \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{y'}{2}\right) = \frac{b \cdot h \cdot y' - b \cdot y'^2}{2}$$

A τ függvény parabolikus változását eredményezi.
A km. alsó és felső szélén zérus az értéke (és a τ is).
Az alsó és a felső rész bármelyikének statikai nyomatéka számolható. A statikai nyomaték (és a τ) maximuma a súlypont magasságában van.

- A b a vizsgált magasságban a km. vízszintes anyagi szélessége. (Amely mentén a két rész egymáson elcsúszni szándékozik.)

VASTAGFALÚ KERESZTMETSZETEK NYÍRÓFESZÜLTSÉGE

- „I” szelvény

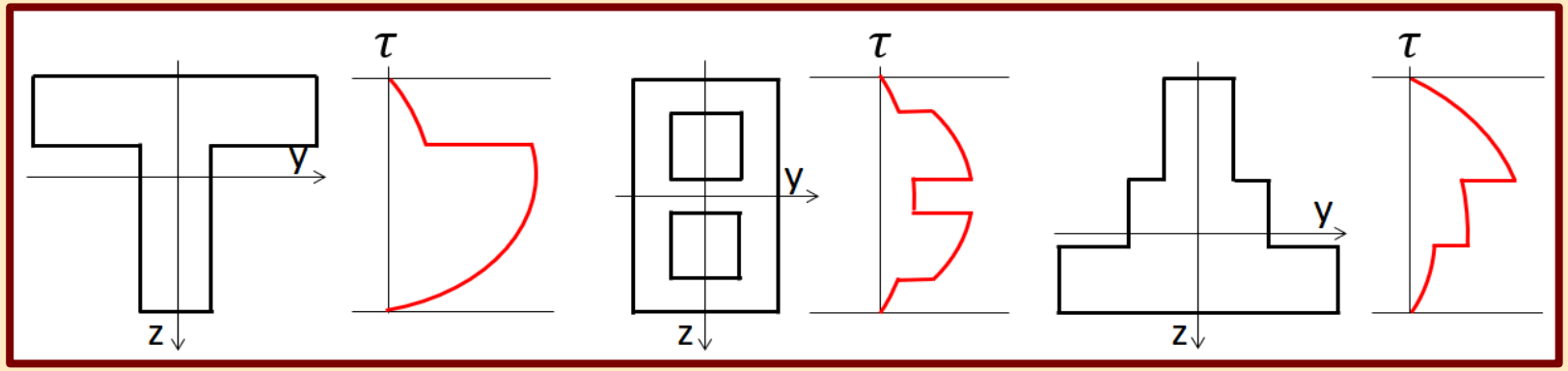
$$\tau_{max} = \frac{T_z \cdot S'_{y\,max}}{I_y \cdot a}\ ;\ \tau_1 = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot a}\ ;\ \tau_2 = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot b} = \tau_1 \cdot \frac{a}{b}$$

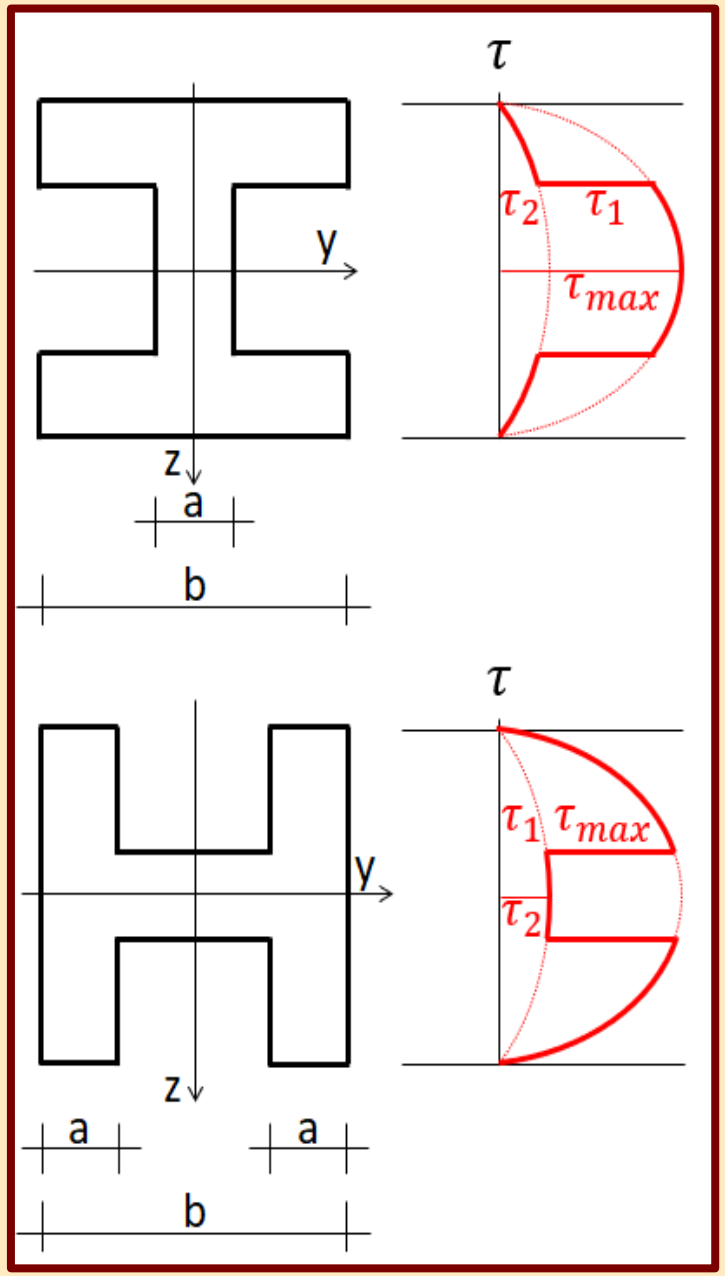
A szélesség változása ugrást okoz az ábrában. A statikai nyomaték a km. szélein mindig nulla értékű és a súlyponti y tengelynél éri el a maximumát. Ebben az esetben az ábra maximuma is itt található.

- „H” szelvény

$$\tau_{max} = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot 2 \cdot a}\ ;\ \tau_1 = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot b} = \tau_{max} \cdot \frac{2a}{b}\ ;\ \tau_2 = \frac{T_z \cdot S'_{y\,max}}{I_y \cdot b}$$

Nem mindig a statikai nyomaték maximumánál (súlyponti y tengely) alakul ki az ábra maximuma.





NEM PÁRHUZAMOS OLDALÉLŰ KM.-EK NYÍRÓFESZÜLTSÉGE

- A határoló felületek mentén érintő irányú a nyírófeszültség. Ezek függőleges összetevői a Zsuravszkij-képlettel számíthatóak, amelyek értékei az y tengellyel párhuzamos egyenesek mentén pedig állandóak.
- A vízszintes összetevők az egyenes szélső pontjaiban a legnagyobbak, befelé haladva lineárisan csökkennek. Az eredőjük tehát a határoló pontokban a legnagyobb.
- A határoló pont (P) nyírófeszültsége:

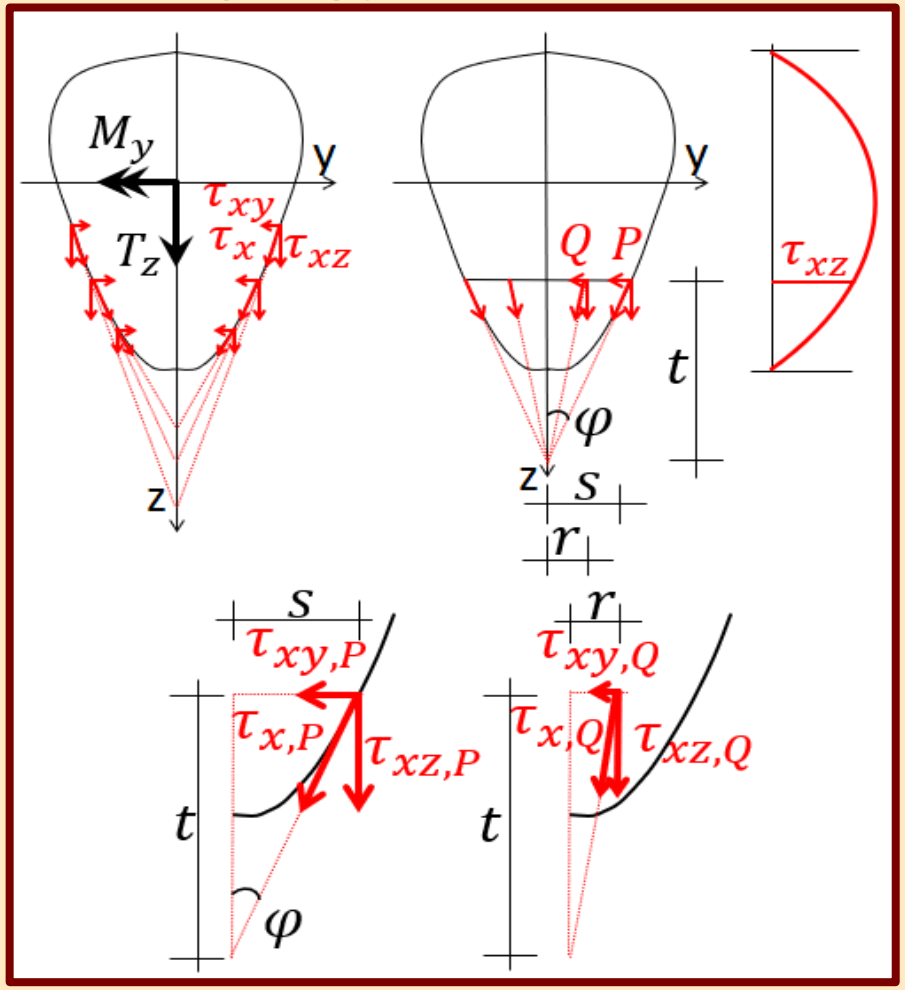
$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot 2 \cdot s} \; ; \; \tau_{xy} = \tau_{xz} \cdot \frac{s}{t} = \tau_{xz} \cdot \tan\varphi$$

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}{}^2 + \tau_{xz}{}^2} = \tau_{xz} \cdot \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{t}$$

- A belső pont (Q) nyírófeszültsége:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot 2 \cdot s} \; ; \tau_{xy} = \tau_{xz} \cdot \frac{r}{t}$$

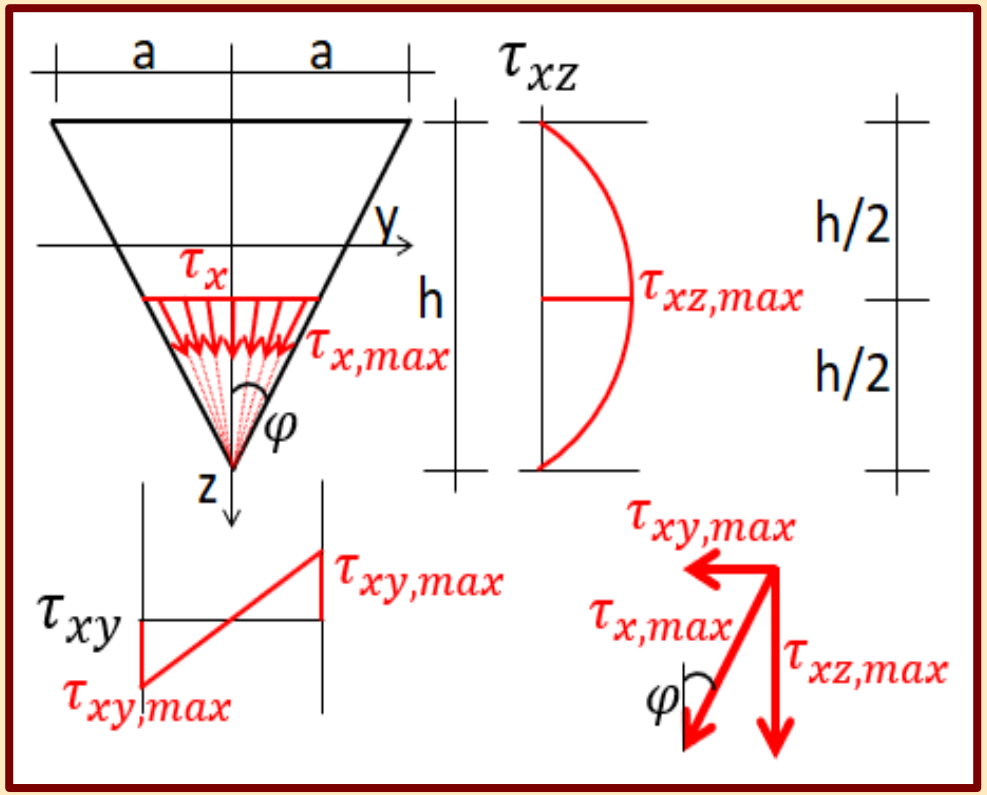
$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}{}^2 + \tau_{xz}{}^2} = \tau_{xz} \cdot \frac{\sqrt{r^2+t^2}}{t}$$



HÁROMSZÖG KERESZTMETSZET NYÍRÓFESZÜLTSÉGE

- A nyírófeszültégek vektorainak hatásvonalai az előzőek alapján a háromszög csúcsába futnak.
- A függőleges nyírófeszültségi komponens maximuma a magasság felében elhelyezkedő egyenes mentén fekvő pontokban van:

$$\tau_{xz,max} = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot a}$$



- A vízszintes nyírófeszültségi komponens maximuma az egyenes szélső pontjaiban van, közöttük lineárisan csökken az értéke:

$$\tau_{xy,max} = \tau_{xz,max} \cdot \frac{a}{h} = \tau_{xz,max} \cdot \tan\varphi$$

- A háromszög határolóvonalát érintő nyírófeszültségi eredő maximuma a komponensekből:

$$\tau_{x,max} = \sqrt{{\tau_{xy,max}}^2 + {\tau_{xz,max}}^2} = \tau_{xz,max} \cdot \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h}$$

VÉKONYFALÚ KERESZTMETSZETEK NYÍRÓFESZÜLTSÉGE

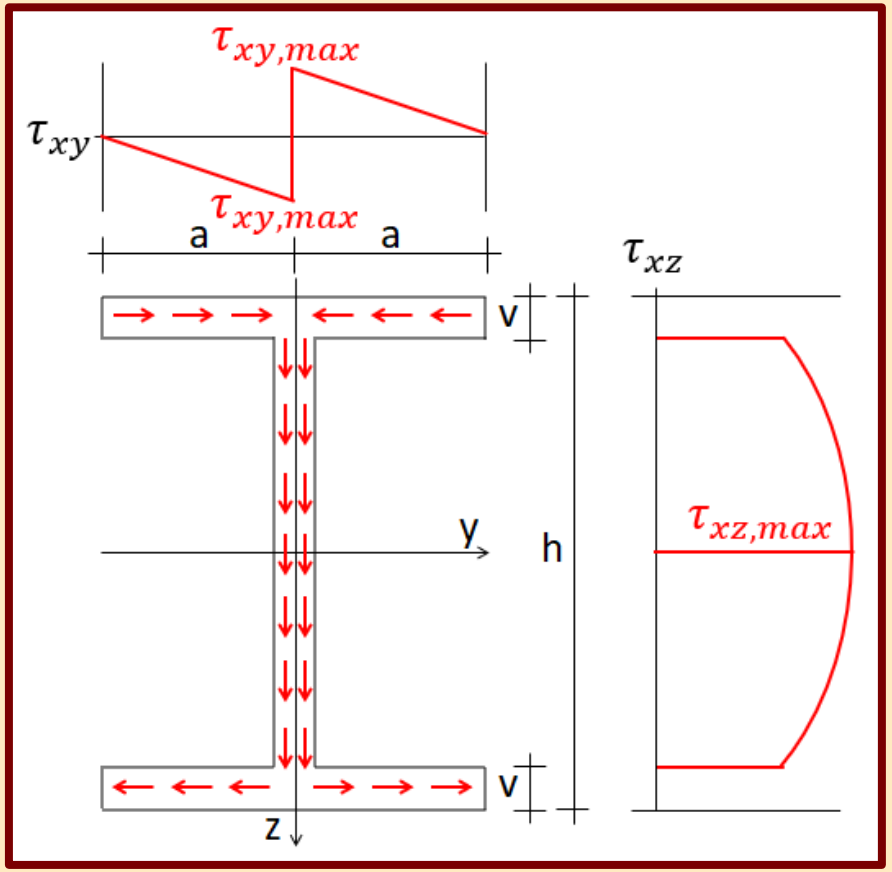
- A km.-ben a határolóvonalakkal párhuzamos nyírófeszültségi vektorokat feltételezünk.
- Ezek a feszültségek nyírófolyamként működnek, értéküket állandónak vesszük a falvastagság mentén.
- A gerincben függőleges nyírófeszültségek ébrednek:

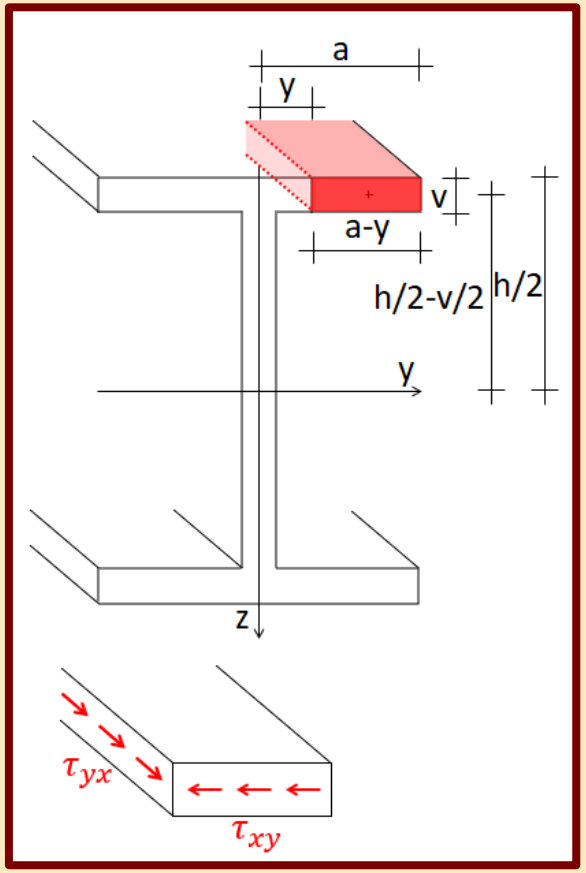
$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot v}$$

- Az övekben ébredő vízszintes nyírófeszültségek:

$$\tau_{xy} = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot v}$$

$$S'_y = v \cdot (a - y) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{v}{2}\right)$$

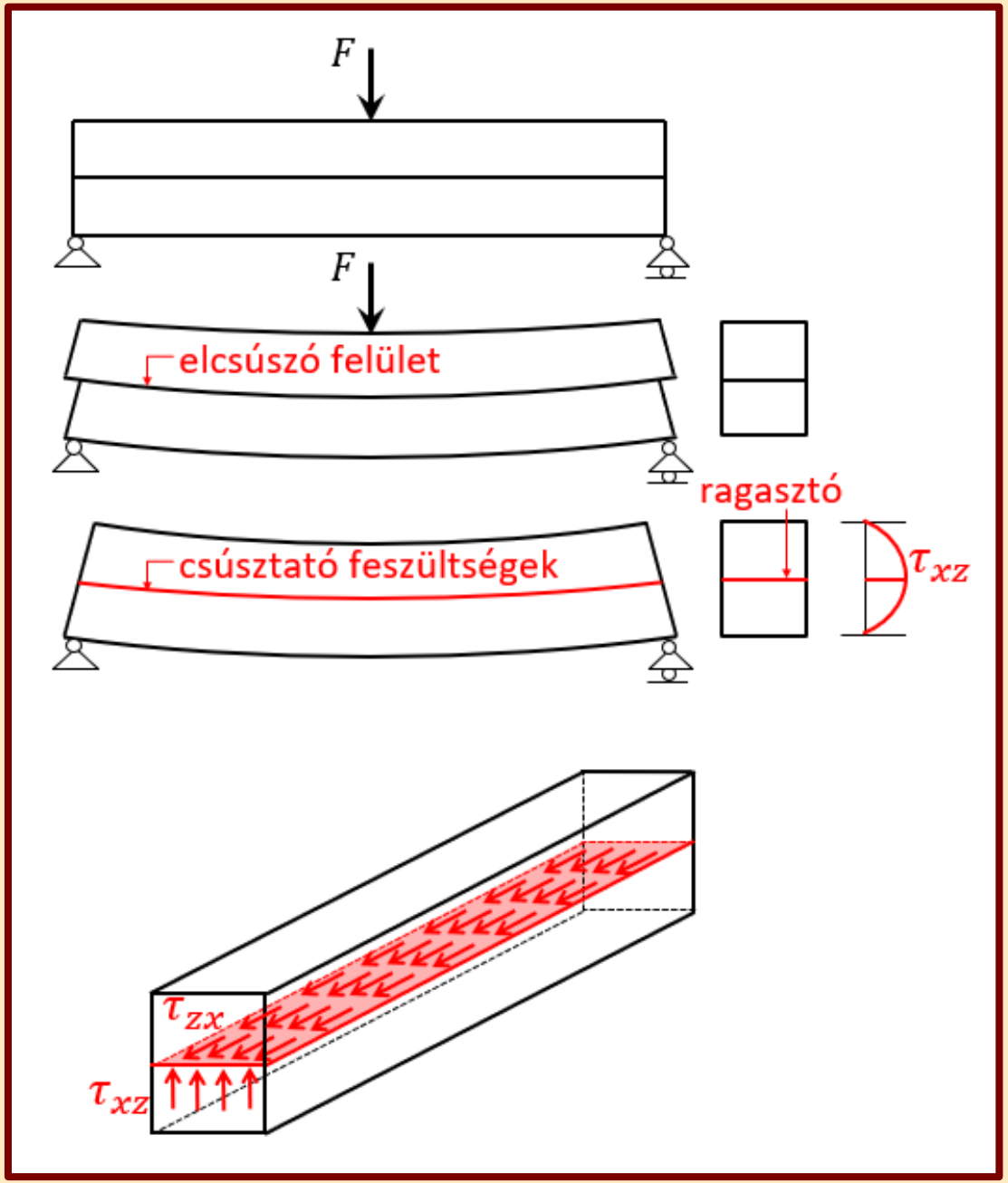




GERENDÁK VÍZSZINTES NYÍRÓFESZÜLTSÉGE

- A kapcsolat nélkül egymásra helyezett gerendák elcsúsznak egymáson az érintkezési felület mentén az alakváltozás során.
- Kapcsolat létesítésével (pl. ragasztó) kialakuló csúsztatófeszültségek megakadályozzák az elmozdulást.
- A csúsztatófeszültségek megegyeznek az abban a magasságban kialakuló km.-i nyírófeszültségekkel a dualitás alapján:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx,ragasztó} = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot b}$$



KAPCSOLÓELEMEK VÍZSZINTES NYÍRÓFESZÜLTSÉGE

- Fajlagos csúsztatóerő meghatározása:

$$h = \frac{dH}{dx} = \frac{\tau_{zx} \cdot b \cdot dx}{dx} = \tau_{zx} \cdot b = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot b} \cdot b = \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y}$$

- Csúsztató erő egyenletes nyíróigénybevétel esetén:

$$H = \int_{(a)} \tau_{zx} \cdot b \cdot dx = \int_{(a)} h \cdot dx$$

$$H = \int_{(a)} \frac{T_z \cdot S'_y}{I_y \cdot b} \cdot b \cdot dx$$

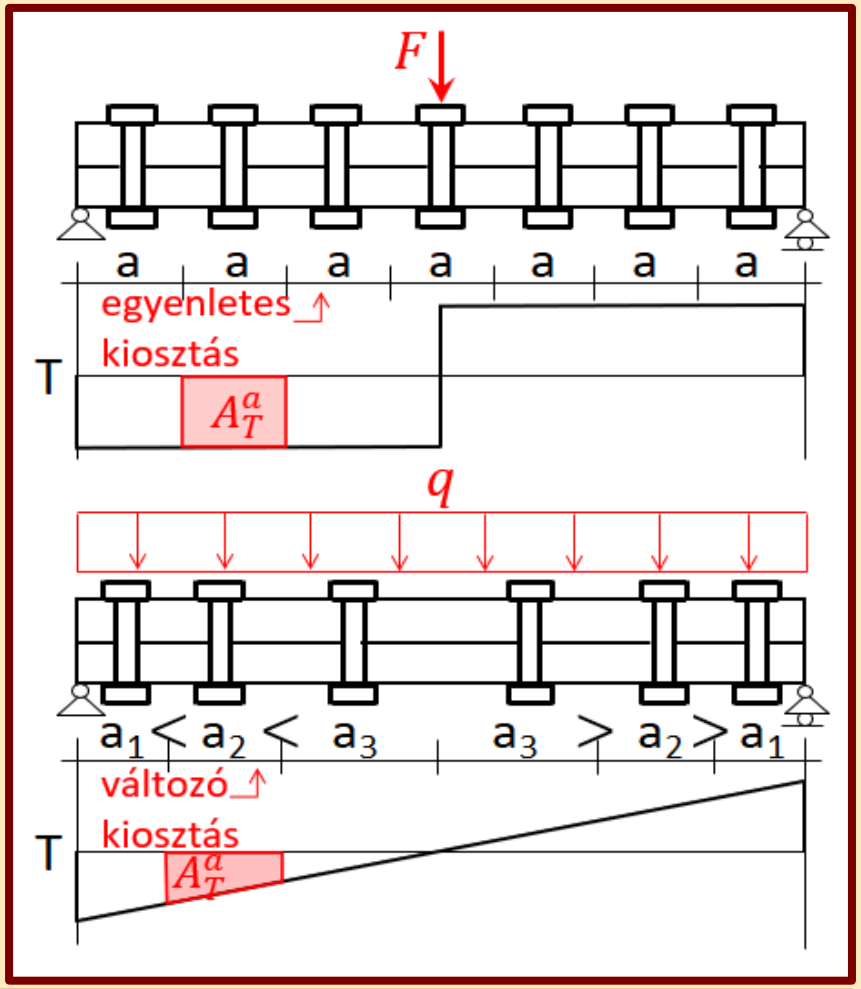
$$H = \frac{S'_y}{I_y} \int_{(a)} T_z \cdot dx$$

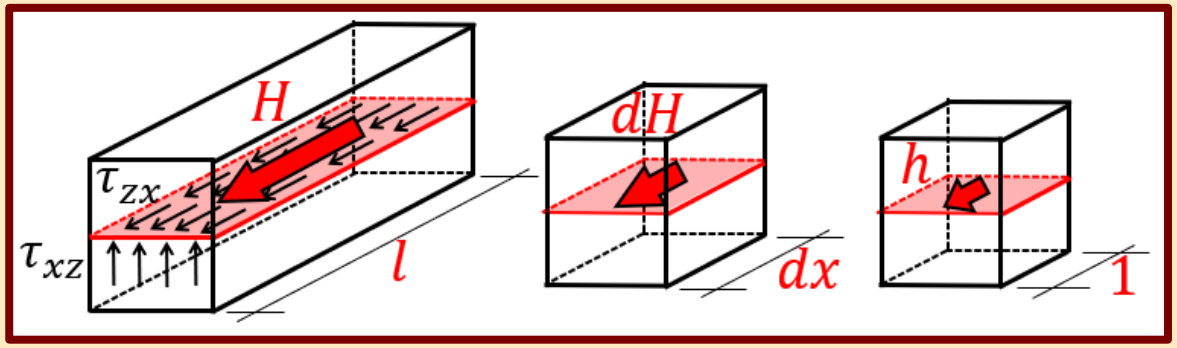
$$H = \frac{S'_y}{I_y} \cdot T_z \cdot a = \frac{S'_y}{I_y} \cdot A_T^a = h \cdot a$$

- Csúsztató erő változó nyíróigénybevétel esetén:

$$H = \frac{S'_y}{I_y} \cdot A_T^a$$

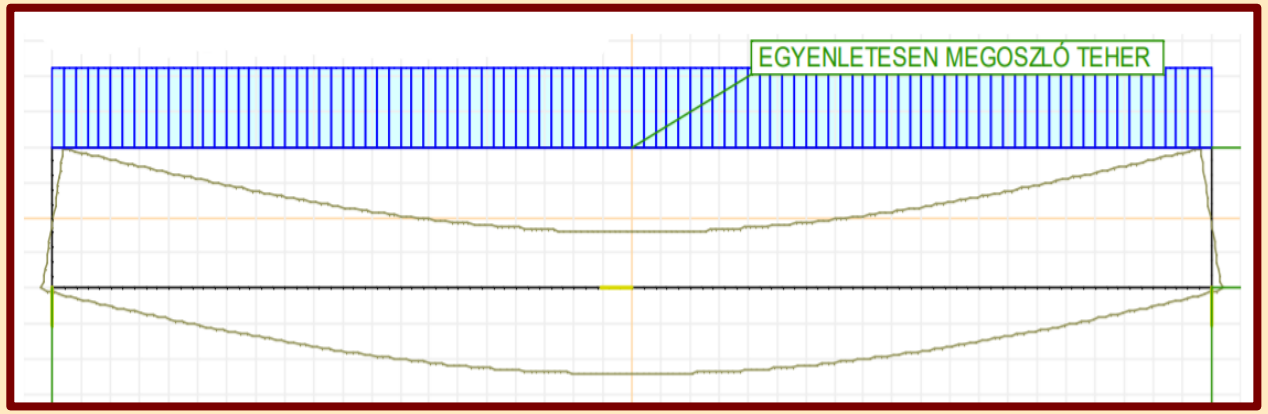
A nyíróerő növelésével a kapcsolóelemek kiosztása sűrűsödik.



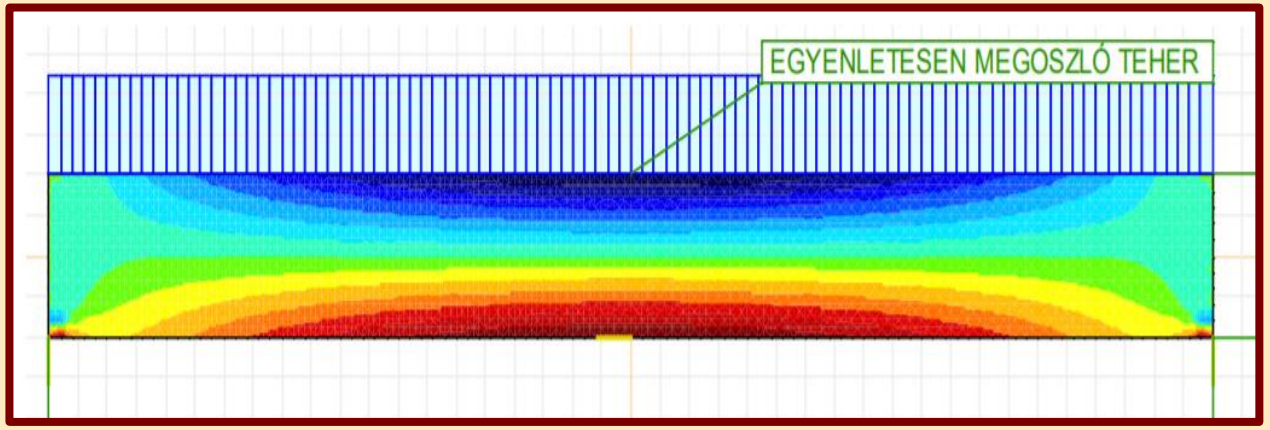


HAJLÍTOTT-NYÍRT GERENDA ALAKVÁLTOZÁSA ÉS FESZÜLTSÉGEI

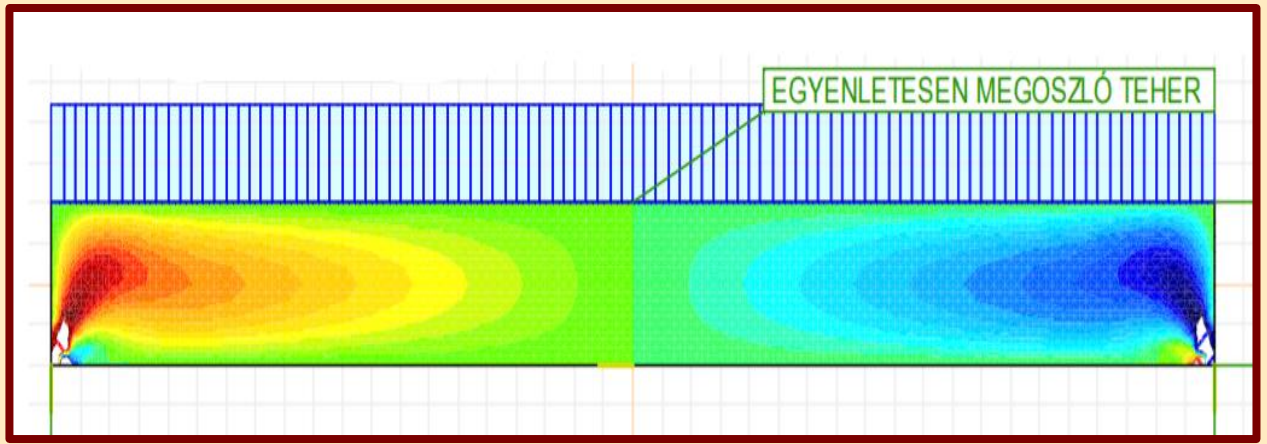
- Alakváltozás: a hajlítás hatása érvényesül erősebben (sík km.-ek elve), a nyírás hatása elhanyagolható.



- Normálfeszültségek: tartóközépen (M_{max}-nál) a szélső szálakban a legnagyobbak.



- Nyírófeszültségek: a tartó szélső km.-eiben (T_{max}-nál) a középső tartománynál a legnagyobbak.



Tartószerkezetek mechanikája II.

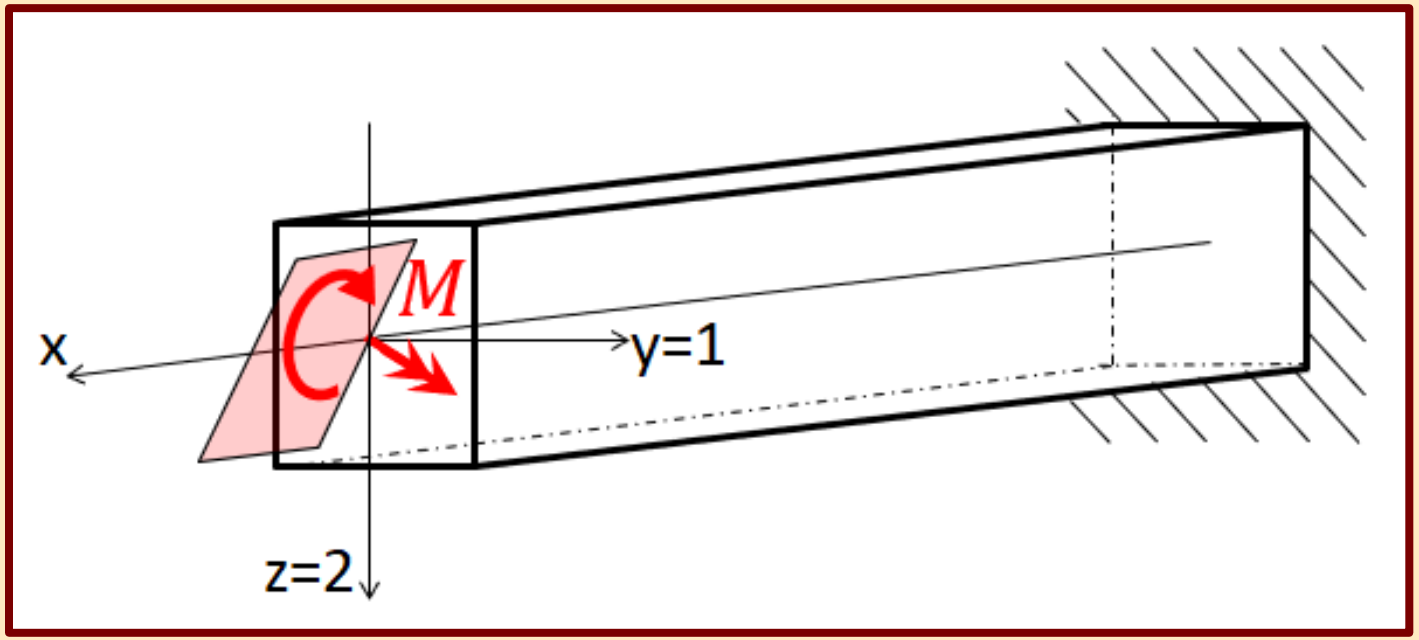
11.

Feszültségszámítás: ferde hajlítás

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

A FERDE HAJLÍTÁS ÉRTELMEZÉSE

- Ha a nyomaték a km. egyik olyan súlyponti, de nem főinerciatengelye és a test hossztengelye által meghatározott síkban működik, vagyis a nyomatékvektor nem esik a km. egyik főirányába sem, akkor ferde hajlításról beszélünk.
- A nyomatékkal együttesen fellépő nyíróerő hatásával ebben a témakörben nem foglalkozunk (előzőekben ismertetésre került).



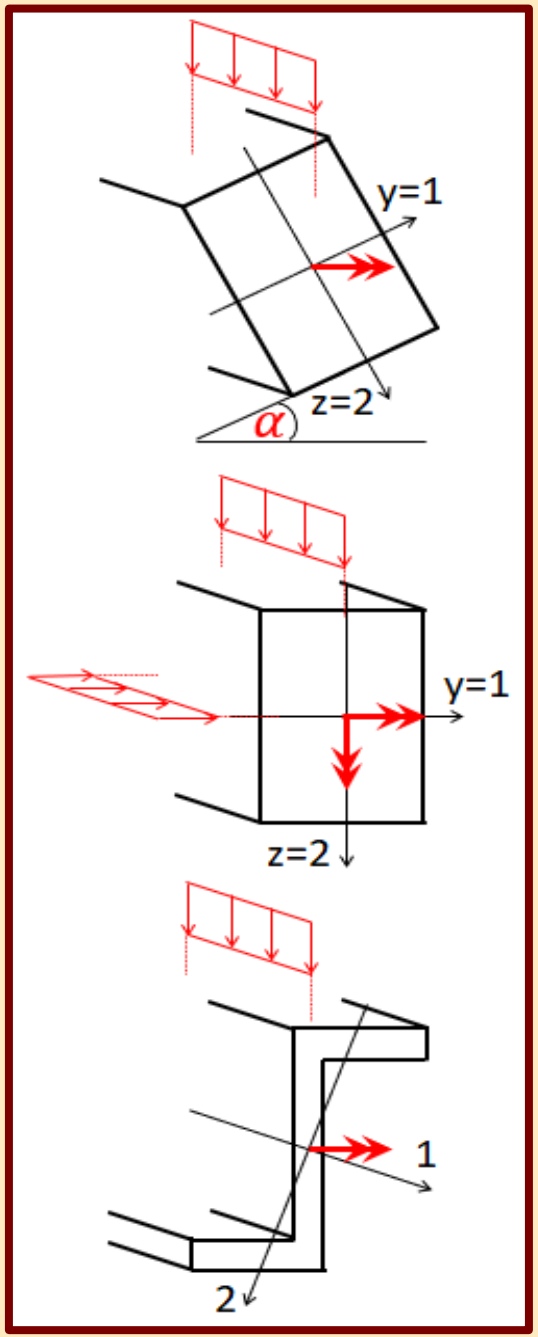
PÉLDÁK FERDE HAJLÍTÁSRA

A FERDE HAJLÍTÁS ESETEI

- A terhelés síkja függőleges, a keresztmetszet szimmetrikus, de elfordult állásából adódóan a hajlítás síkja és a nyomatékvektor sem esik a főirányokba.

- A keresztmetszet szimmetrikus, a teher két egymásra merőleges irányban működik, amelyek egybeesnek a km. főirányaival.

- A keresztmetszet nem szimmetrikus, a teher és a nyomaték vektor sem esik a főirányokba, azok elfordult állása miatt.



FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA

KIINDULÁSI ÖSSZEFÜGGÉSEK

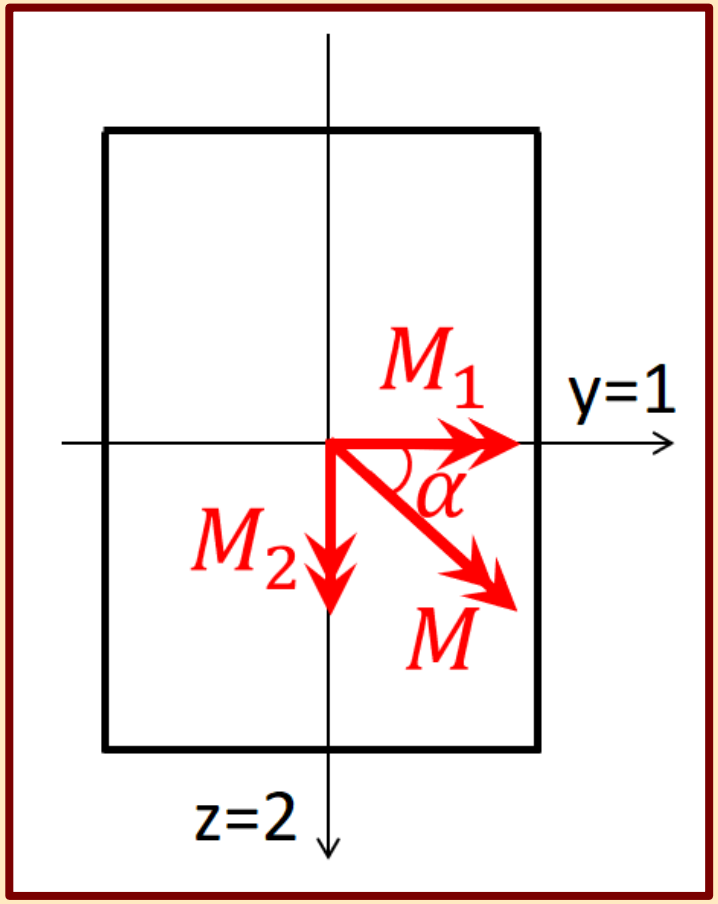
- A ferde hajlítást két egyenes hajlítás együttes hatásával helyettesítjük, vagyis a nyomatékot a km. főirányaiba eső összetevőire bontjuk.

$$M_1 = M \cdot \cos\alpha$$
$$M_2 = M \cdot \sin\alpha$$

- A két egyenes hajlításból származó feszültséget a megismert módon számíthatjuk.

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z\,; \quad \sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

- Ezek a feszültségek a km. adott pontján skalárisan összegezhetőek, mivel azonos síkban működnek és vektoraik párhuzamosak. Tehát a km. egy pontjának feszültségét az egymásrahalmozás (szuperpozíció) elvének megfelelően kaphatjuk meg.



FESZÜLTSÉGSZÁMÍTÁS AZ EGYMÁSRAHALMOZÁSSAL

A feszültségeket a húzás-nyomás előjelszabálya szerint szemlélet alapján összegezzük az egyes km.-i pontok vonatkozásában.

- Szimmetrikus km. esetén (az y és z a főinercia tengelyek):

$$\sigma_x = \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

- Nem szimmetrikus km. esetén:

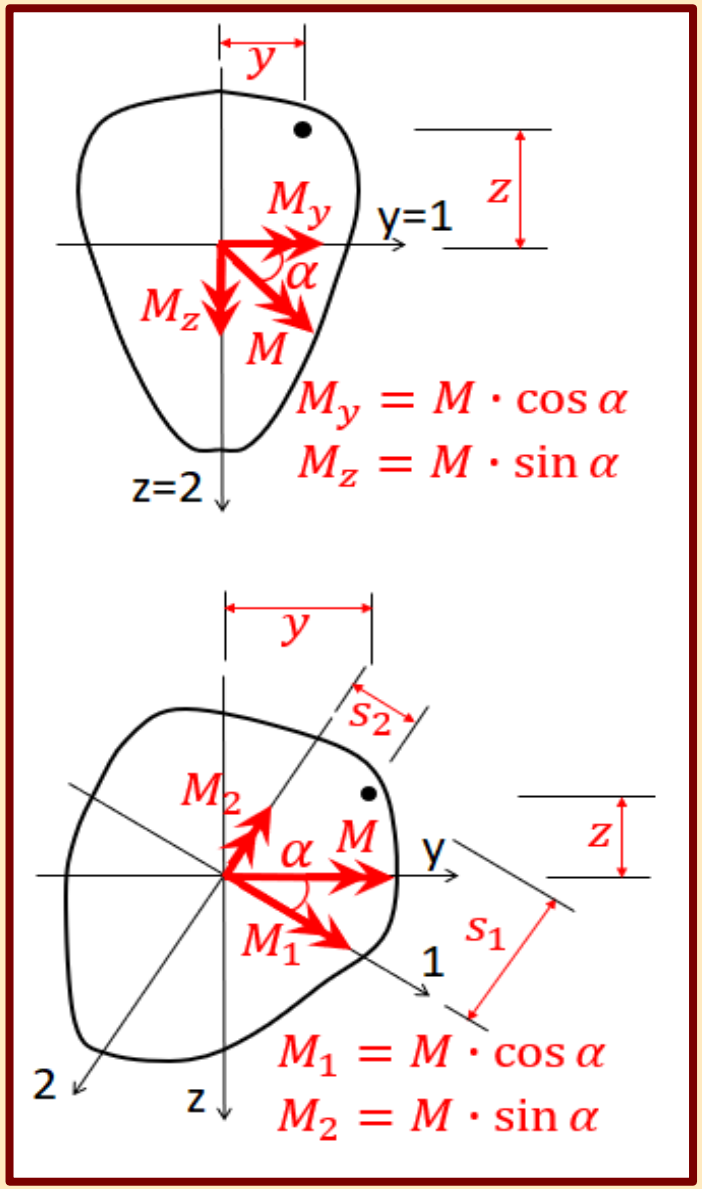
$$\sigma_x = \pm \frac{M_1}{I_1} \cdot s_1 \pm \frac{M_2}{I_2} \cdot s_2$$

  - A főtengelyektől mért száltávolságok számítása a transzformációs összefüggéssel:

$$s_1 = -y \cdot \sin\alpha + z \cdot \cos\alpha$$

$$s_2 = y \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha$$

A koordináta-távolságok előjelhelyesen behelyettesítve.



FESZÜLTSÉGSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA SZIMMETRIKUS KM. ESETÉN

Az y és z tengelyek a főinercia tengelyek.

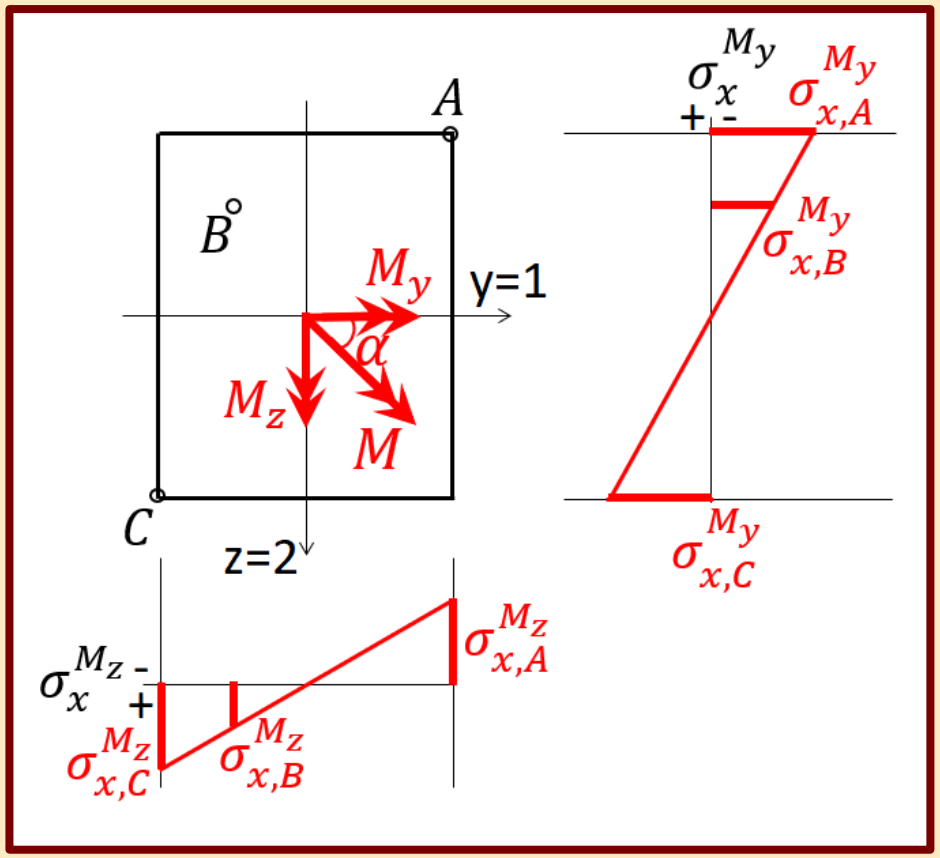
- km. egy pontjának feszültsége

$$\sigma_{x,B} = -\frac{M_y}{I_y} \cdot z_B + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_B$$

- km. maximális feszültsége

$$\sigma_{x,max} = \left|\sigma_{x,A}\right| = \left|-\frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max}\right|$$

$$\sigma_{x,max} = \sigma_{x,C} = +\frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max}$$



A főtengelyektől legtávolabbi pontokban (A és C pont) ébred a maximális normálfeszültség azokban a síknegyedekben, ahol a nyomatékok azonos típusú hatás fejtenek ki (mindkettő húzást vagy nyomást). A kétszeres szimmetria miatt a feszültségek a két pontban azonosak lesznek ebben az esetben.

FESZÜLTSÉGSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA NEM SZIMMETRIKUS KM. ESETÉN

A főinercia tengelyek az y és z tengelyekhez képest α szöget zárnak be.

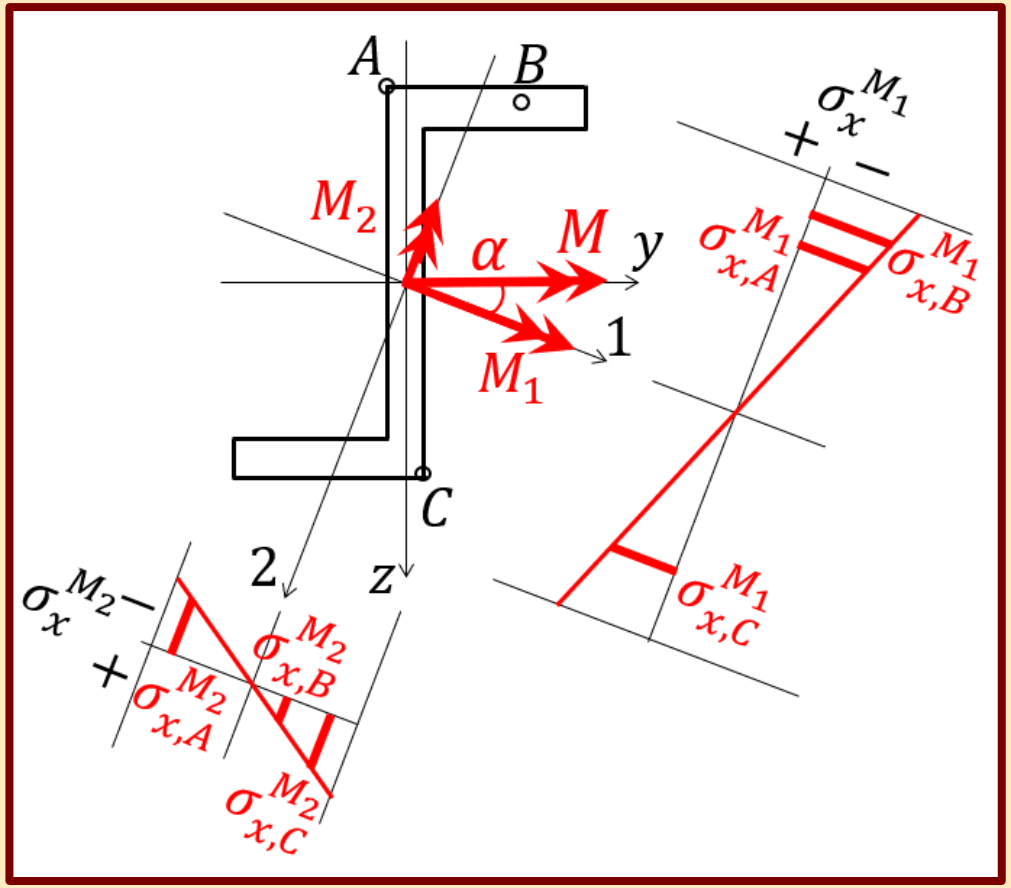
- km. egy pontjának feszültsége

$$\sigma_{x,B} = -\frac{M_1}{I_1} \cdot s_{1B} + \frac{M_2}{I_2} \cdot s_{2B}$$

- km. maximális feszültsége

$$\sigma_{x,max} = \left|\sigma_{x,A}\right| = -\frac{M_1}{I_1} \cdot s_{1A} - \frac{M_2}{I_2} \cdot s_{2A}$$

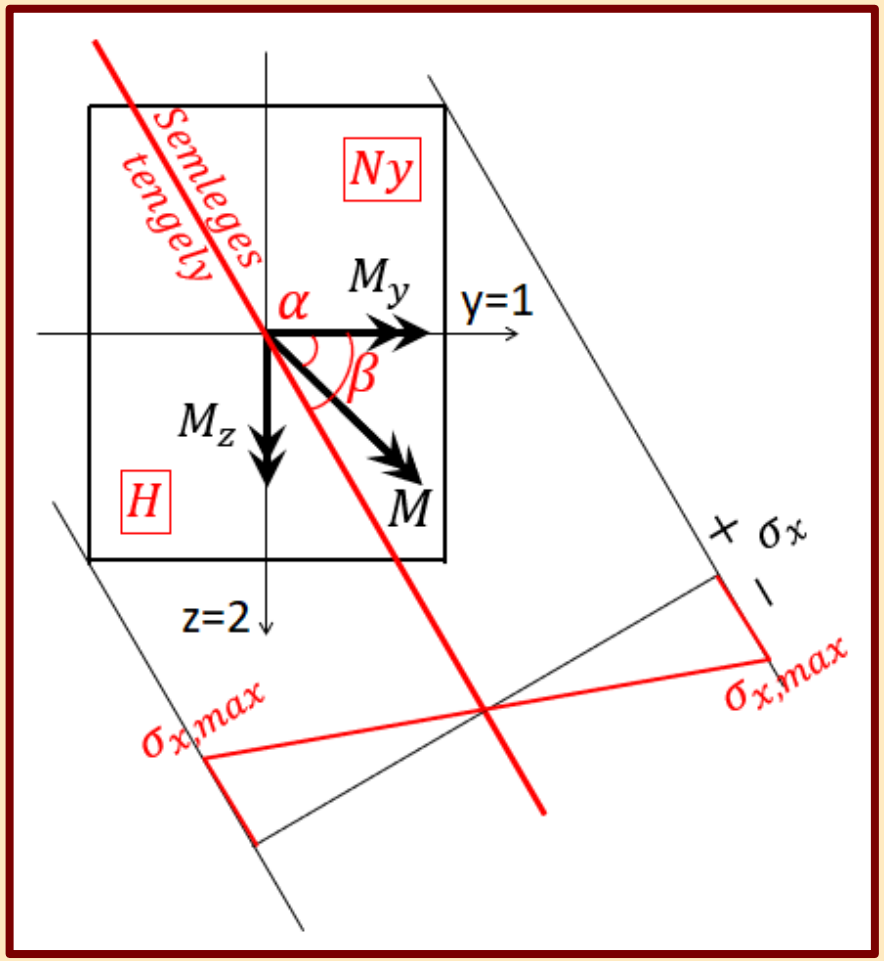
$$\sigma_{x,max} = \sigma_{x,C} = +\frac{M_1}{I_1} \cdot s_{1C} + \frac{M_2}{I_2} \cdot s_{2C}$$



A legnagyobb normálfeszültségek azokban a síknegyedekben ébrednek, ahol a nyomatékok azonos típusú hatás fejtenek ki (mindkettő húzást vagy nyomást). Ezeken síknegyedeken belül pedig a főtengelyektől legtávolabbi pontokban (A és C pont) alakul ki a maximális feszültség. Ezek a pontok viszont az egyes irányokban a teljes km. vonatkozásában nem biztos, hogy a szélső szálak, vagyis a legtávolabbiak.

SEMLEGES TENGELY MEGHATÁROZÁSA

- A km. azon pontjainak összességét, ahol nulla a normálfeszültség, semleges tengelynek hívjuk.
- A semleges tengely kettéosztja a km.-t húzott és nyomott tartományra. A feszültségek a semleges tengelytől legtávolabbi pontokban lesznek a legnagyobbak.
- Ferde hajlításnál a semleges tengely áthalad a súlyponton, de nem esik egy egyenesbe a nyomatékvektorral, azzal szöget zár be.
- A semleges tengely egyenlete:



$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = 0$$

$$z = \frac{I_y}{M_y} \cdot \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$ (A seml. teng. mindig a 2. főtengely és az M vektor közé esik.)

$$\tan\beta = \frac{I_y}{I_z} \cdot \tan\alpha \quad \left(\tan\beta = \frac{z}{y};\ \tan\alpha = \frac{M_z}{M_y}\right)$$

SEMLEGES TENGELY HELYZETE

- A feszültségi test térben ábrázolja a kialakuló normálfeszültségeket és szemlélteti a semleges tengely helyzetét.
- A semleges tengely oldalélekkel alkotott metszéspontjának a helyzete:

Metszéspont az A-D oldallal:

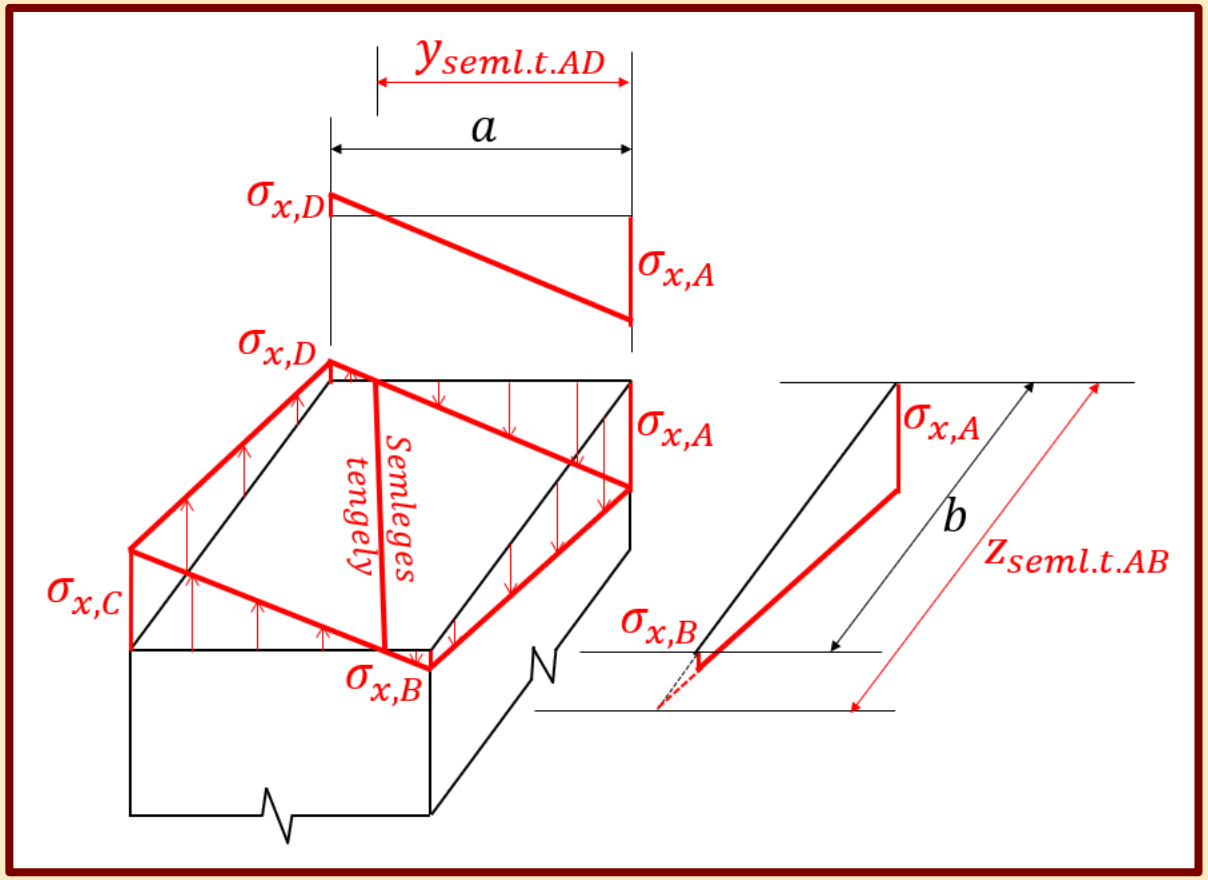
$$\frac{a}{\sigma_{x,D}+\sigma_{x,A}} = \frac{y_{seml.t.AD}}{\sigma_{x,A}}$$

$$y_{seml.t.AD} = \frac{a}{\sigma_{x,D}+\sigma_{x,A}} \cdot \sigma_{x,A}$$

Metszéspont az A-B oldallal:

$$\frac{b}{\sigma_{x,A}-\sigma_{x,B}} = \frac{z_{seml.t.AB}}{\sigma_{x,A}}$$

$$z_{seml.t.AB} = \frac{b}{\sigma_{x,A}-\sigma_{x,B}} \cdot \sigma_{x,A}$$



Tartószerkezetek mechanikája II.

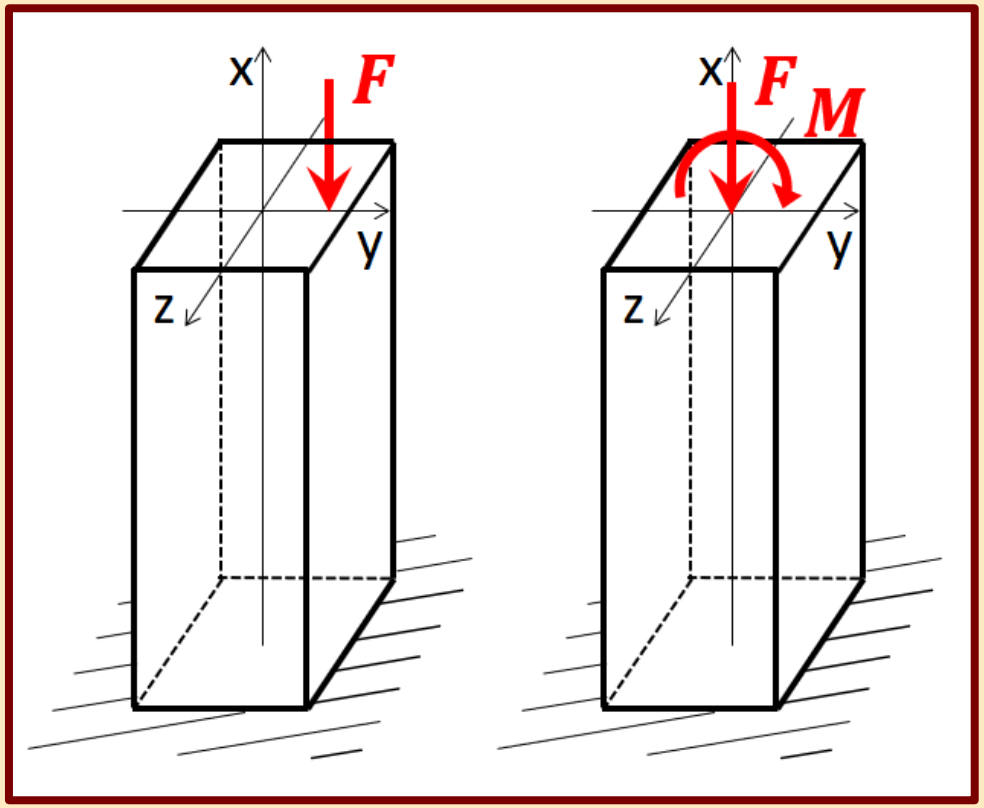
12.

Feszültségszámítás:
külpontos nyomás (-húzás)

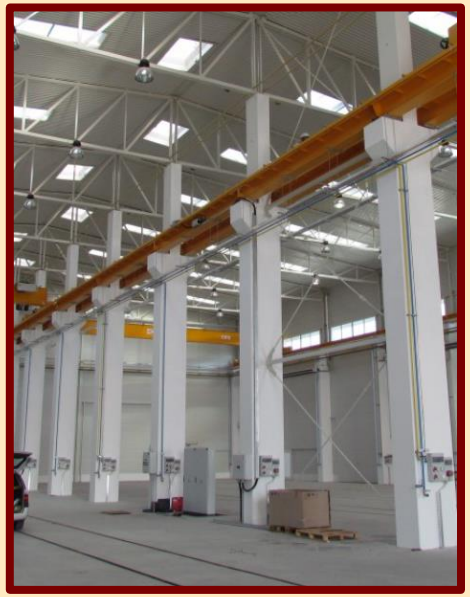
Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

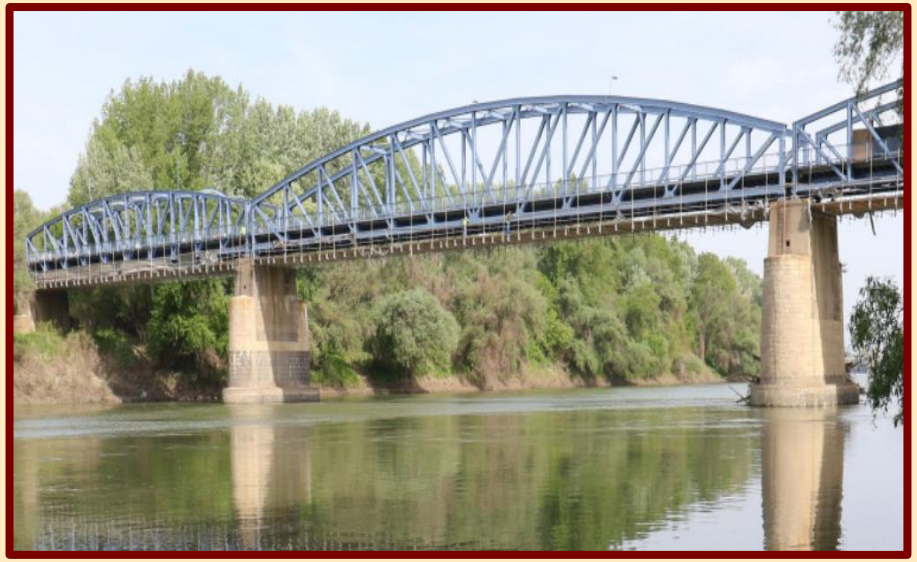
A KÜLPONTOS NYOMÁS ÉRTELMEZÉSE

- Ha a keresztmetszetekben a rúd tengelyirányába eső (km. síkjára merőleges), olyan erő működik, amely nem halad át a keresztmetszet súlypontján, akkor külpontos nyomásról (húzásról) beszélünk.
- A külpontos nyomással (húzással) egyenértékű igénybevétel, ha a km.-ekben hajlítással egyidejű (de attól független) központos nyomóerő (húzóerő) lép fel.



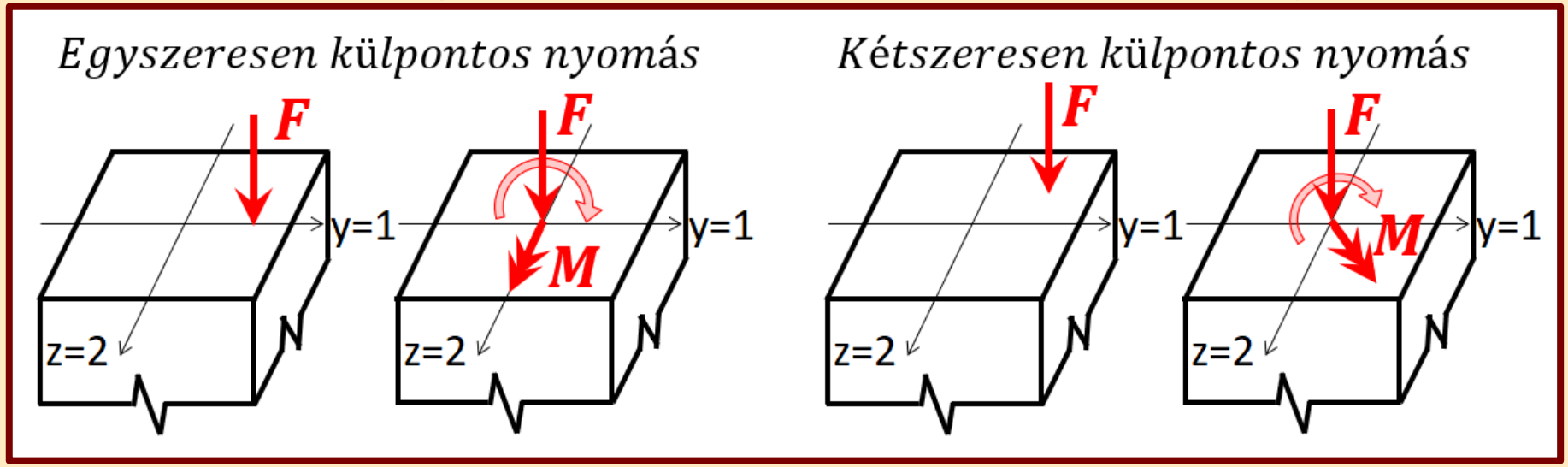
PÉLDÁK KÜLPONTOS NYOMÁSRA





A KÜLPONTOS NYOMÁS ESETEI

- A külpontos normálerőt a km. súlypontjába redukálva egy vele azonos nagyságú, párhuzamosan eltolt erőt és az erő külpontossággal történő szorzásával előállított hajlítónyomatékot kapunk.
- Egyszeresen külpontos nyomás – nyomás és egyenes hajlítás: ha a nyomóerő vektora metszi a km. egyik főtengelyét, vagyis csak a másik főtengely körül forgat. A külpontosságból származó nyomaték egyenes hajlításként működik.
- Kétszeresen külpontos nyomás – nyomás és ferde hajlítás: ha a nyomóerő vektora nem metszi a km. egyik főtengelyét sem, vagyis mindkét főtengely körül forgat. A külpontosságból származó nyomaték ferde hajlításként működik.



FESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA

KIINDULÁSI ÖSSZEFÜGGÉSEK

- A súlypontra redukálás során kapott normálerő és a hajlítónyomaték hatására is normálfeszültségek keletkeznek a km.-ekben, amelyeket az eddig megismert módon számíthatunk: $N = F;\ M_y = N \cdot e_y;\ M_z = N \cdot e_z$
  - a redukálásból származó normálerő hatása:

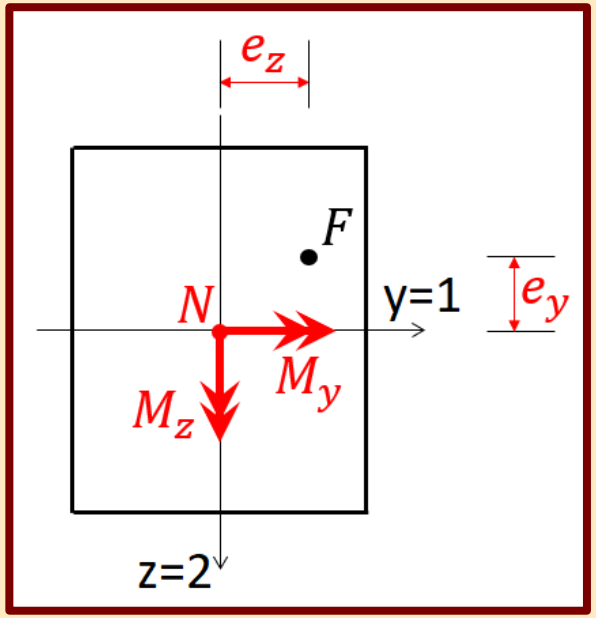
$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

  - a redukálásból származó egyenes hajlítás hatása:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z\ ;\ \sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

  - a redukálásból származó ferde hajlítás hatása:

$$\sigma_x = \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$



- Megállapítható levezetés nélkül, hogy ezek a feszültségek a km. adott pontján skalárisan összegezhetőek, mivel azonos síkban működnek és vektoraik párhuzamosak. Tehát a km. egy pontjának feszültségét az egymásrahalmozás (szuperpozíció) elvének megfelelően kaphatjuk meg.

FESZÜLTSÉGSZÁMÍTÁS AZ EGYMÁSRAHALMOZÁSSAL

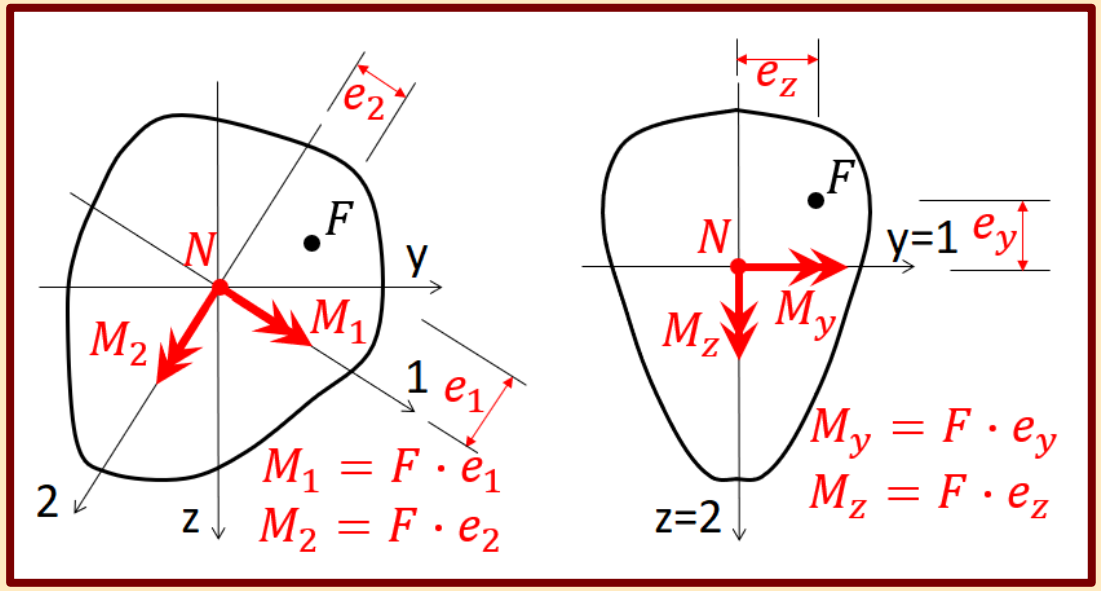
A feszültségeket a húzás-nyomás előjelszabálya alapján összegezzük.

- Kétszeresen külpontos nyomás
  - általános esetben:

$$\sigma_x = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_1}{I_1} \cdot s_1 \pm \frac{M_2}{I_2} \cdot s_2$$

  - ha az y és z a főinercia tengelyek:

$$\sigma_x = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

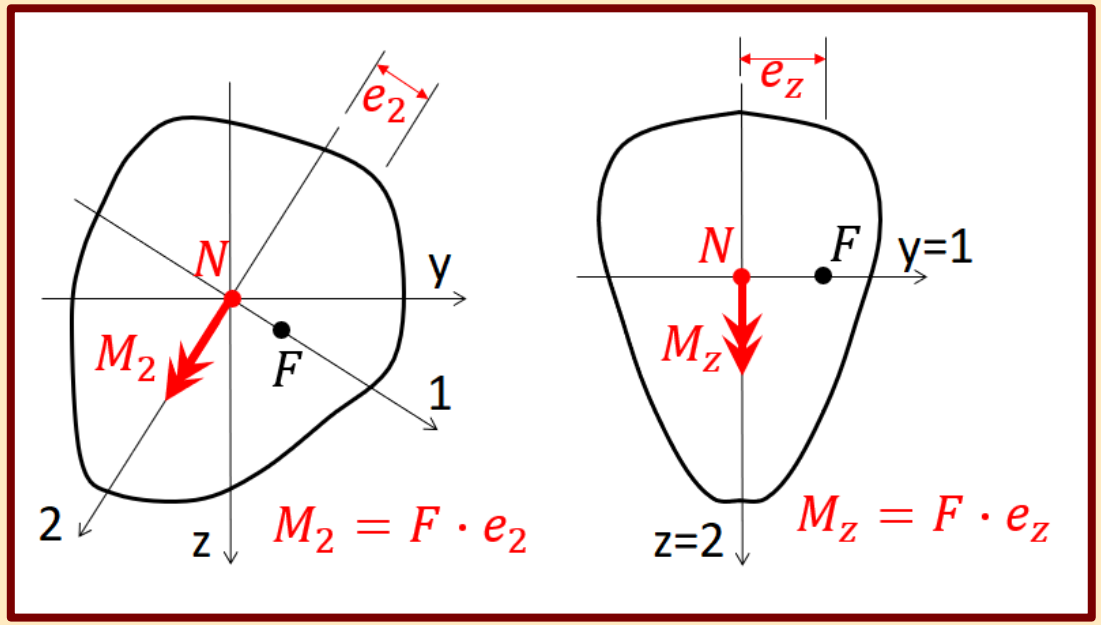


- Egyszeresen külpontos nyomás
  - általános esetben:

$$\sigma_x = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_1}{I_1} \cdot s_1;\ \sigma_x = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_2}{I_2} \cdot s_2$$

  - ha az y és z a főinercia tengelyek:

$$\sigma_x = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z\ ;\ \sigma_x = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$



FESZÜLTSÉGSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA

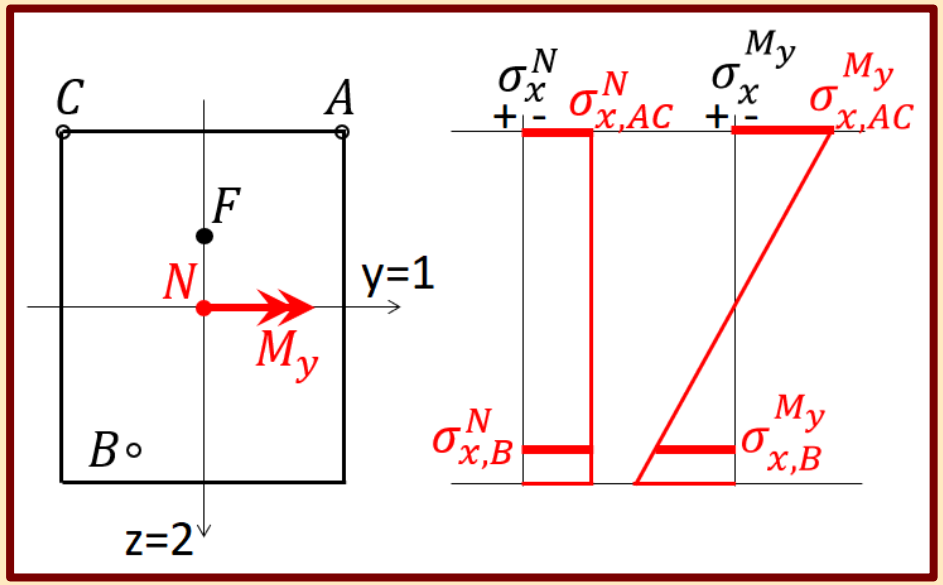
Egyszeresen külpontosan nyomott

- km. egy pontjának feszültsége

$$\sigma_{x,B} = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_B$$

- km. maximális feszültsége

$$\sigma_{x,AC} = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max}$$



Kétszeresen külpontosan nyomott

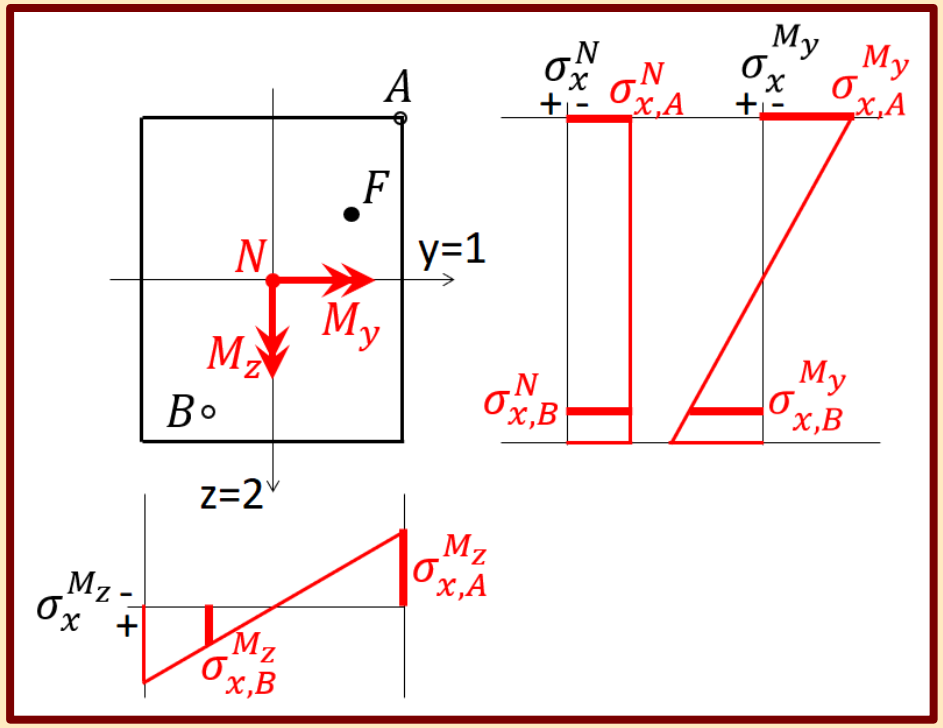
- km. egy pontjának feszültsége

$$\sigma_{x,B} = -\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_B + \frac{M_z}{I_z} \cdot y_B$$

- km. maximális feszültsége

$$\sigma_{x,A} = -\frac{N}{A} - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max}$$

  - A nyomóerővel azonos síknegyedben fekvő, a főtengelyektől legtávolabbi pontban (A pont) ébred a maximális nyomófeszültség.



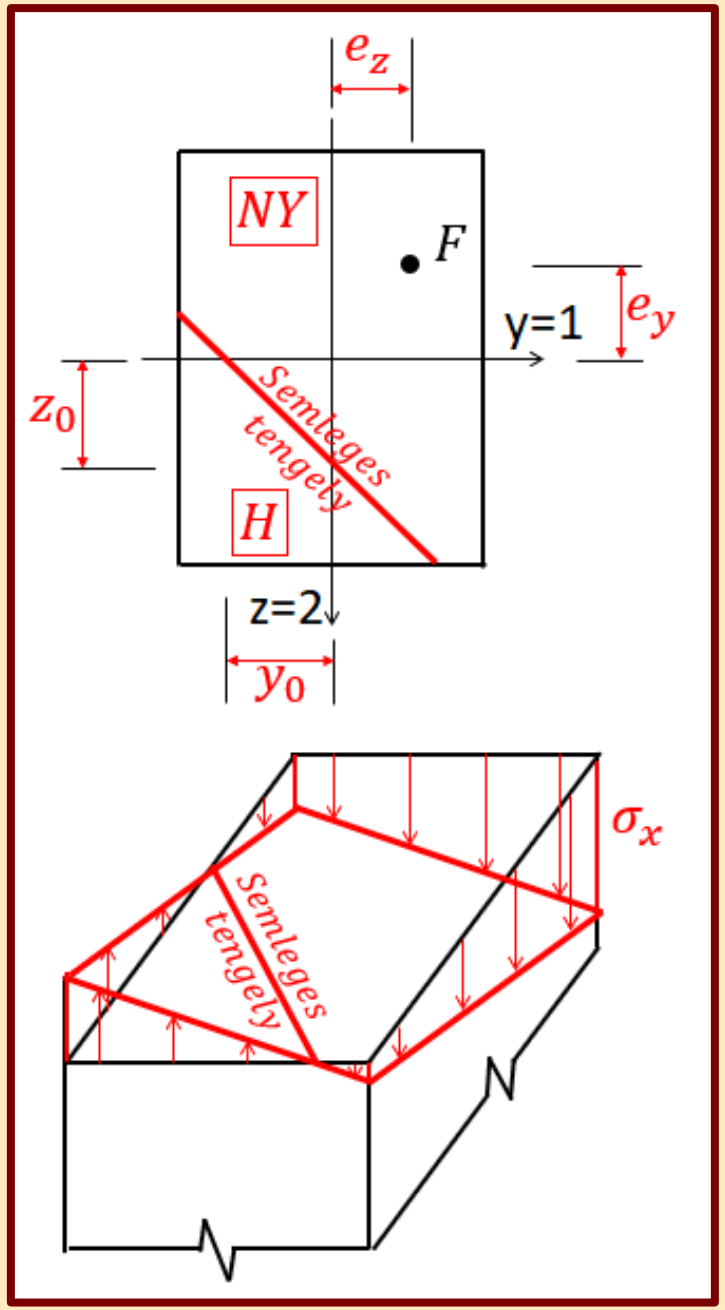
SEMLEGES TENGELY MEGHATÁROZÁSA

- A km. azon pontjainak összességét, ahol nulla a normálfeszültség, semleges tengelynek hívjuk.
- A semleges tengely kettéosztja a km.-t húzott és nyomott tartományra.
- Külpontos nyomásnál a semleges tengely nem halad át a súlyponton, a nyomott zóna nagyobb a húzottnál. A nyomóerővel szemközti tartományban alakulhat ki húzás.
- A semleges tengely egyenlete:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{M_z}{I_z} \cdot y = 0$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_y}{I_y} \cdot z + \frac{N \cdot e_z}{I_z} \cdot y = 0$$

$$z = -\frac{I_y}{A \cdot e_y} - \frac{I_y \cdot e_z}{I_z \cdot e_y} \cdot y \ (e_y; e_z; \mathrm{y}; \mathrm{z} \text{ és N előjelhelyes})$$

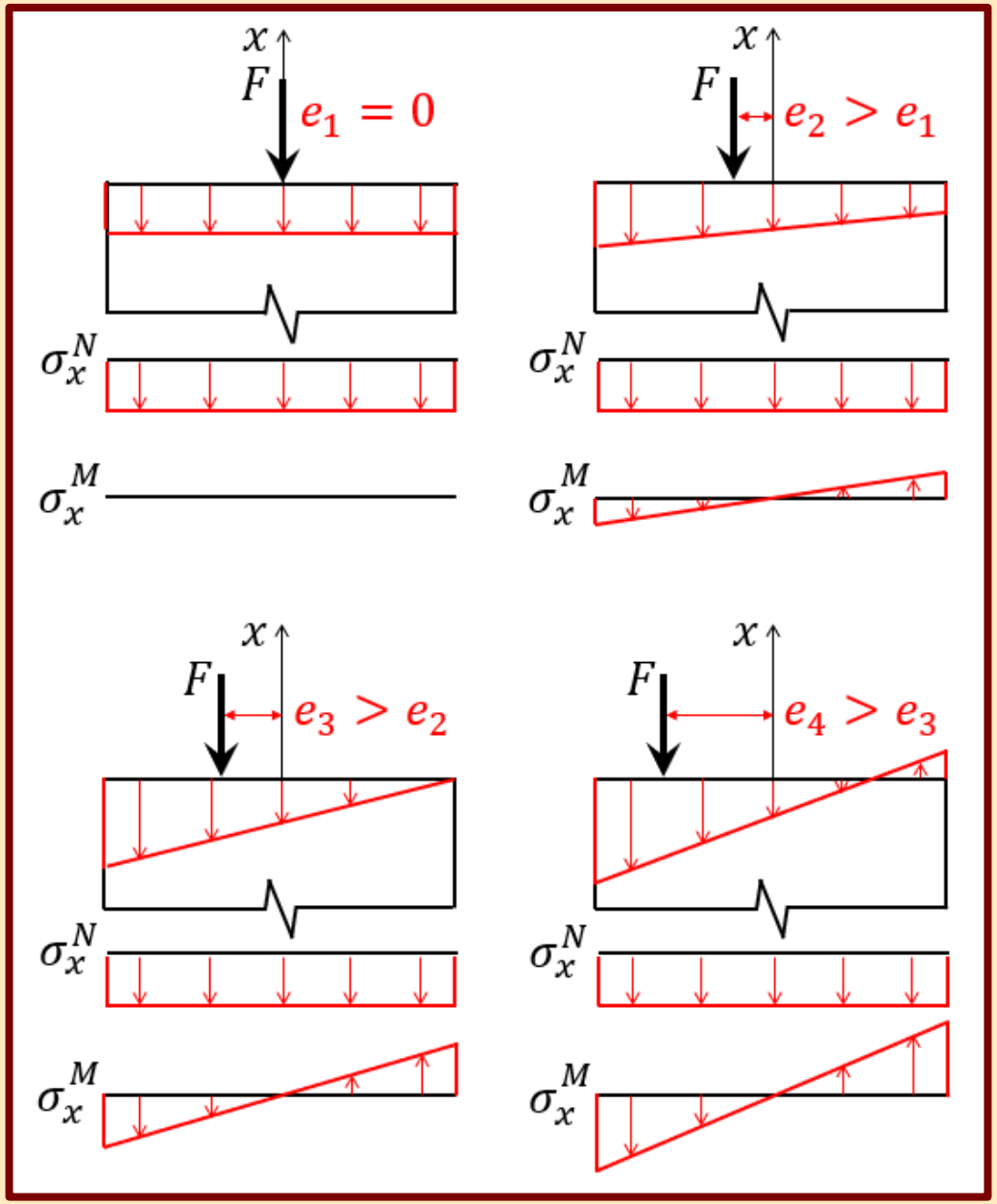


A KÜLPONTOSSÁG NÖVEKEDÉSÉNEK HATÁSA

- A kialakuló feszültségek a normálerő és a nyomaték együttes hatására ébrednek:

$$\sigma_x = \sigma_x^N + \sigma_x^M = -\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

- A normálerő, helyzetétől függetlenül azonos konstans feszültségeloszlást eredményez a km.-ben.
- A nyomaték és a belőle származó feszültségek értéke növekszik a terhelő erő külpontosságának növelésével.
- Az összegzett feszültségek a külpontosság növekedésével a nyomóerő oldali szélsőszálban növekednek, az ellenkező oldaliban csökkennek, majd nulla értékűvé, utána húzófeszültséggé alakulnak.



A KERESZTMETSZETEK BELSŐ MAGJA

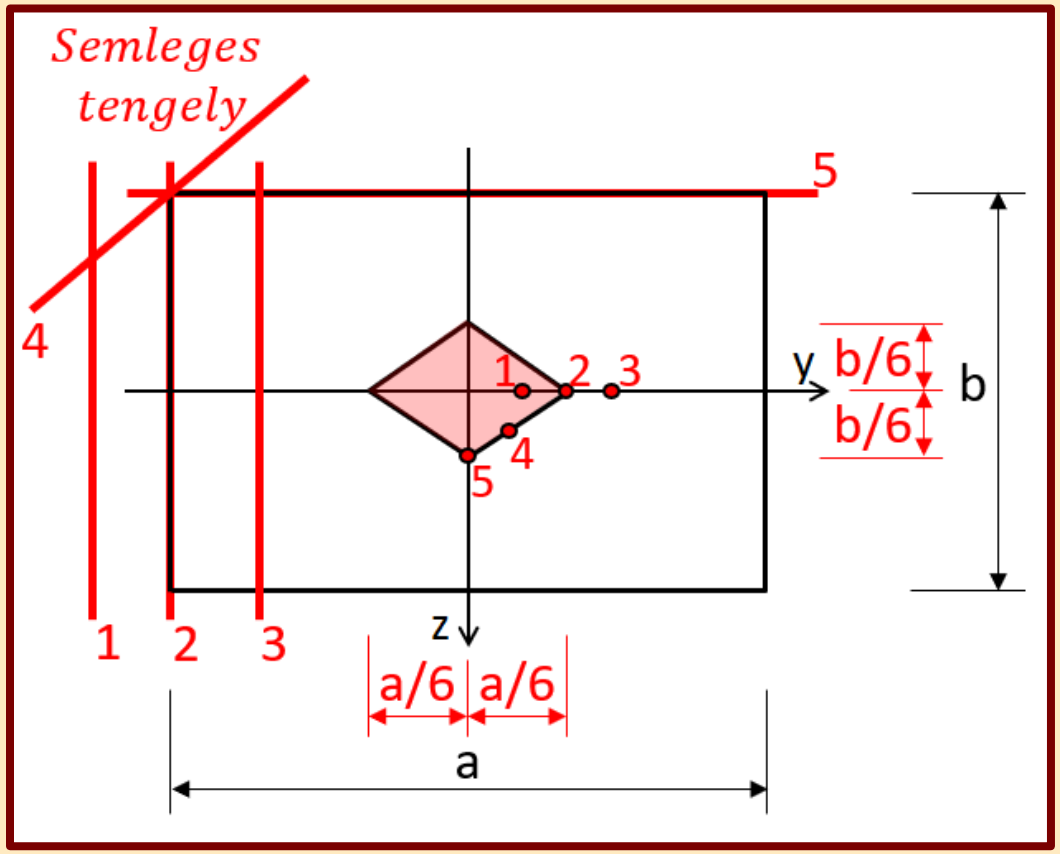
- A külpontosság bizonyos értéke az erővel átellenes oldalon húzást okoz.
- A külpontosan nyomott km.-ek azon pontjainak összességét, amelyeken a nyomóerőt működtetve a km.-ben nem keletkezik húzófeszültség, belső magnak hívjuk.
- Egyes építőanyagok nem képesek húzófeszültségek elviselésére (pl. beton, tégla, kő). A belső magon kívüli terhelés repedést, a húzott tartomány teherviselésből történő kiesését okozza.

$$\sigma_x = -\frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} \cdot y = 0$$

$$\sigma_x = -\frac{N}{a \cdot b} + \frac{N \cdot e_z}{\frac{a^3 \cdot b}{12}} \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$-\frac{1}{a \cdot b} + \frac{e_z}{\frac{a^3 \cdot b}{6}} \cdot a = 0$$

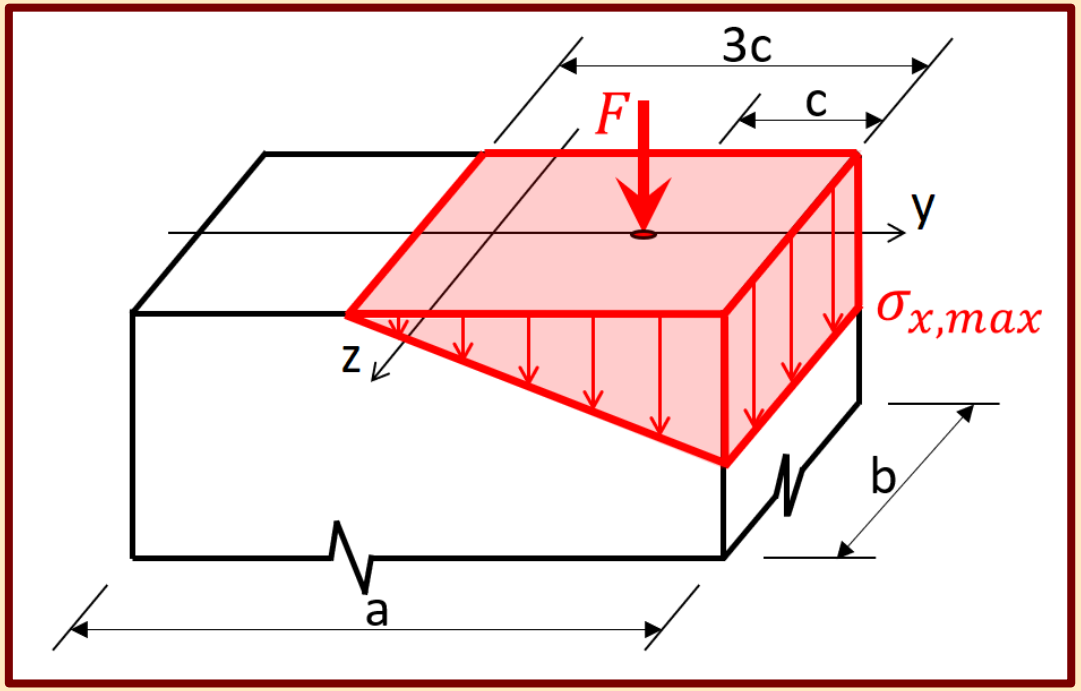
$$e_z = \frac{a}{6}$$

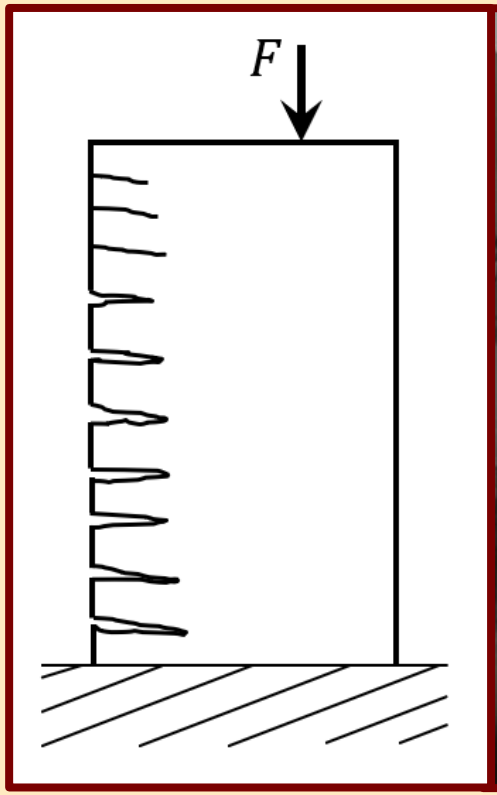


A CSAK NYOMÁSNAK ELLENÁLLÓ ANYAGÚ KERESZTMETSZETEK

- A belső magon kívüli teher esetén a km.-ben húzófeszültségek ébrednének, amelyek nem tudnak létrejönni (a test megreped, a kapcsolat megszűnik).
- Csak nyomófeszültségek alakulnak ki, a belőlük megvalósuló feszültségi test eredője lesz a terhelő erő. A teher nagysága a feszültségi test térfogatával egyenlő, hatását a súlypontjában fejti ki.

$$N = \frac{\sigma_{x,max} \cdot 3 \cdot c \cdot b}{2} \rightarrow \sigma_{x,max} = \frac{2 \cdot N}{3 \cdot c \cdot b}$$





Tartószerkezetek mechanikája II.

13.

Általános szilárdságtan:
Hooke-törvény, hőmérséklet-változás hatása

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

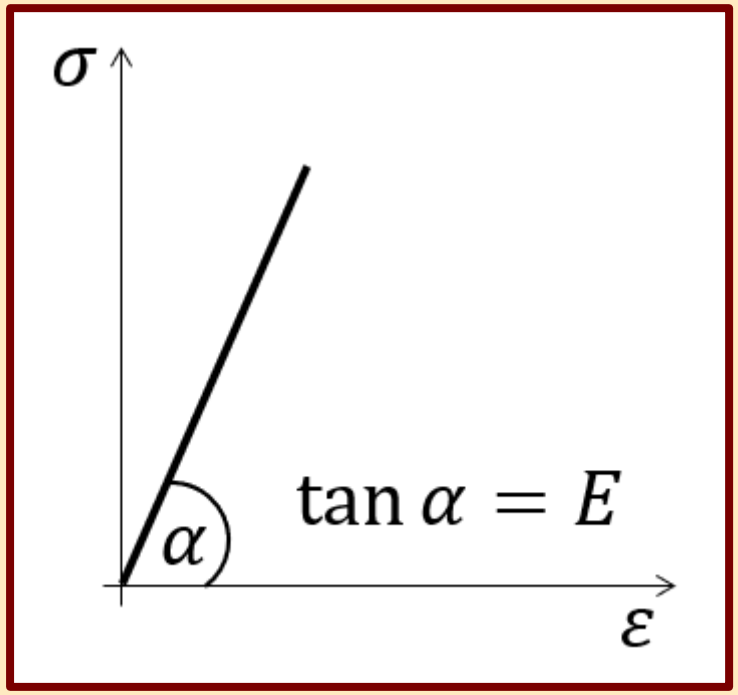
AZ EGYSZERŰ HOOKE-TÖRVÉNY ÉRTELMEZÉSE

- Lineárisan rugalmas, izotróp anyagok viselkedését modellezük vele.
- Anyagtörvényként, a feszültségek és az alakváltozások közötti összefüggést teremti meg. Lineáris, vagyis egyenes arányossági viszonyt állít fel közöttük.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\tau = G \cdot \gamma$$

E – rugalmassági modulus,
G – nyírási rugalmassági modulus,



- A harántkontrakció, vagyis a keresztirányú alakváltozás:

$$\varepsilon_k = -\nu \cdot \varepsilon$$

A feszültségre merőleges irányban egy kisebb ellentett előjelű fajlagos megnyúlás keletkezik.
ν – Poisson (harántkontrakciós)-tényező

A FAJLAGOS MEGNYÚLÁSOK SZÁMÍTÁSA

Egy test egy választott pontját egységnyi méretekkel rendelkező hasábként vizsgáljuk, ahol az egyes feszültségek mindhárom irányban okoznak alakváltozásokat.

- Fajlagos megnyúlások a σ_x hatására:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

- Fajlagos megnyúlások a σ_y hatására:

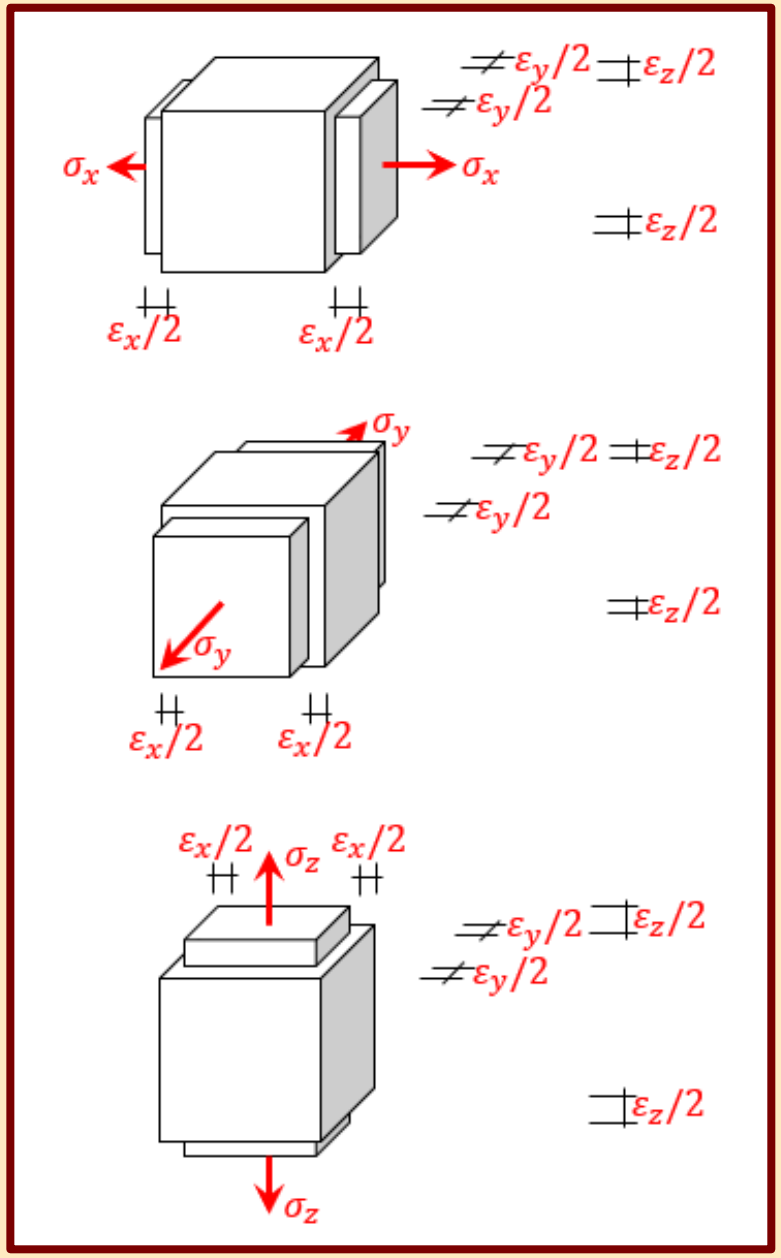
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_x = -\nu \cdot \varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E}$$

- Fajlagos megnyúlások a σ_z hatására:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E}$$



AZ ÁLTALÁNOS HOOKE-TÖRVÉNY ÉRTELMEZÉSE

- Az egyes irányokban keletkező fajlagos megnyúlások értékére hatással van mindhárom, egymásra merőleges síkban keletkező feszültség.
- Az általános Hooke-törvény ezt figyelembe veszi, valamint továbbra is lineáris kapcsolatot létesít ezen feszültségek és az alakváltozások között.
- A nyírófeszültségek és az általuk okozott szögtorzulások között is lineáris kapcsolatot fogalmaz meg.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \;\; ; \;\; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \;\; ; \;\; \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

AZ ÁLTALÁNOS HOOKE-TÖRVÉNY HŐMÉRSÉKLET-VÁLTOZÁS ESETÉN

- A hőmérséklet-változás okozta alakváltozások a feszültségektől függetlenül alakulnak ki, létrejövetelük reverzibilis folyamat.
- Minden irányban azonos fajlagos megnyúlást okoz, szögtorzulás a hőmérséklet-változás hatására nem jön létre a test pontjaiban.
- A fajlagos megnyúlás értéke az anyagi viselkedéstől (α-hőtágulási együttható) és a hőmérséklet-változástól (ΔT) függ.

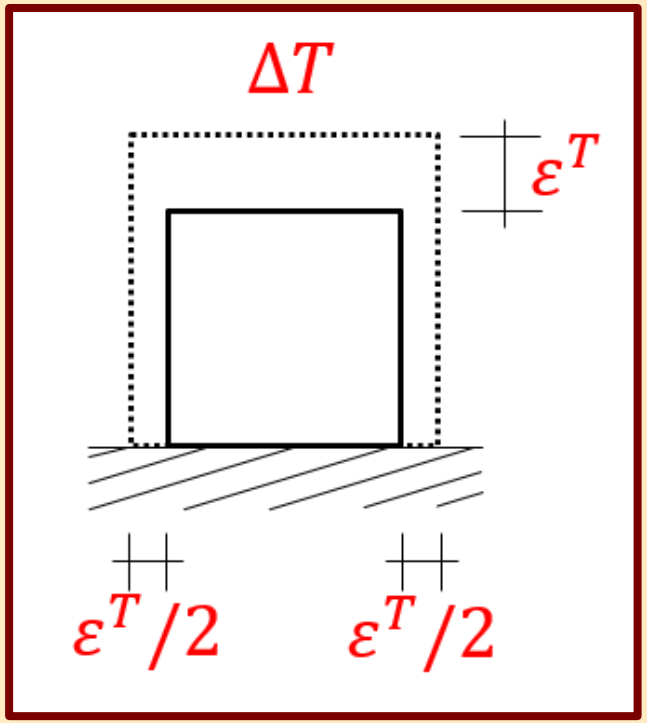
$$\varepsilon_x^T = \varepsilon_y^T = \varepsilon_z^T = \alpha \cdot \Delta T \quad ; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

- A hőmérséklet-változással kibővített általános Hooke-törvény:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \nu \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \nu \cdot \left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_z - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T$$



A SZABAD ÉS A GÁTOLT HŐTÁGULÁS

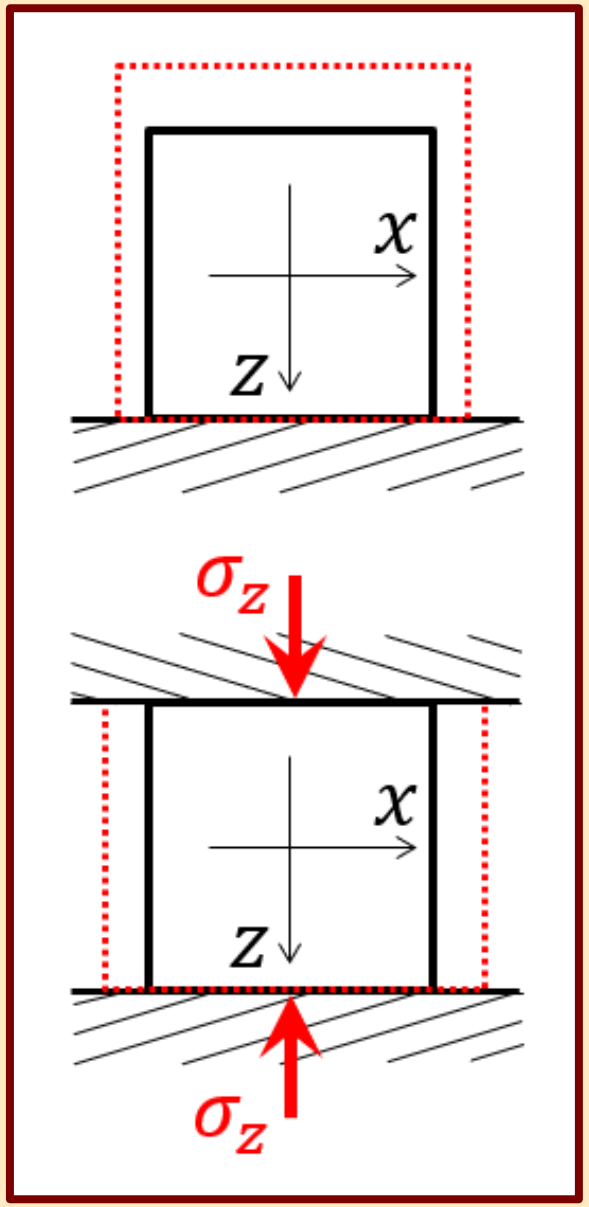
- Ha a test egy pontjában a hőmérséklet-változás hatására kialakuló alakváltozás adott irányban szabadon megvalósulhat, akkor abban az irányban ennek hatására nem keletkezik feszültség, és szabad hőtágulásról beszélünk.

$$\varepsilon_x = \alpha \cdot \Delta T \;\rightarrow\; \sigma_x = 0$$
$$\varepsilon_z = \alpha \cdot \Delta T \;\rightarrow\; \sigma_z = 0$$

- Ha a test egy pontjának valamely irányában megakadályozzuk a hőmérséklet-változás hatására kialakuló alakváltozás létrejöttét, akkor abban az irányban ennek hatására feszültség keletkezik, és gátolt hőtágulásról beszélünk.

$$\varepsilon_x = \alpha \cdot \Delta T - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \neq 0 \rightarrow \;\sigma_x = 0$$

$$\varepsilon_z = \alpha \cdot \Delta T + \frac{\sigma_z}{E} = 0 \rightarrow \;\sigma_z = -\alpha \cdot \Delta T \cdot E$$

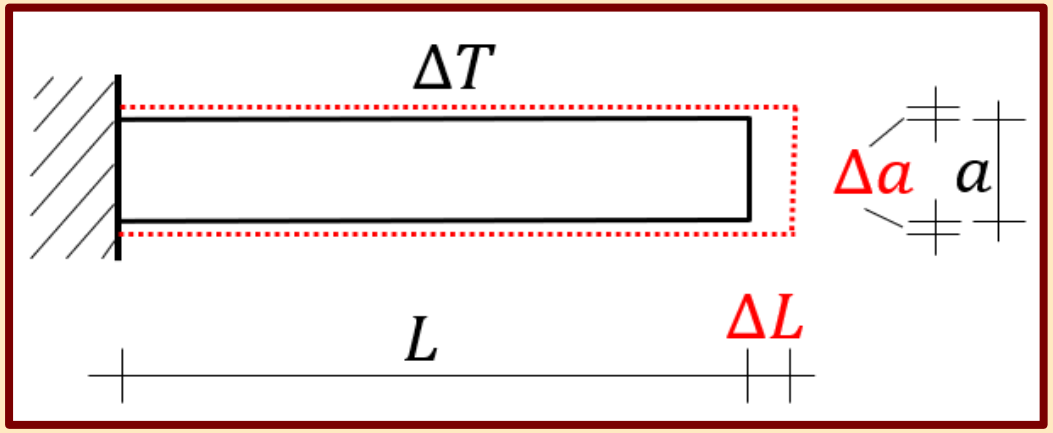


TARTÓK HŐTÁGULÁSA

- Ha a hőmérséklet-változás hatására kialakuló alakváltozások szabadon létrejöhetnek, a tartóban nem keletkeznek ennek hatására feszültségek és igénybevételek:

$$\Delta L = \varepsilon \cdot \mathrm{L} = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\Delta a = \varepsilon \cdot \mathrm{a} = \alpha \cdot \Delta T \cdot a$$



- Ha a hőmérséklet-változás hatására kialakuló alakváltozások létrejötte gátolva van, a tartóban ennek hatására feszültségek és igénybevételek keletkeznek:

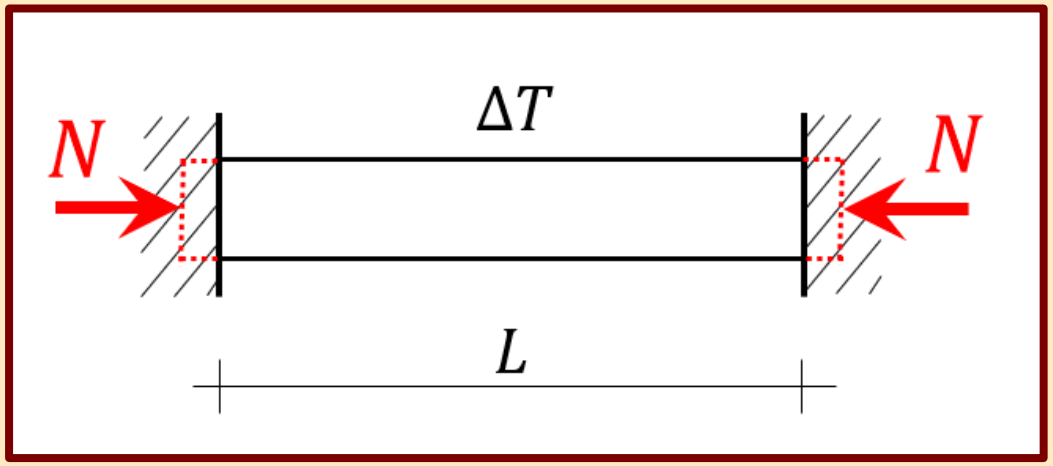
$$\Delta L = 0$$

$$\Delta L = \Delta L^T + \Delta L^N = 0$$

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L + \frac{N \cdot L}{E \cdot A} = 0$$

$$N = -\alpha \cdot \Delta T \cdot E \cdot A$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = -\alpha \cdot \Delta T \cdot E$$



Tartószerkezetek mechanikája II.

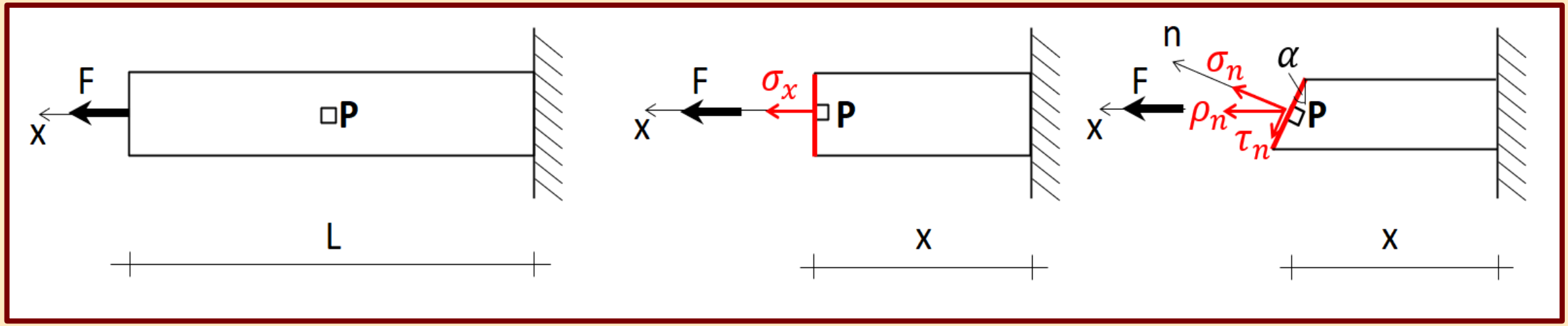
14.

Általános szilárdságtan:
Feszültségi állapot, főfeszültségek

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

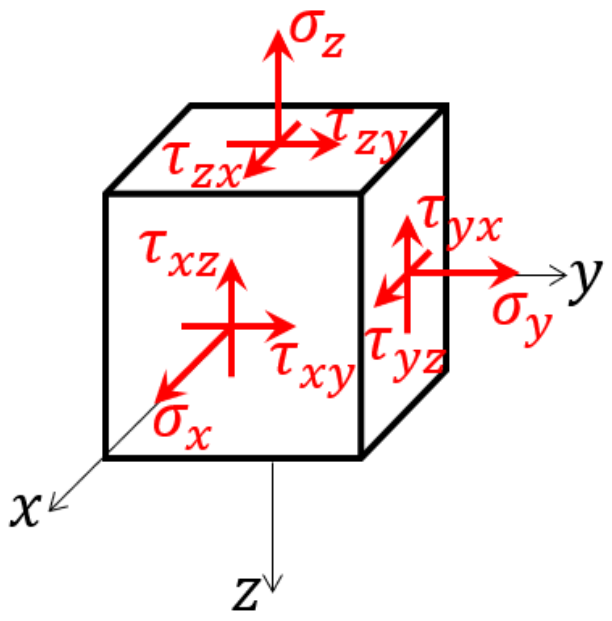
EGY PONT FESZÜLTSÉGEINEK ÉRTELMEZÉSE

- Eddigiekben a feszültségeket a km.-i síkokban értelmeztük az egyszerű kezelhetőség érdekében, de ettől eltérő helyzetű metszősíkokban is ébrednek feszültségek ugyanabból a hatásból.
- Tehát a test egy pontjának feszültsége nem csak a pontnak a tartóban elfoglalt helyzetétől, hanem a hozzárendelt sík állásától is függ.
- Ha a pont km-i síkjában együttesen ébred jelentős normál- és nyírófeszültség, vagy nem rúdszerkezetről van szó, akkor szükség lehet erre az értelmezésre.



EGY PONT FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOTÁNAK ÉRTELMEZÉSE

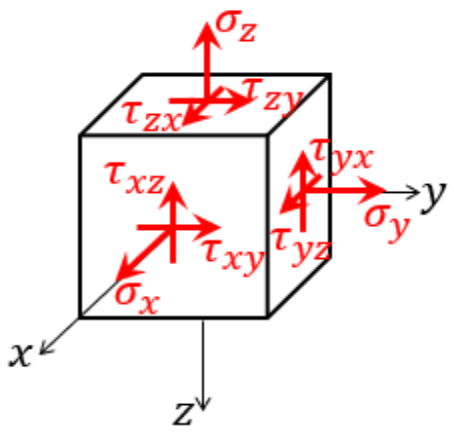
- Egy pont feszültségi állapotán a ponthoz hozzárendelhető valamennyi metszősíkon keletkező feszültségek összességét értjük.
- Valamennyi lehetséges metszősík feszültségét ismertnek minősítjük, ha a ponton keresztül három kölcsönösen merőleges metszősíkpárt (elemi hasáb) veszünk fel és az ezekhez a síklapokhoz tartozó feszültségeket ismerjük.
- A három síklap pár mindegyikén három feszültségkomponens keletkezhet. Tehát összesen 9 (3×3) feszültségkomponens szükséges a síklap hármason a pont feszültségi állapotának ismeretéhez, melyből a dualitás miatt csak 6 független adat.
- A feszültségeket egy mátrixba rendezve kapjuk a feszültségi állapotot jellemző feszültségtenzort.



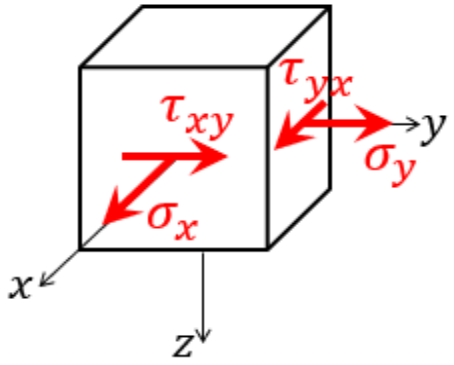
$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

A FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT TÍPUSAI

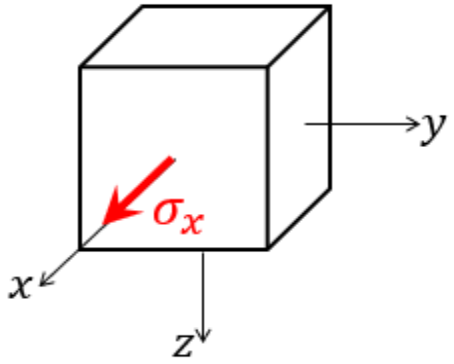
- Térbeli feszültségi állapot: nem tudunk a ponton keresztül feszültségmentes síkot felvenni. A feszültségvektorok általános térbeli állásúak.
- Síkbeli feszültségi állapot: a ponton keresztül egy feszültségmentes síkot tudunk felvenni. A feszültségvektorok egy síkra illeszkednek.
- Lineáris feszültségi állapot: a ponton keresztül két feszültségmentes síkot tudunk felvenni. A feszültségvektorok egy egyenesre illeszkednek.



$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



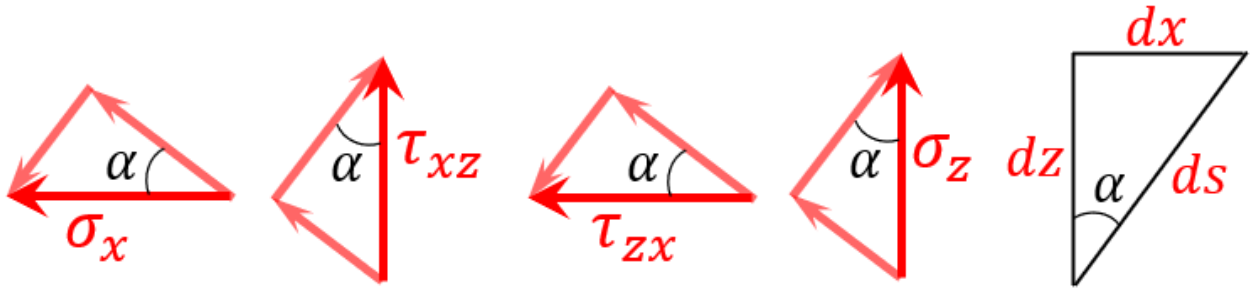
$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



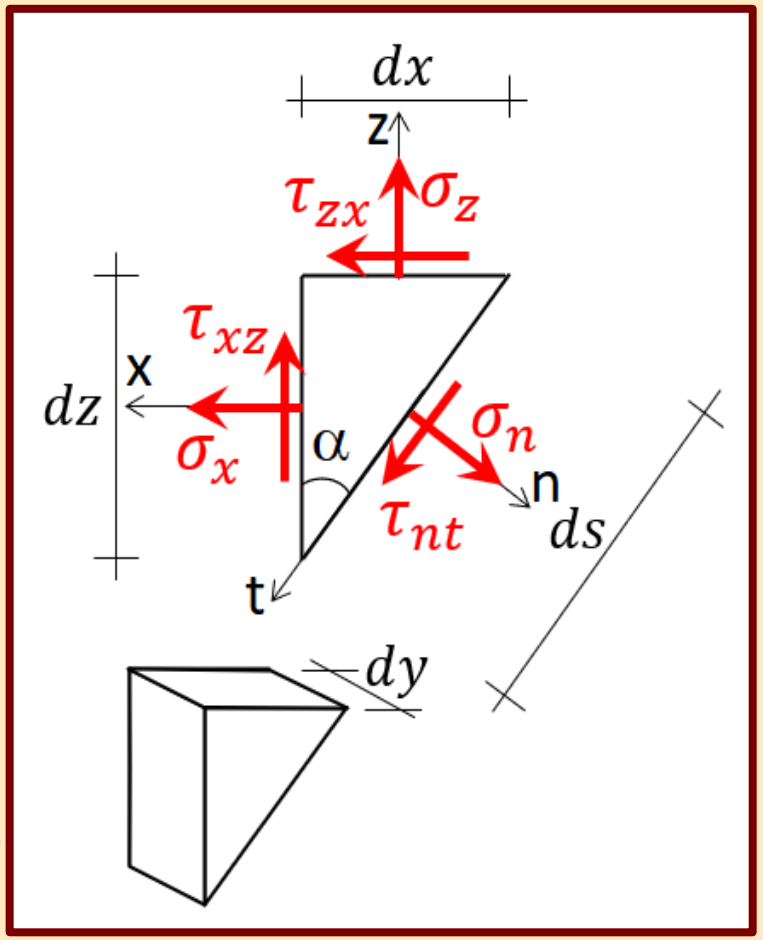
$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SÍKBELI FESZÜLTSÉGTRANSZFORMÁCIÓ

- Az α szöggel elfordított helyzetű, n normálisú sík feszültségei, a pontra fektetett síklapokra ható feszültségek (n és t irányú vetületi) egyensúlya alapján:



$$dz = ds \cdot \cos\alpha$$
$$dx = ds \cdot \sin\alpha$$



$$\sigma_n \cdot dy \cdot ds = \sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \cos\alpha + \tau_{xz} \cdot dy \cdot dz \cdot \sin\alpha + \\ + \sigma_z \cdot dy \cdot dx \cdot \sin\alpha + \tau_{zx} \cdot dy \cdot dx \cdot \cos\alpha$$

$$\tau_{nt} \cdot dy \cdot ds = -\sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \sin\alpha + \tau_{xz} \cdot dy \cdot dz \cdot \cos\alpha + \\ + \sigma_z \cdot dy \cdot dx \cdot \cos\alpha - \tau_{zx} \cdot dy \cdot dx \cdot \sin\alpha$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_{xz} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \sigma_z \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha + \tau_{zx} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\tau_{nt} = -\sigma_x \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_{xz} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sigma_z \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{zx} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha + \sigma_z \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot \tau_{zx} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\tau_{nt} = -\sigma_x \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_{xz} \cdot \cos^2\alpha + \sigma_z \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{zx} \cdot \sin^2\alpha$$

A felhasználandó trigonometrikus azonosságok:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,;\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos(2\alpha);\ 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin(2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\alpha)\,;\ \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha)$$

Elvégezve a behelyettesítést:

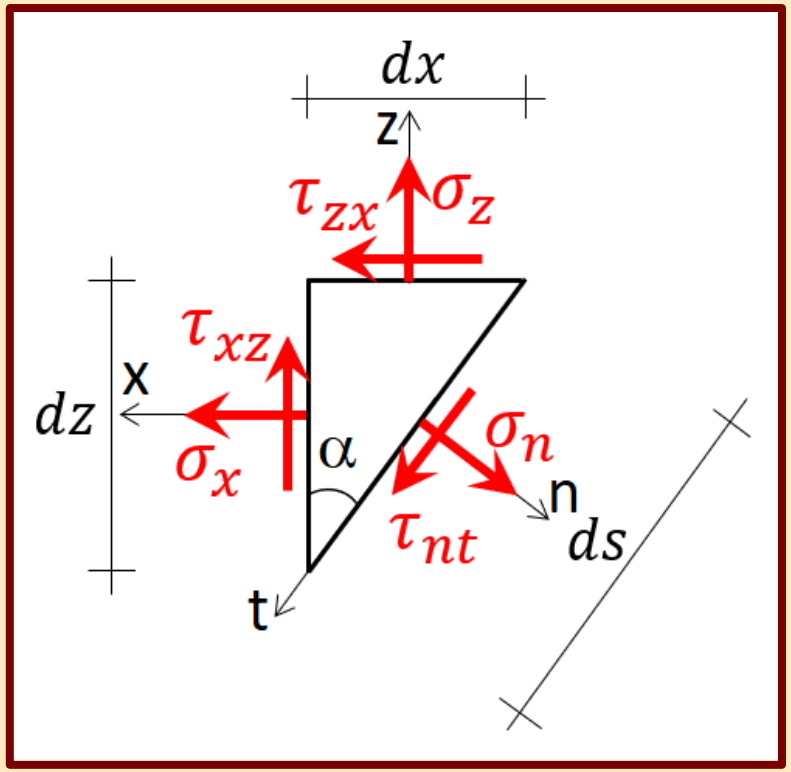
$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cdot \cos 2\alpha + \frac{\sigma_z}{2} - \frac{\sigma_z}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xz} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_{xz} \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Az n normálisú sík feszültségei:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cdot \cos(2\alpha) + \tau_{xz} \cdot \sin(2\alpha)$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cdot \sin(2\alpha) + \tau_{xz} \cdot \cos(2\alpha)$$



FŐFESZÜLTSÉGEK

- Az n-t koordinátarendszert elforgatva az egyes síkokhoz tartozó feszültségek az elfordítási szög függvényében változnak.
- Valamennyi érték közül a normálfeszültségek szélső értékeit keressük, vagyis azok maximumát és minimumát. Ezeket a szélső értékeket főfeszültségeknek nevezzük. Azokat a síkokat, amelyekben ezek a feszültségek kialakulnak, főfeszültségi síkoknak, a normálisukba eső tengelyeket főtengelyeknek, az általuk meghatározott irányokat főirányoknak hívjuk.
- A függvény első deriváltja null értékénél vannak a lehetséges szélső értékek.

$$\frac{d\sigma_{n(\alpha)}}{d\alpha} = \frac{d\left(\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xz} \cdot \sin 2\alpha\right)}{d\alpha} = 0$$

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha = 0$$ (2-vel osztva a τ_{nt}–t kapjuk meg.)

$$\tau_{nt} = 0$$

- Tehát, amelyik sík nyírófeszültsége nulla, ott a normálfeszültségeknek szélső értéke van.

FŐFESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA

- A főtengelyeknek a kiindulási koordinátarendszer tengelyeivel bezárt szöge:

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cdot \sin(2\alpha) + \tau_{xz} \cdot \cos(2\alpha) = 0$$

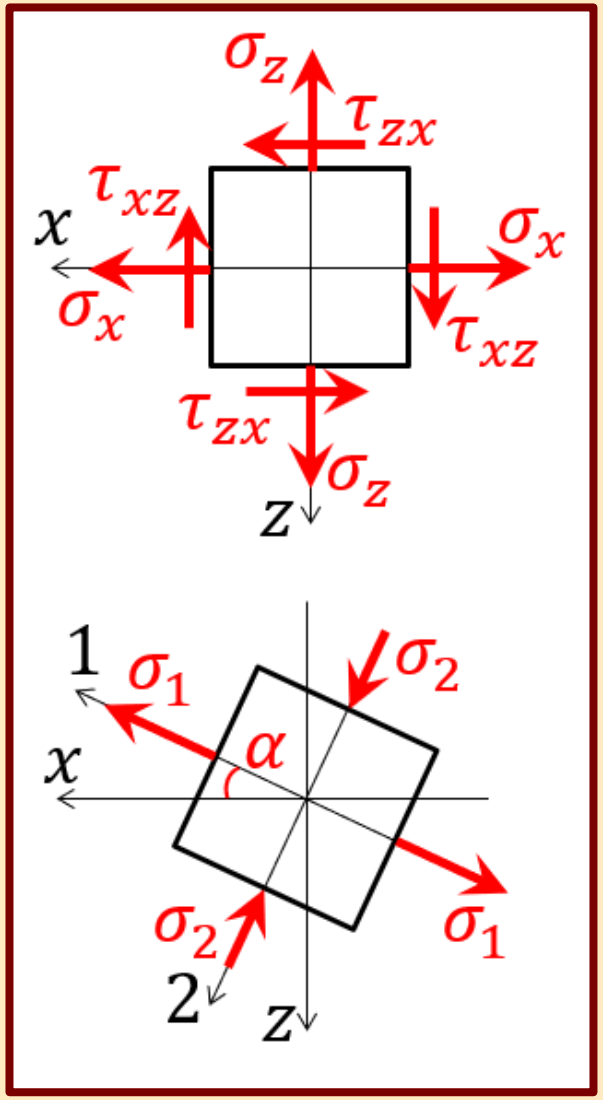
$$\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cdot \sin 2\alpha = \tau_{xz} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}$$

- A főfeszültségek értékei a levezetés mellőzésével:

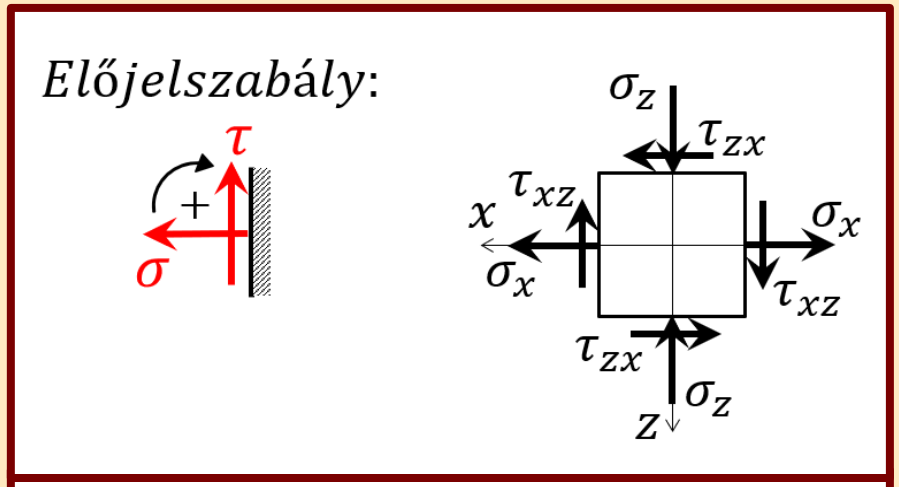
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2}$$

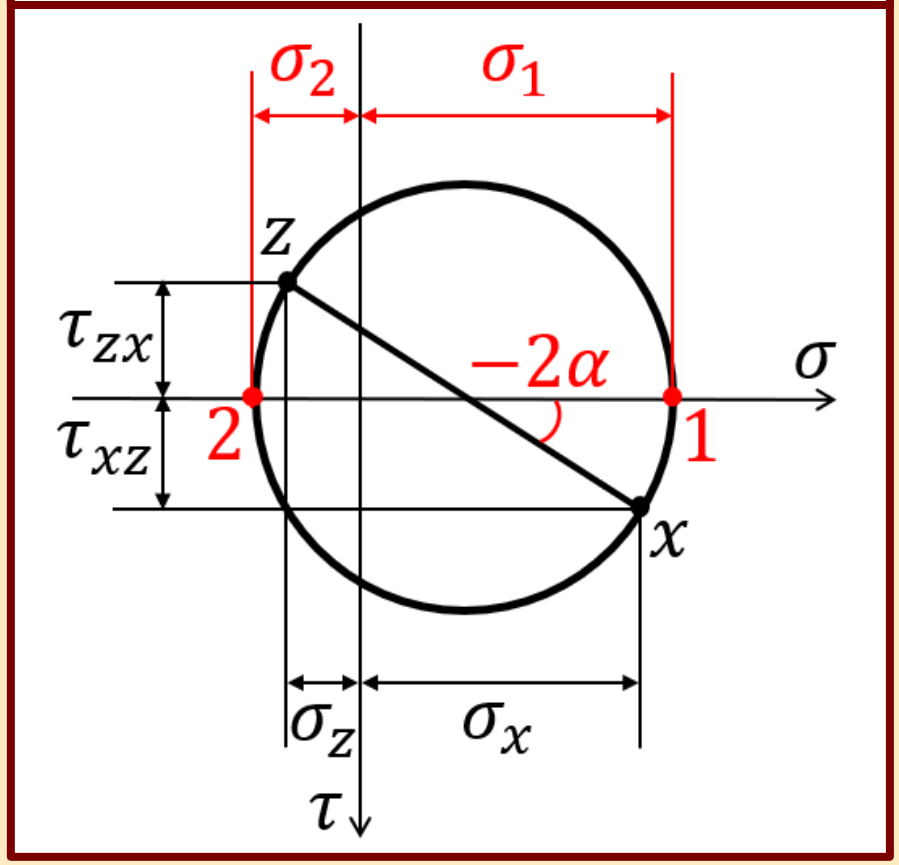
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2}$$



FESZÜLTSÉGI MOHR-KÖR

- Egy σ-τ koordinátarendszerben ábrázolva a ponton át felvehető síkok normál- és nyírófeszültségi értékeit, azok egy kör kerületére rendeződnek. Ezt a kört feszültségi Mohr-körnek nevezzük.
- Első lépésként a kiindulási (x és z normálisú) síkpárra számított feszültségeket mérjük fel. A felrajzolt két pontot (x és z) összekötve kapjuk meg a kör átmérőjét, amely segítségével a kör megrajzolható.
- A kör minden egyes átmérőjének végpontjai egy a ponton át felvehető síkpár feszültségeit adják meg koordinátáikkal.
- A kör átmérői közt mért (középponti) szög a km.-ben feleakkoraként működik.





FŐFESZÜLTSÉGEK MEGHATÁROZÁSA MOHR-KÖRREL

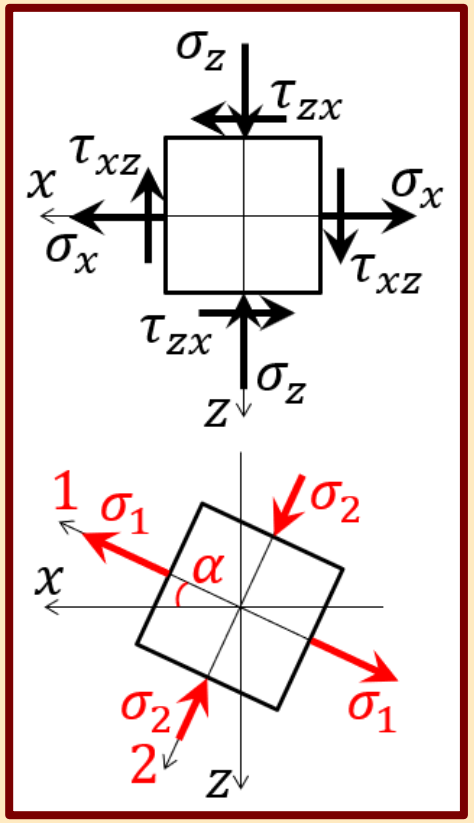
- A kör és a vízszintes tengely metszéspontjai szolgáltatják a pont főfeszültségi értékeit. A kör kerületi pontjai közül ezeknek a legkisebb és legnagyobb a vízszintes koordinátája, amelyek a normálfeszültségek szélső értékei. A nyírófeszültség ezekben a pontokban nulla.
- A főfeszültségek a kör alapján:

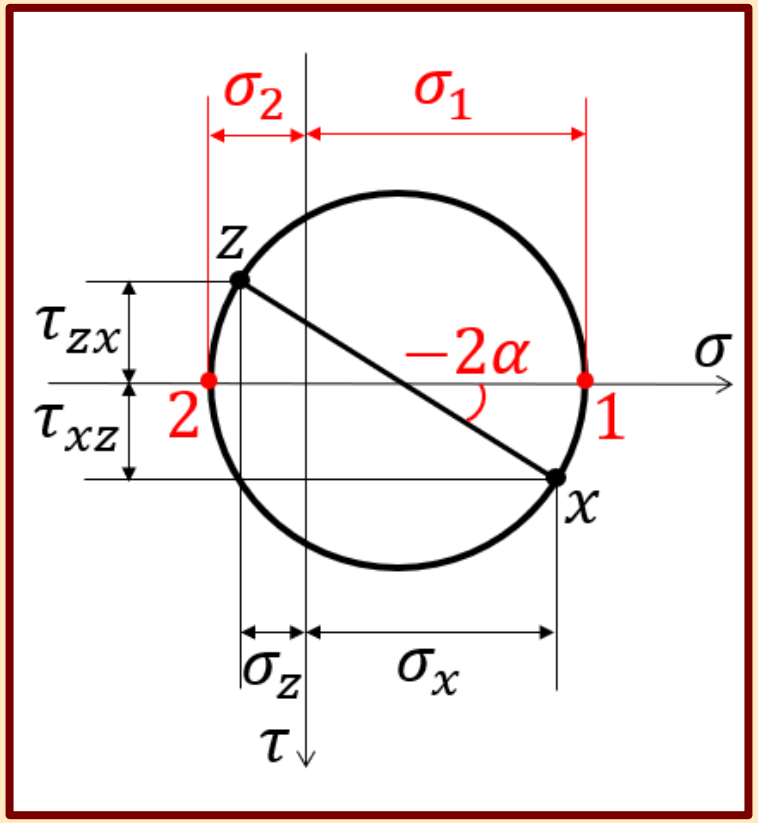
$$\sigma_1 = \underbrace{\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}}_{kör\ középpontja} + \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2}}_{kör\ sugara}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + {\tau_{xz}}^2}$$

- Az elfordulási szög a kör alapján:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}$$





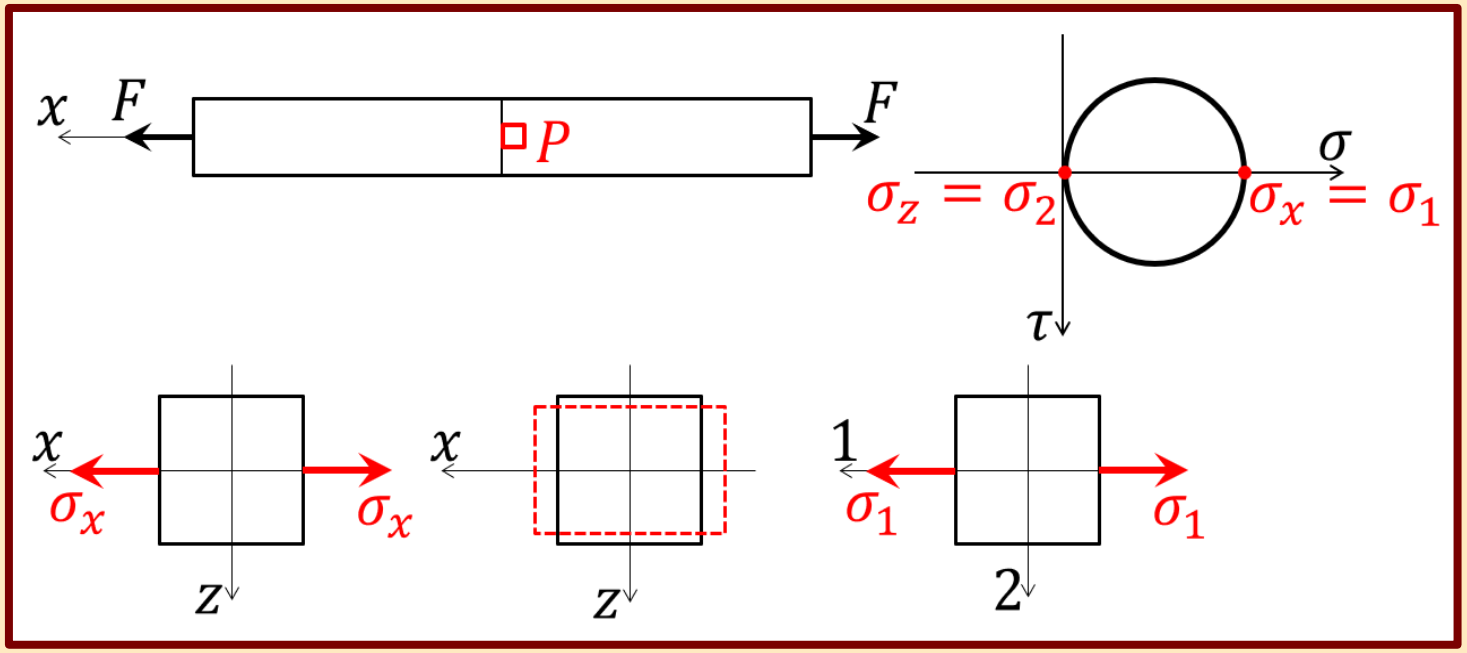
SPECIÁLIS FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOTOK FŐFESZÜLTSÉGEI

- Tiszta húzás feszültségi állapota:

$$\sigma_1 = \sigma_x$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 0$$

$$\alpha_{x-1} = 0$$

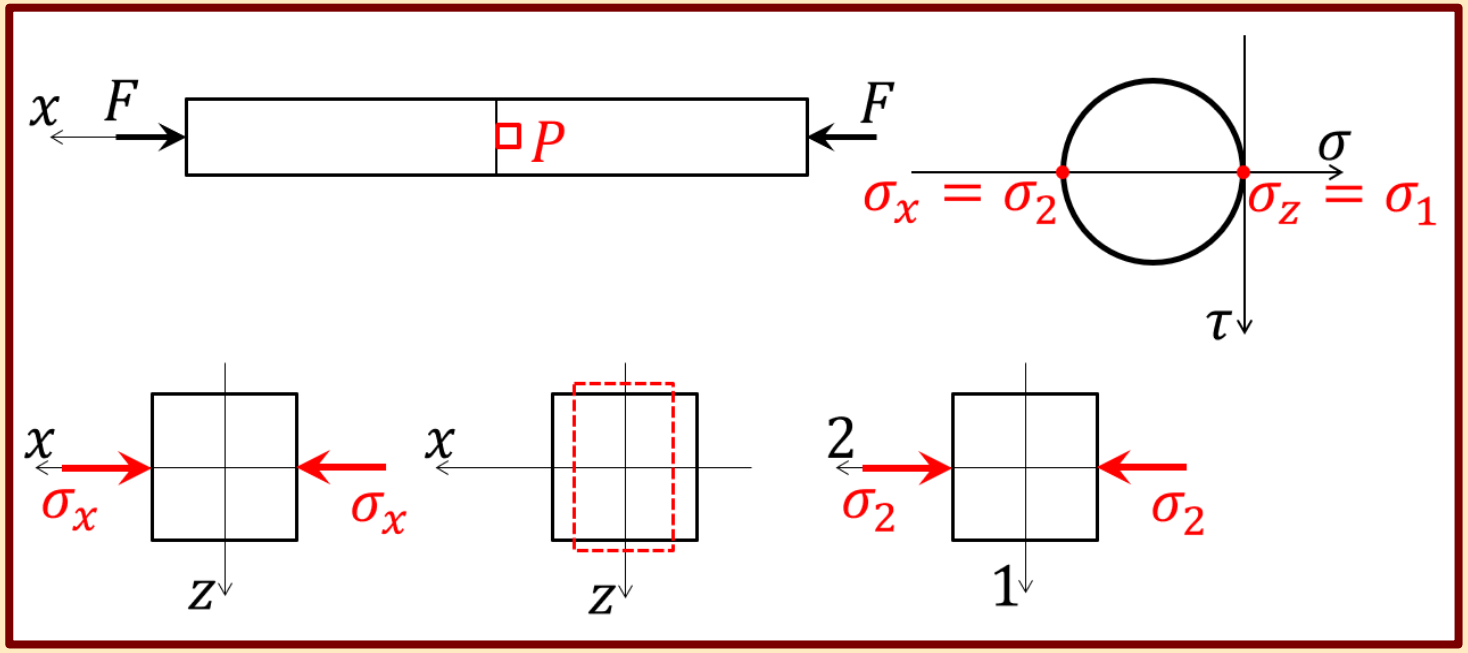


- Tiszta nyomás feszültségi állapota:

$$\sigma_1 = \sigma_z = 0$$

$$\sigma_2 = \sigma_x$$

$$\alpha_{x-1} = 90°$$



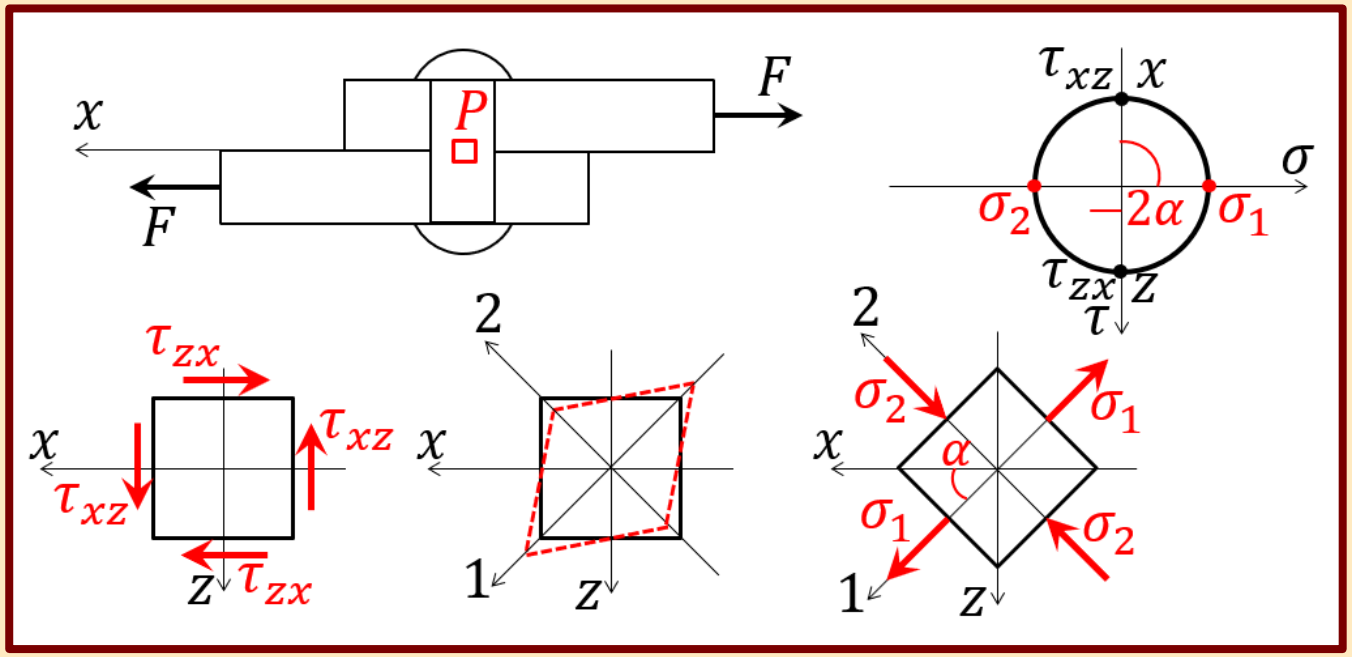
- Tiszta nyírás feszültségi állapota:

$$\tau_{xz} = -\tau_{zx} \ \ (dualitás)$$

$$\sigma_1 = \tau_{zx}$$

$$\sigma_2 = \tau_{xz}$$

$$\alpha_{x-1} = -45°$$

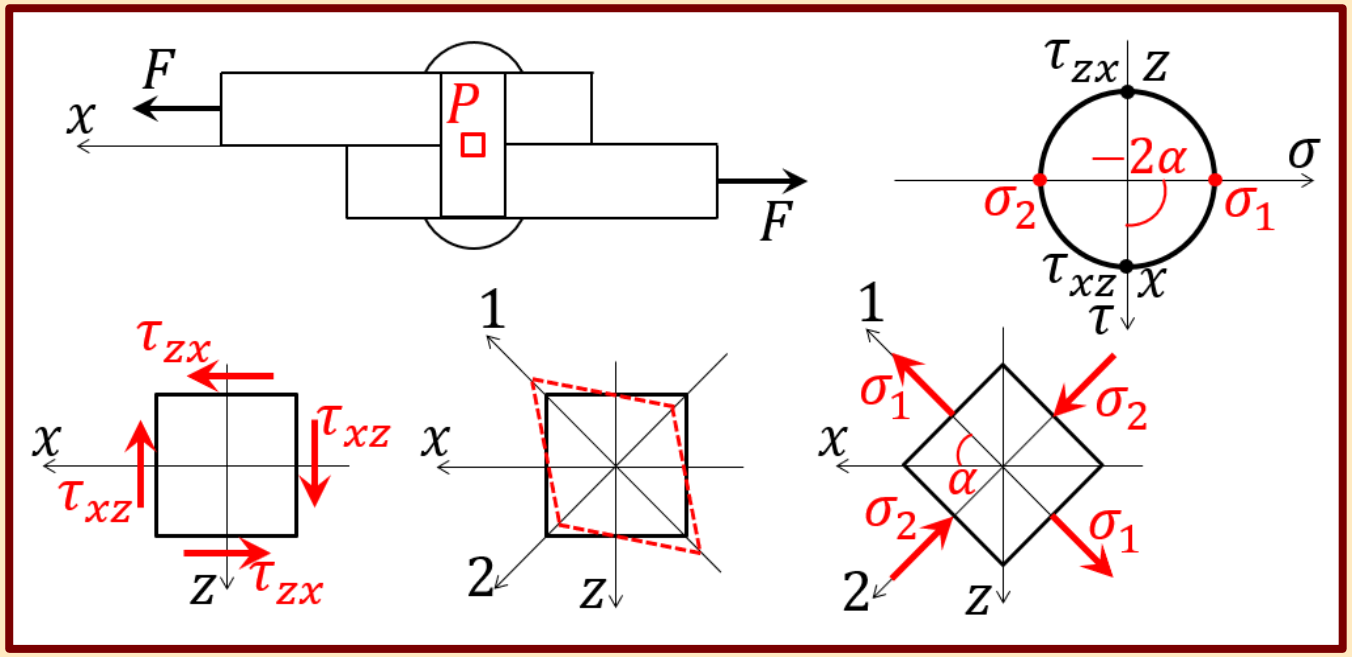


$$\tau_{xz} = -\tau_{zx} \ \ (dualitás)$$

$$\sigma_1 = \tau_{xz}$$

$$\sigma_2 = \tau_{zx}$$

$$\alpha_{x-1} = 45°$$

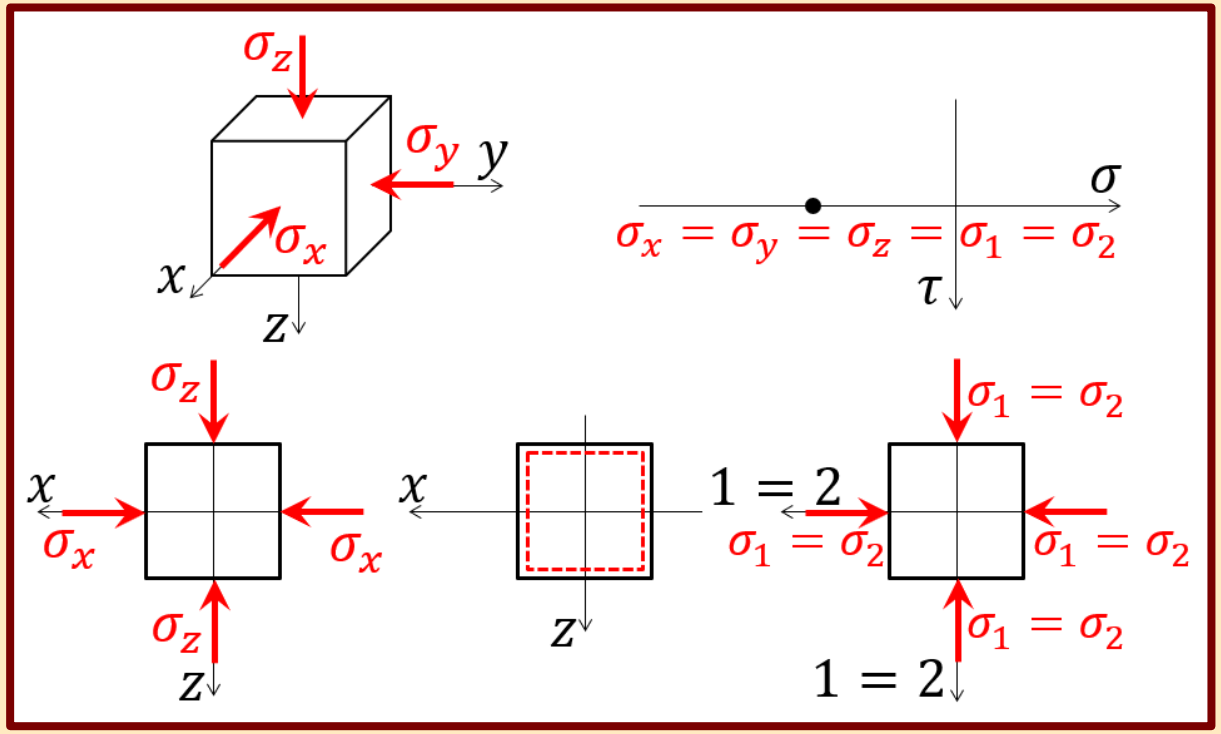


- Hidrosztatikai feszültségi állapot:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$$

A Mohr-kör egy ponttá zsugorodik.

Folyadékok feszültségi állapotára jellemző.

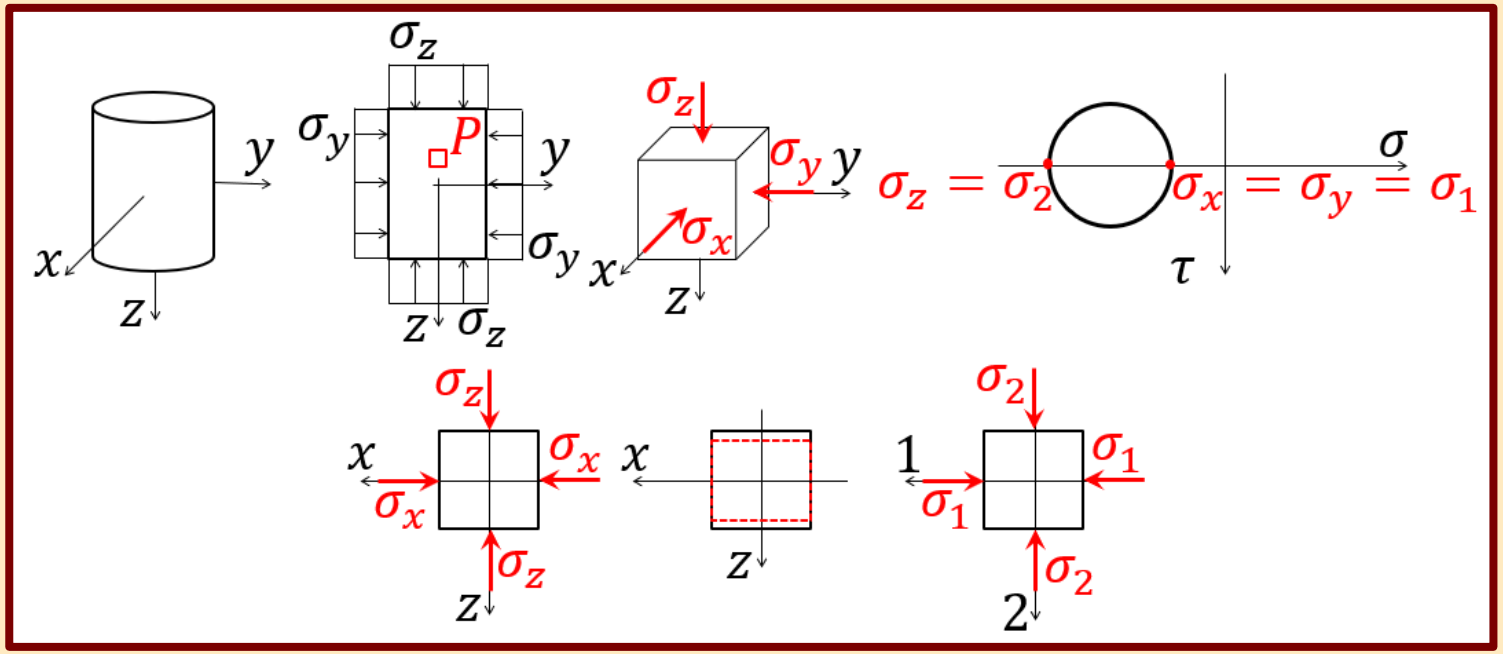


- Tengelyszimmetrikus feszültségi állapot:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \sigma_y$$

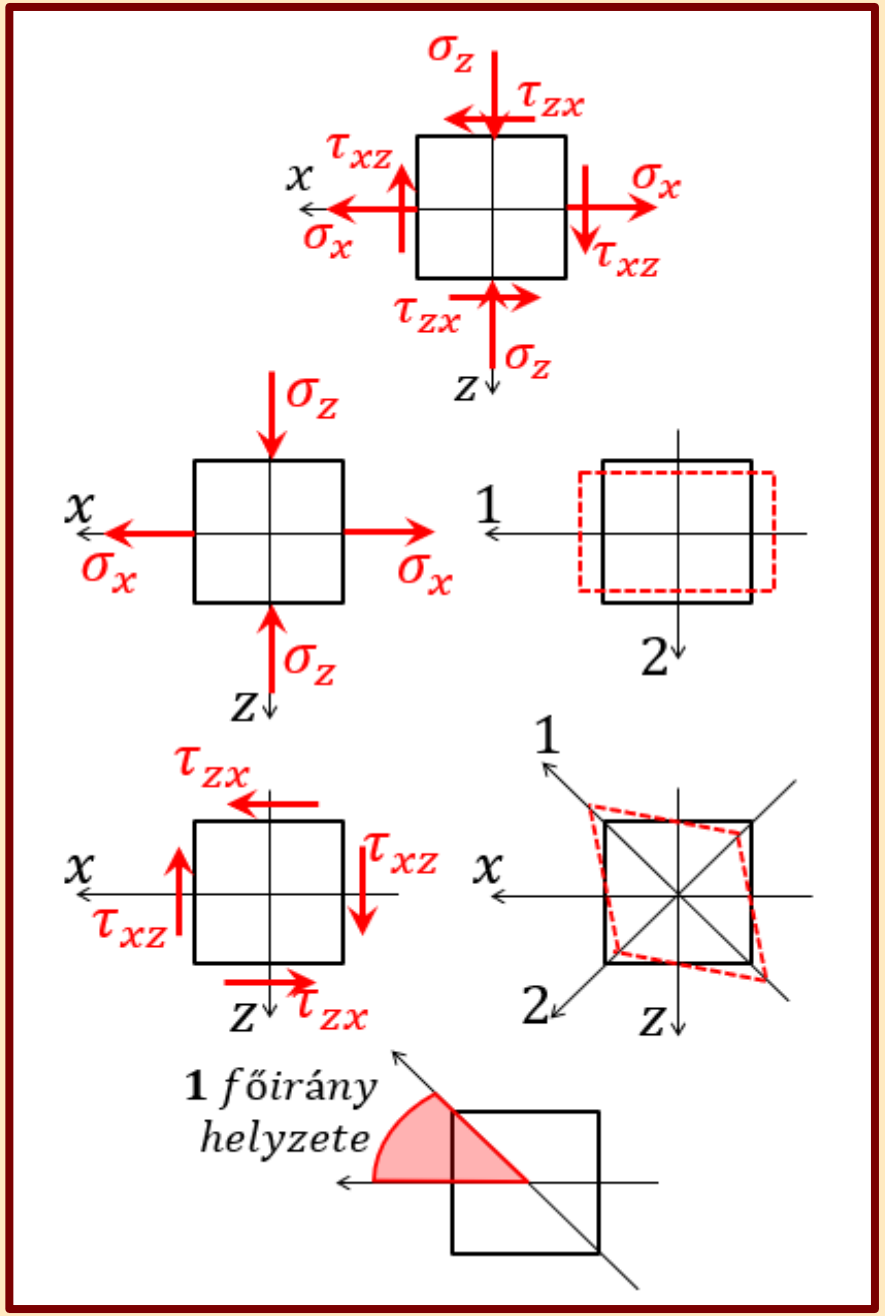
$$\sigma_2 = \sigma_z$$

Talajmechanikai vizsgálatoknál fordul elő.



FŐIRÁNYOK KÖZELÍTÉSE

- A tiszta húzás, nyomás és tiszta nyírás feszültségi állapota esetén a főirányok helyzete könnyen megállapítható szemléletből, az alakváltozások alapján. A keletkező legnagyobb és legkisebb megnyúlások irányában alakulnak ki a legnagyobb és legkisebb feszültségek is, vagyis a főfeszültségek.
- Általános esetben a feszültségi állapotot az előző esetek egymásrahalmozásával is vizsgálhatjuk és a főirányok helyzetét is ennek megfelelően közelíthetjük. Ez a legtöbb esetben egy 45°-os szögtartományra való leszűkítést jelent.



GERENDA EGY PONTJÁNAK FŐFESZÜLTSÉGEI

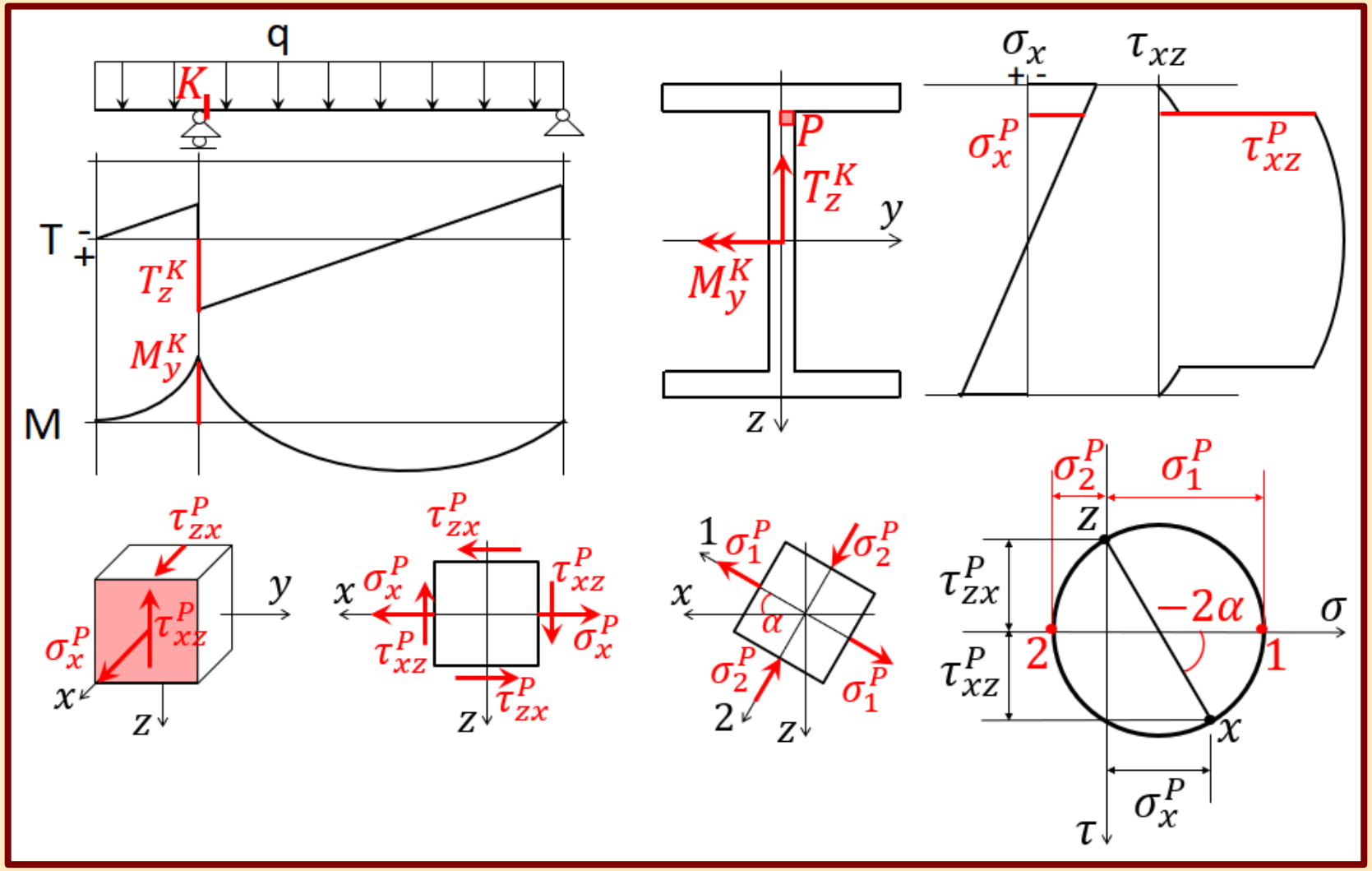
- A K km. P pontjának feszültségei:

$$\tau_{xz}^{P} = \frac{S_y' \cdot T_z^K}{I_y \cdot b}$$

$$\sigma_x^{P} = \frac{M_y^K}{I_y} \cdot z_P$$

- A P pont főfeszültségei:

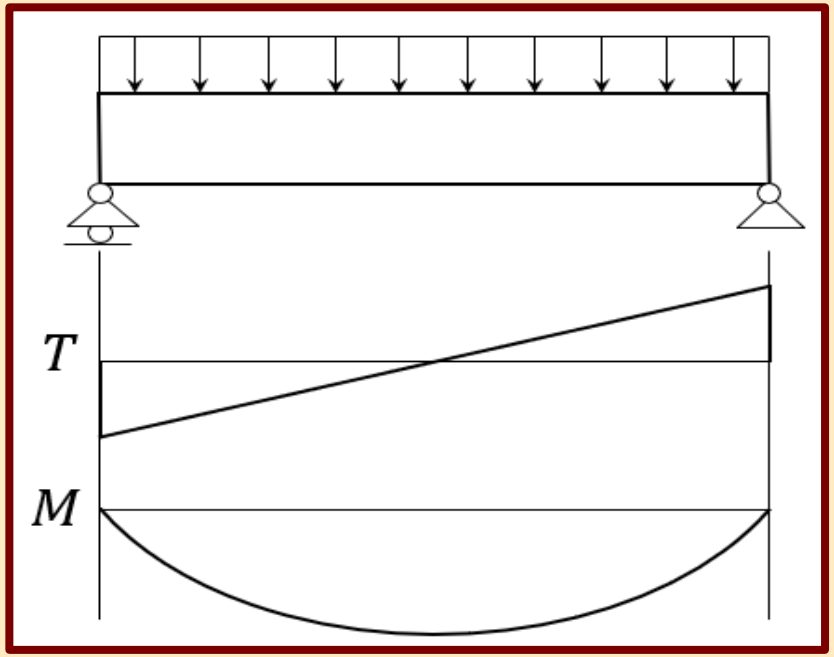
$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xz}^{P}}{\sigma_x^{P} - 0}$$

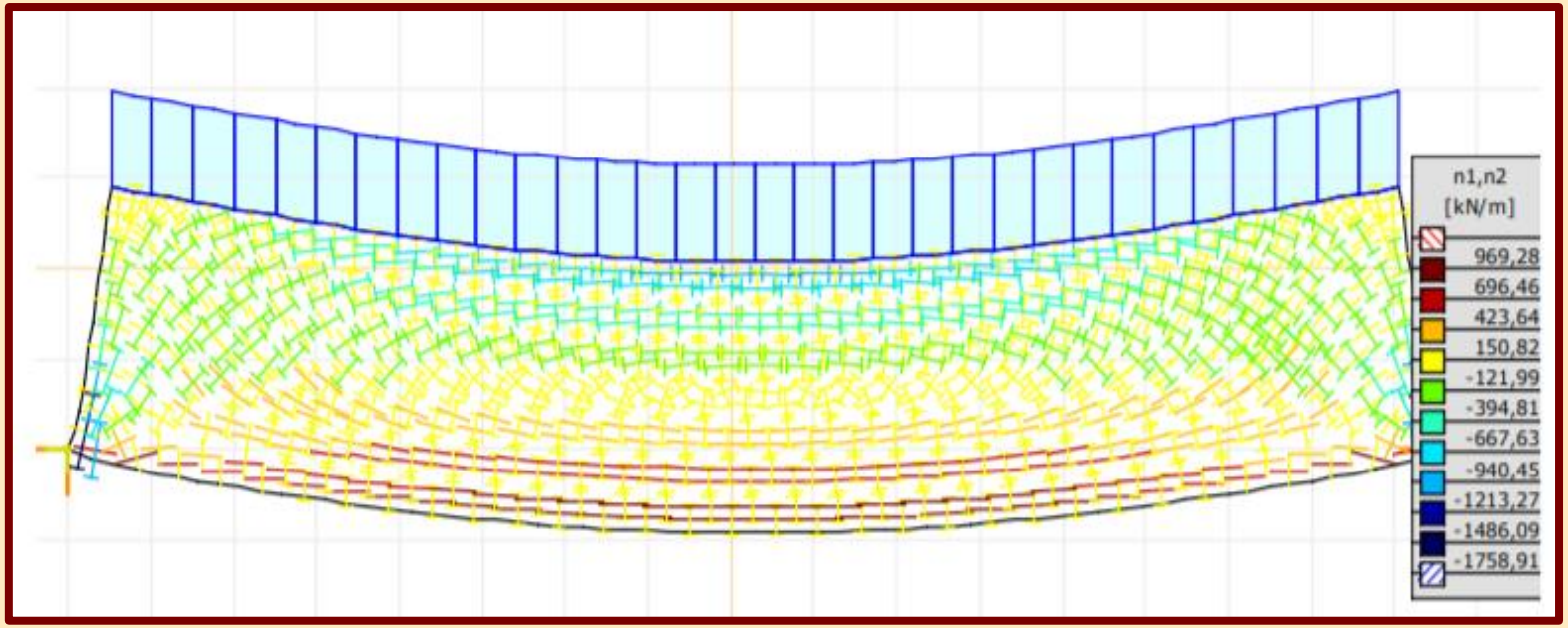


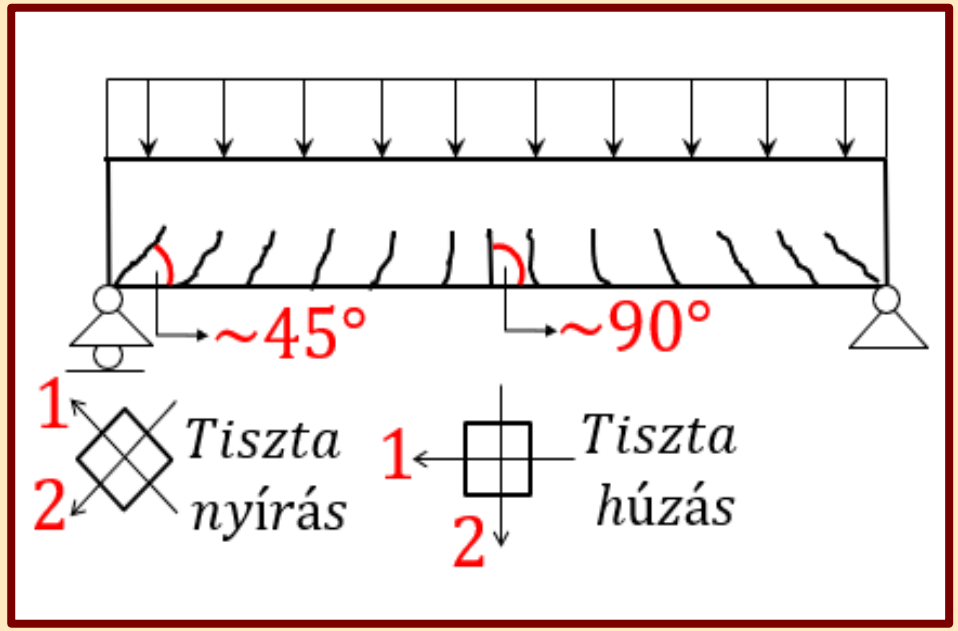
$$\sigma_1^{P} = \frac{\sigma_x^{P} + 0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x^{P} + 0}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^{P\,2}} \quad ; \quad \sigma_2^{P} = \frac{\sigma_x^{P} + 0}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x^{P} + 0}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^{P\,2}}$$

GERENDA FŐFESZÜLTSÉGEINEK ALAKULÁSA

- A tartóvégeken a nyíróerőnek a maximuma található, a nyomaték pedig nulla. Itt a pontok közelítőleg a tiszta nyírás feszültségi állapotában vannak.
- A tartóközépen a nyomatéknak van maximuma és a nyíróerő nulla. Az itt található alsó pontok a tiszta húzás feszültségi állapotában vannak.







Tartószerkezetek mechanikája II.

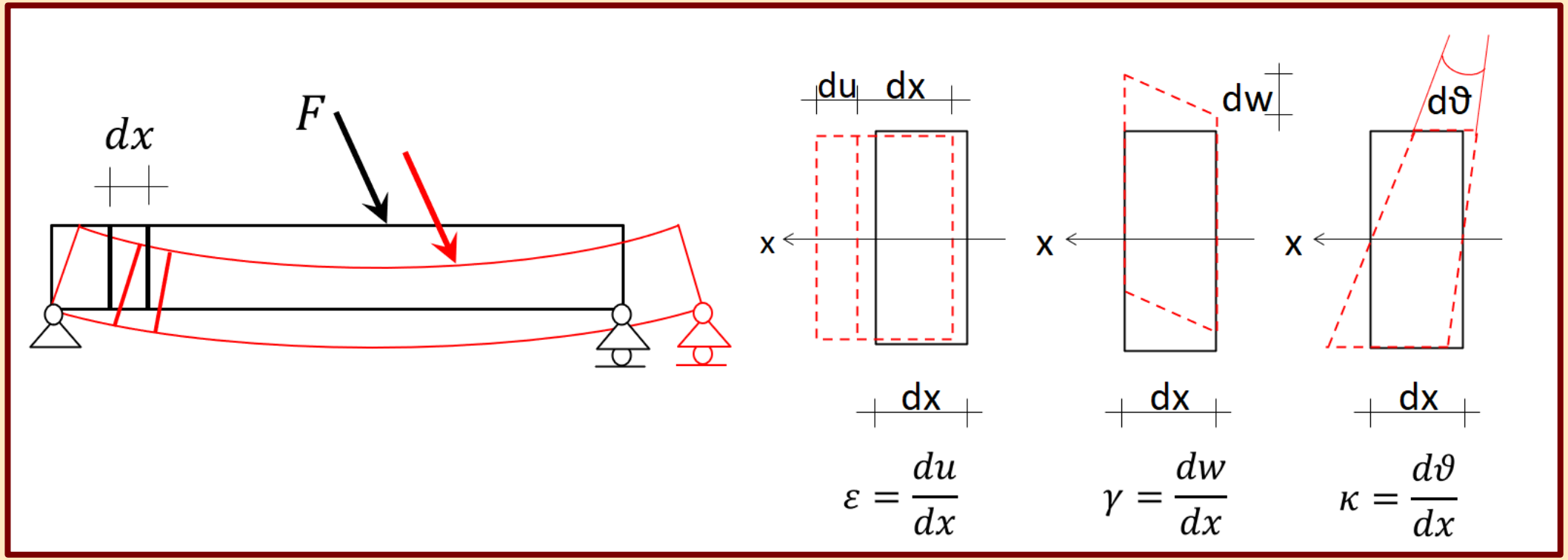
15.

Tartók alakváltozása: Munkatételek

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

TARTÓK ALAKVÁLTOZÁSÁNAK ÉRTELMEZÉSE

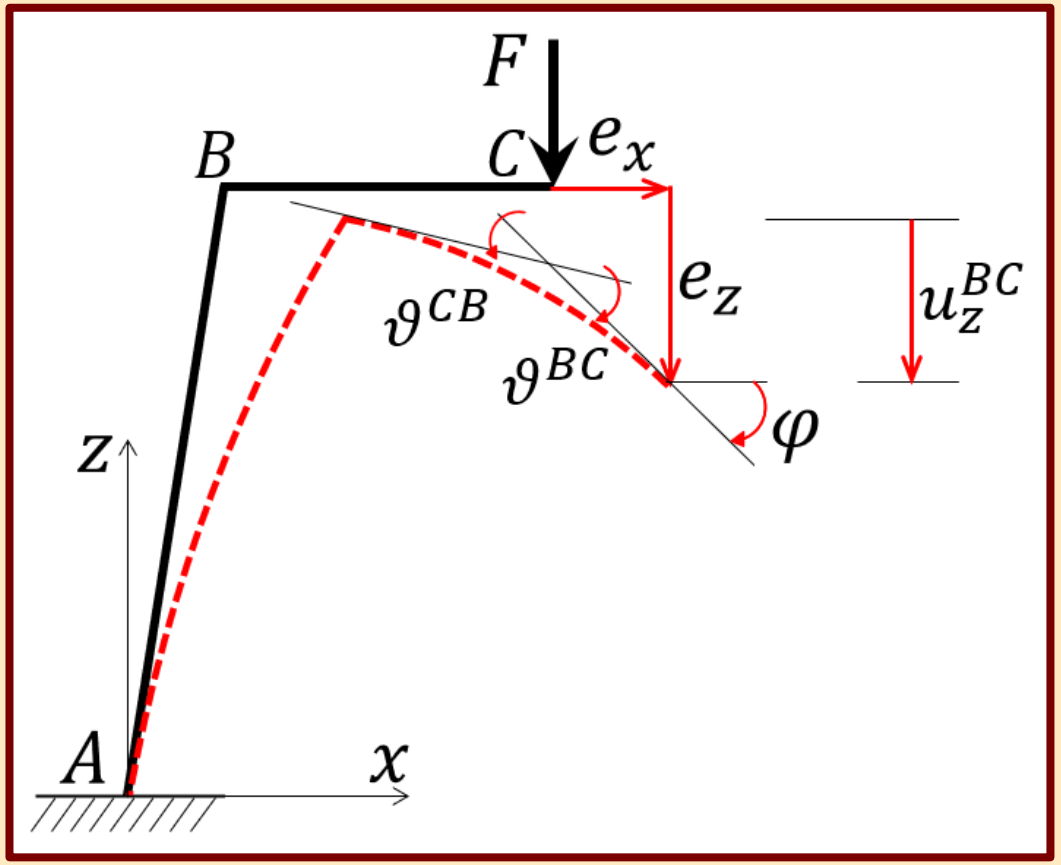
- A terhek hatására a szilárd testek alakváltozást szenvednek. A tartók pontjainak relatív távolsága, irányainak relatív szöge megváltozik, a pontok eredeti helyzetükhöz képest is elmozdulnak.
- Az egyik alapvető szilárdságtani követelmény a tartószerkezetek megfelelő merevségének a biztosítása, amellyel teljesítjük a kialakuló alakváltozásoknak, elmozdulásoknak a használatot nem akadályozó mértéken belül tartását.



SÍKBELI ELMOZDULÁSKOMPONENSEK

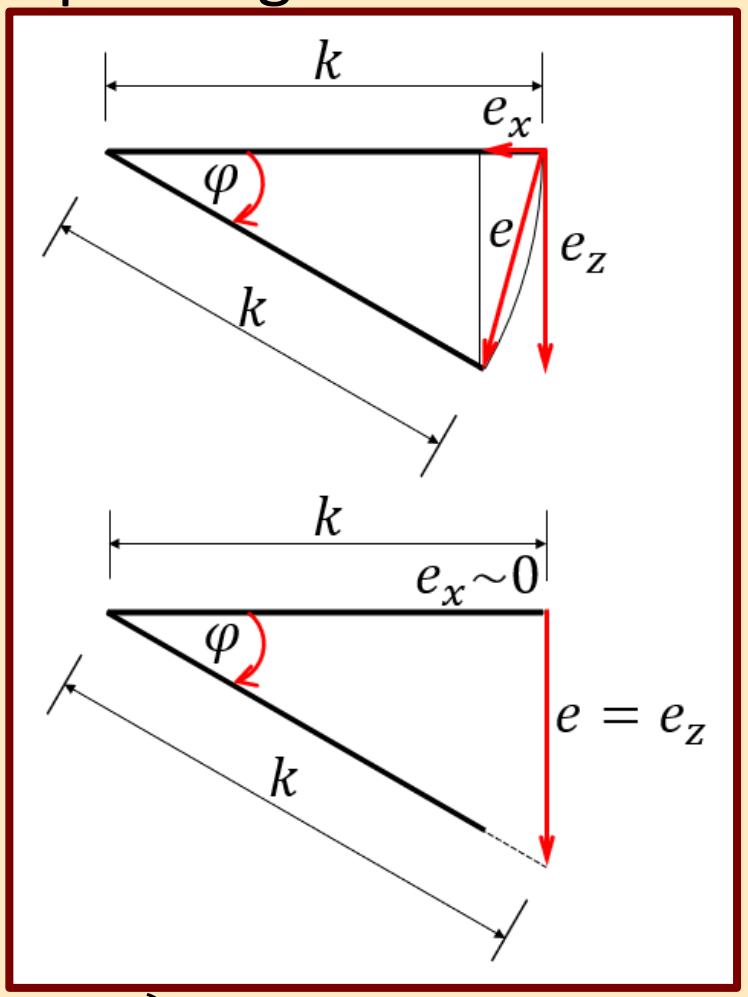
- A síkbeli tartók egyes pontjaiban két eltolódás-összetevő és egy elfordulás alakulhat ki, vagyis összesen három elmozdulás-összetevő jöhet létre.
- Az abszolút elmozdulásokat a rögzített globális koordinátarendszerben határozzuk meg a pont kiindulási helyzetéhez képest: e_z; e_x; φ
- A relatív elmozdulások két pont egymáshoz képesti elmozdulását adják meg. A koordinátarendszert a viszonyítandó ponthoz rögzítjük. A viszonyítás megcserélésével az előjel is megfordul: u_z^{BC}; ϑ^{BC}; ϑ^{CB}

A ϑ^{BC} esetén a B pont elfordulásához viszonyítjuk a C pontét, a ϑ^{CB} esetén a viszonyítás megfordul, a C-hez viszonyítjuk a B pont elfordulását.



KIS ELMOZDULÁSOK ELVE

- A keletkező elmozdulások a tartó befoglaló méreteihez képest legtöbb esetben nagyságrendekkel kisebbek.
- A tartók reakcióit, igénybevételeit az eredeti, deformálatlan alakján számítjuk, az alakváltozások visszahatását elhanyagoljuk (elsőrendű elmélet). Kivételt képeznek a stabilitásvesztésnek kitett tartók (pl. nyomott rúd), ill. a nagy elmozdulásokat szenvedő szerkezetek (pl. kötélszerkezetek.)
- Az elmozdulások kicsinysége egyszerűsítéseket tesz lehetővé. A kis elmozdulások elve alapján (elhanyagolható hibával) linearizálhatjuk az eltolódás-elfordulás kapcsolatot, érvényes maradhat a szuperpozíció elve:



$$e_x = k - k \cdot \cos\varphi = k \cdot (1 - \cos\varphi) \quad \rightarrow \quad e_x \approx 0$$

$$e_z = k \cdot \sin\varphi = k \cdot \tan\varphi \quad \rightarrow \quad e_z \approx k \cdot \varphi$$

Egyszerűsítések: $\cos\varphi \approx 1\,;\ \tan\varphi \approx \sin\varphi \approx \varphi$

A MECHANIKAI MUNKA MEGHATÁROZÁSA

- A mechanikai munka az erő és az irányába eső eltolódás szorzata, vagyis az erő és eltolódás vektorok skalár szorzata.

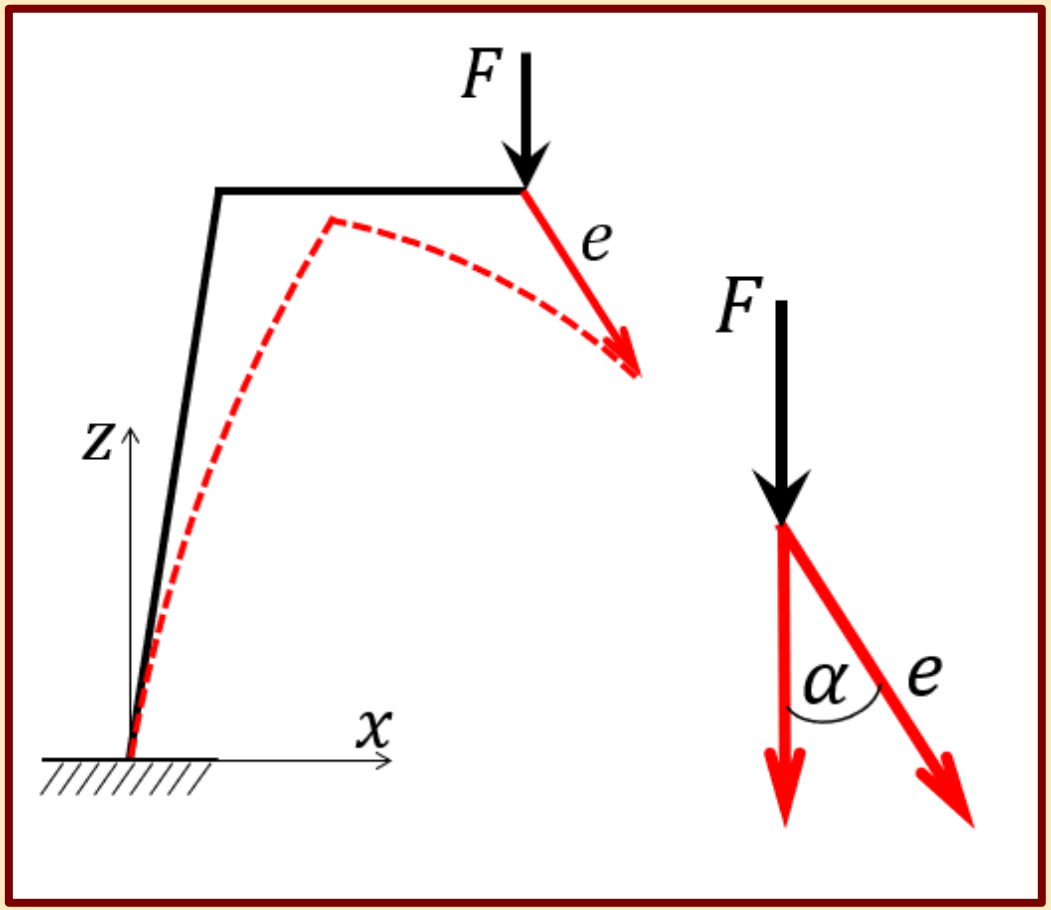
$$W = \underline{F} \cdot \underline{e}$$

$$W = \left|\underline{F}\right| \cdot \left|\underline{e}\right| \cdot \cos\alpha$$

- A mechanikai munka megfogalmazható a nyomaték és a vele azonos síkú, közös pontban működő elfordulás szorzataként is, vagyis a nyomaték és elfordulás vektorok skaláris szorzataként.

$$W = \underline{M} \cdot \underline{\varphi}$$

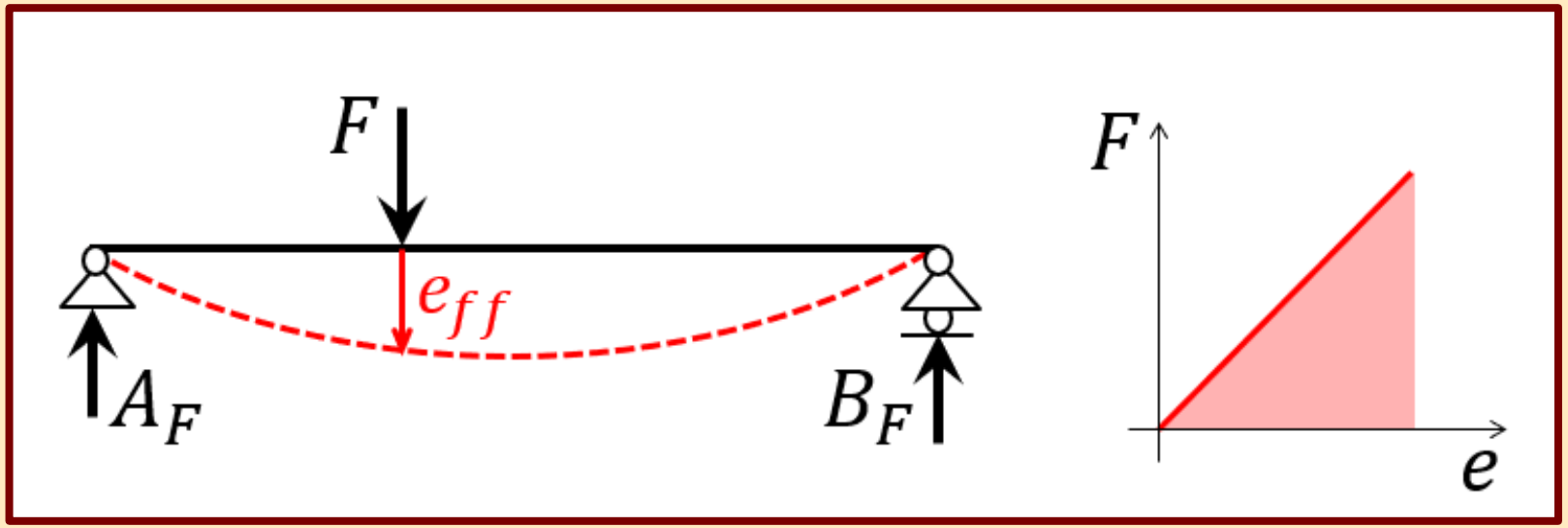
$$W = \left|\underline{M}\right| \cdot \left|\underline{\varphi}\right| \cdot \cos\alpha$$



KÜLSŐ SAJÁT MUNKA

- A külső munkát a külső erők (nyomatékok) végzik a tartó pontjainak velük munkakompatibilis elmozdulásain. Jelölése: W_k
- Ha munkát végző és az elmozdulást okozó erő (nyomaték) azonos, akkor saját munkáról beszélünk.
- Az F erőrendszer által az F erőrendszer okozta elmozdulásokon végzett munkát az F erőrendszer külső saját munkájának hívjuk.

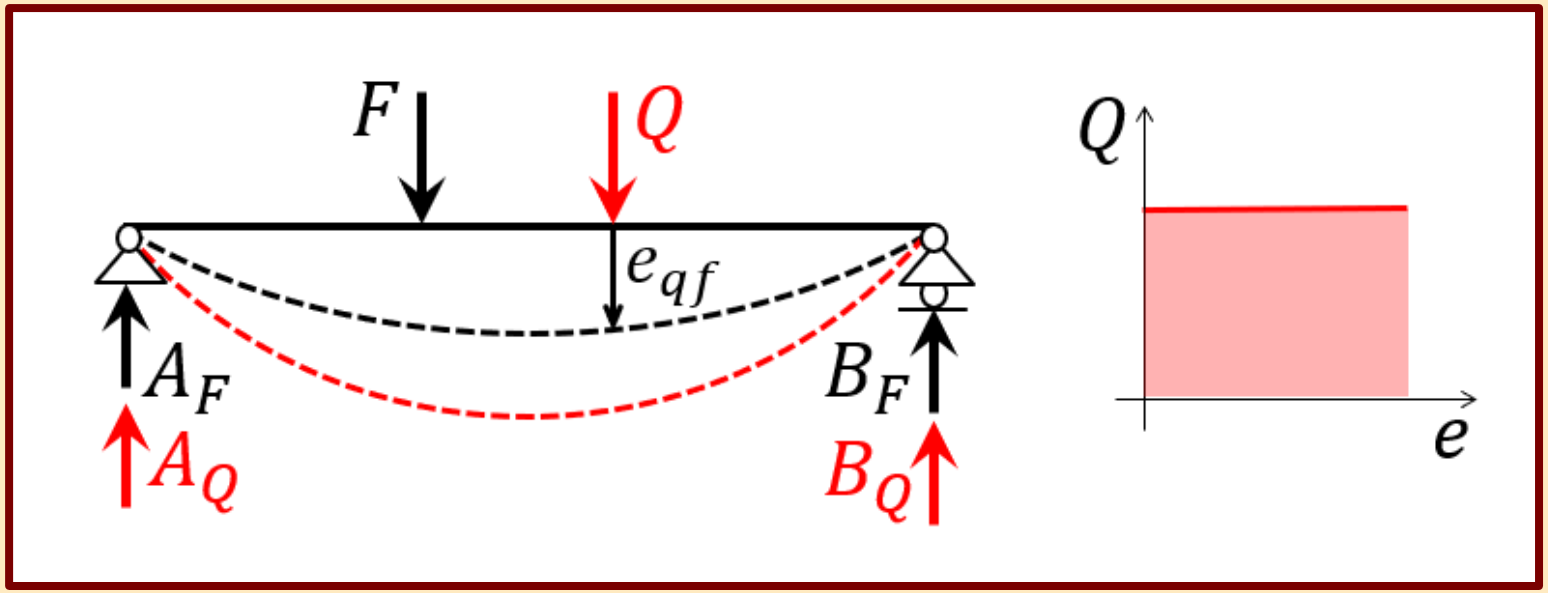
$$W_k^{ff} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot e_{ff}$$



KÜLSŐ IDEGEN MUNKA

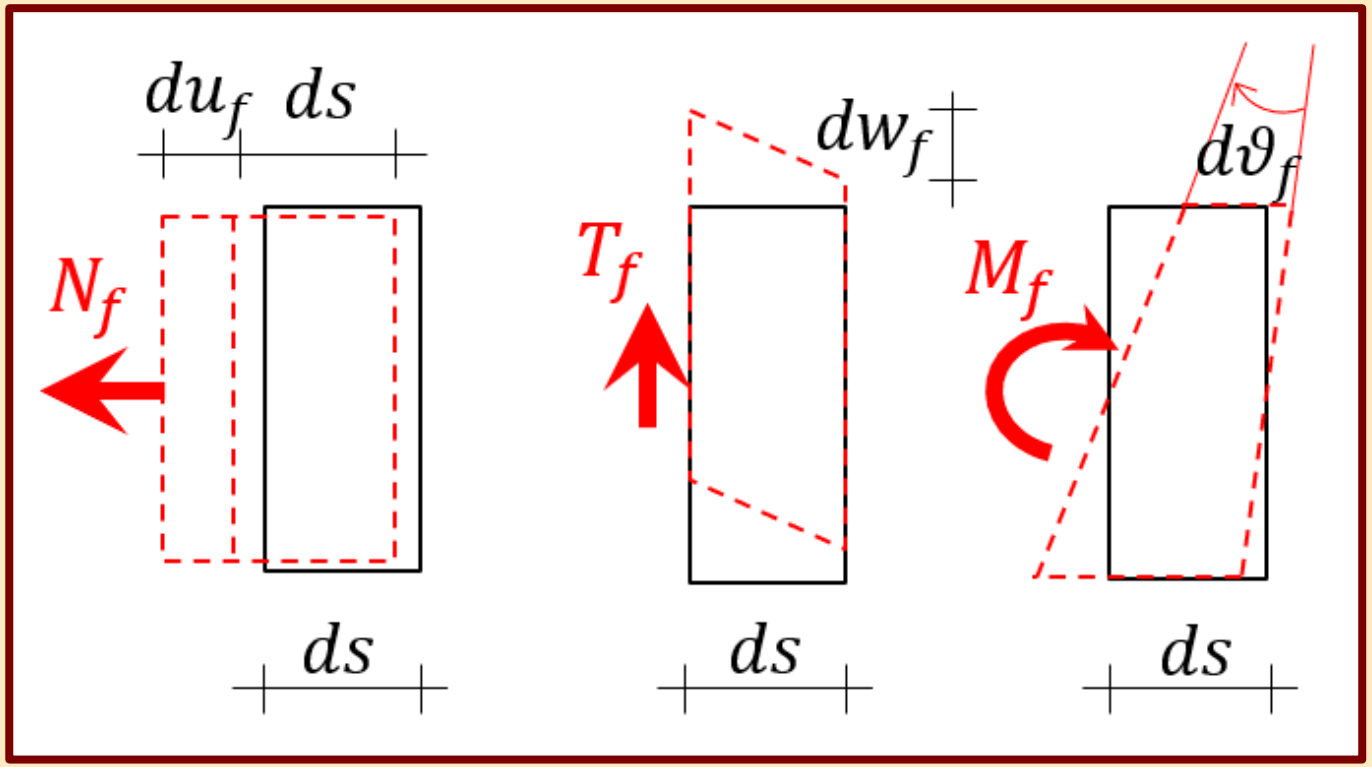
- A külső munkát a külső erők (nyomatékok) végzik a tartó pontjainak velük munkakompatibilis elmozdulásain. Jelölése: W_k
- Ha munkát végző és az elmozdulást okozó erő (nyomaték) nem azonos, akkor idegen munkáról beszélünk.
- A Q erőrendszer által az F erőrendszer okozta elmozdulásokon végzett munkát az Q erőrendszer külső idegen munkájának hívjuk.

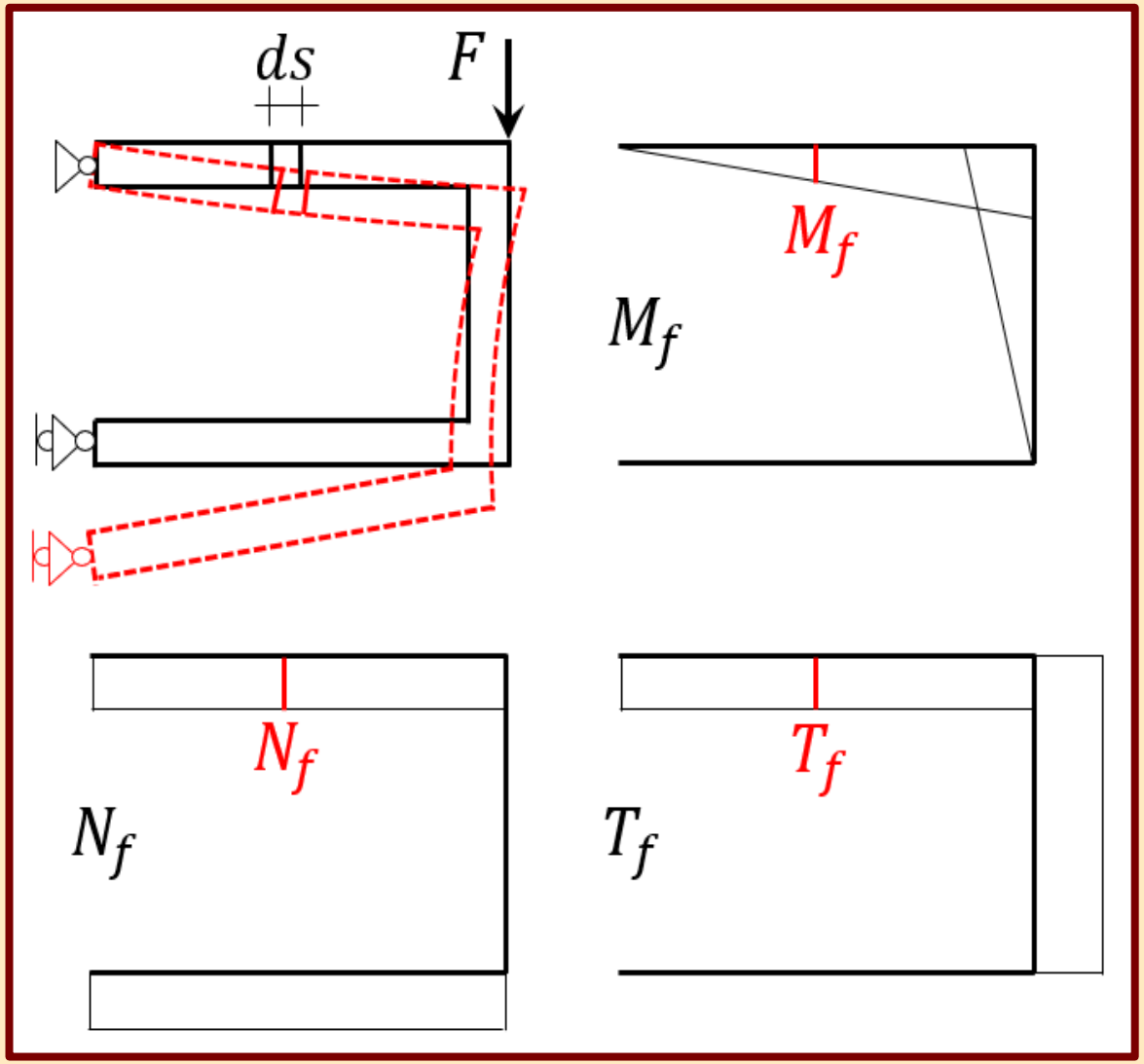
$$W_k^{qf} = Q \cdot e_{qf}$$



ALAKVÁLTOZÁSI (BELSŐ) SAJÁT MUNKA

- Az alakváltozási (belső) munkát a belső erők (igénybevételek) végzik a tartó elemi hosszúságú szakaszain kialakuló velük munkakompatibilis alakváltozásain.
- Ha munkát végző és az alakváltozást okozó igénybevétel azonos erőrendszer hatására alakult ki, akkor alakváltozási saját munkáról beszélünk.

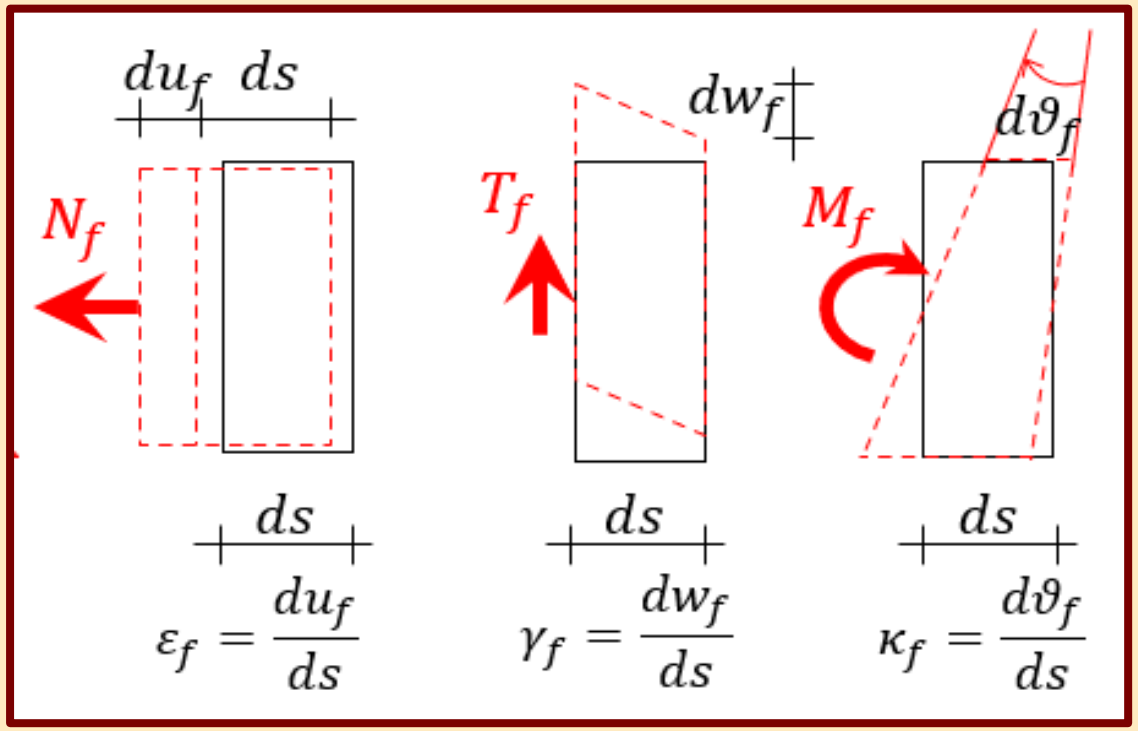




ALAKVÁLTOZÁSI (BELSŐ) SAJÁT MUNKA MEGHATÁROZÁSA

- Az elemi szakasz fajlagos alakváltozásai:

$$\varepsilon_f = \frac{du_f}{ds} \; ; \; \gamma_f = \frac{dw_f}{ds} \; ; \; \kappa_f = \frac{d\vartheta_f}{ds}$$



- Az elemi szakasz relatív elmozdulásai:

$$du_f = \varepsilon_f \cdot ds = \frac{N_f}{E \cdot A} \cdot ds$$

$$dw_f = \gamma_f \cdot ds = \frac{T_f}{G \cdot A} \cdot \rho \cdot ds$$

$$d\vartheta_f = \kappa_f \cdot ds = \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

- Az elemi szakaszon végzett saját munka (Az (F) igénybevételelei végzik a munkát az (F) okozta alakváltozásokon.):

$$dW_a^{ff} = \frac{1}{2} \cdot N_f \cdot \varepsilon_f \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot T_f \cdot \gamma_f \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot M_f \cdot \kappa_f \cdot ds$$

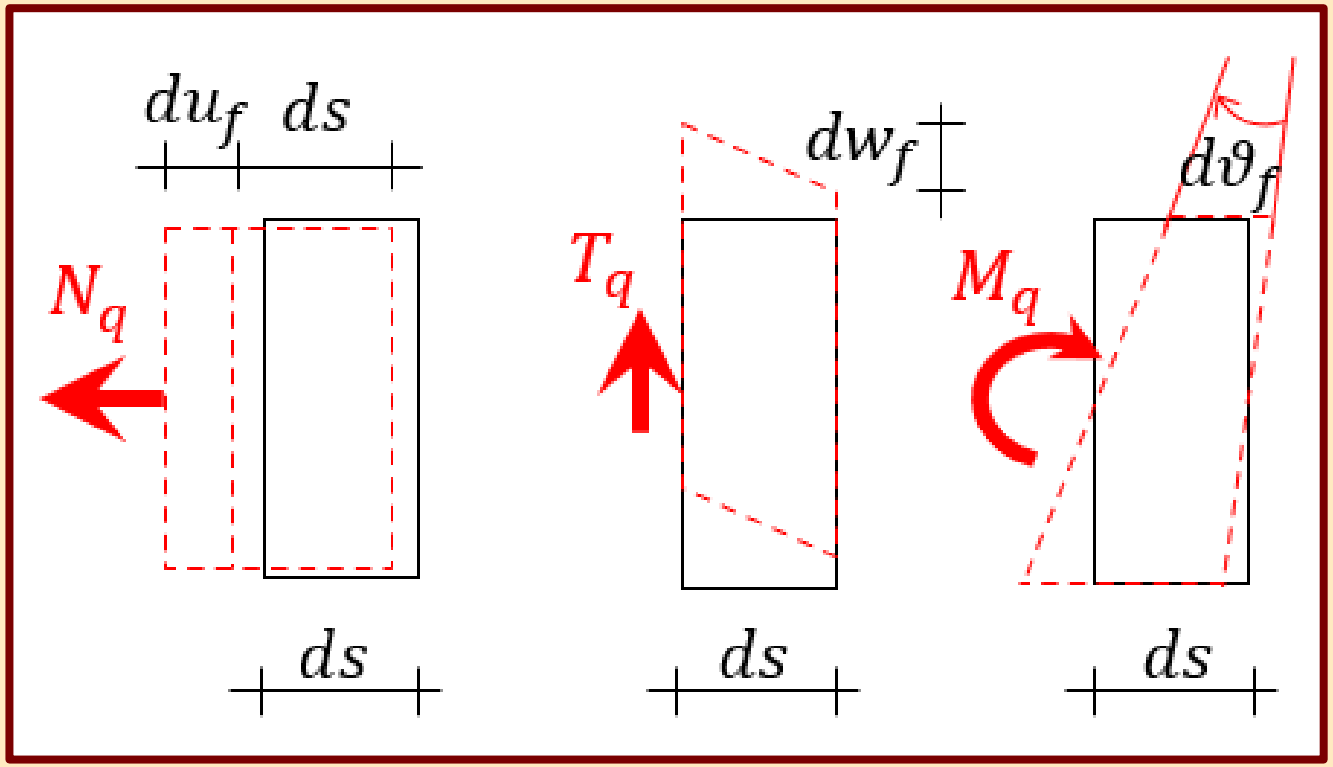
$$dW_a^{ff} = \frac{1}{2} \cdot N_f \cdot \frac{N_f}{E \cdot A} \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot T_f \cdot \frac{T_f}{G \cdot A} \cdot \rho \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot M_f \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

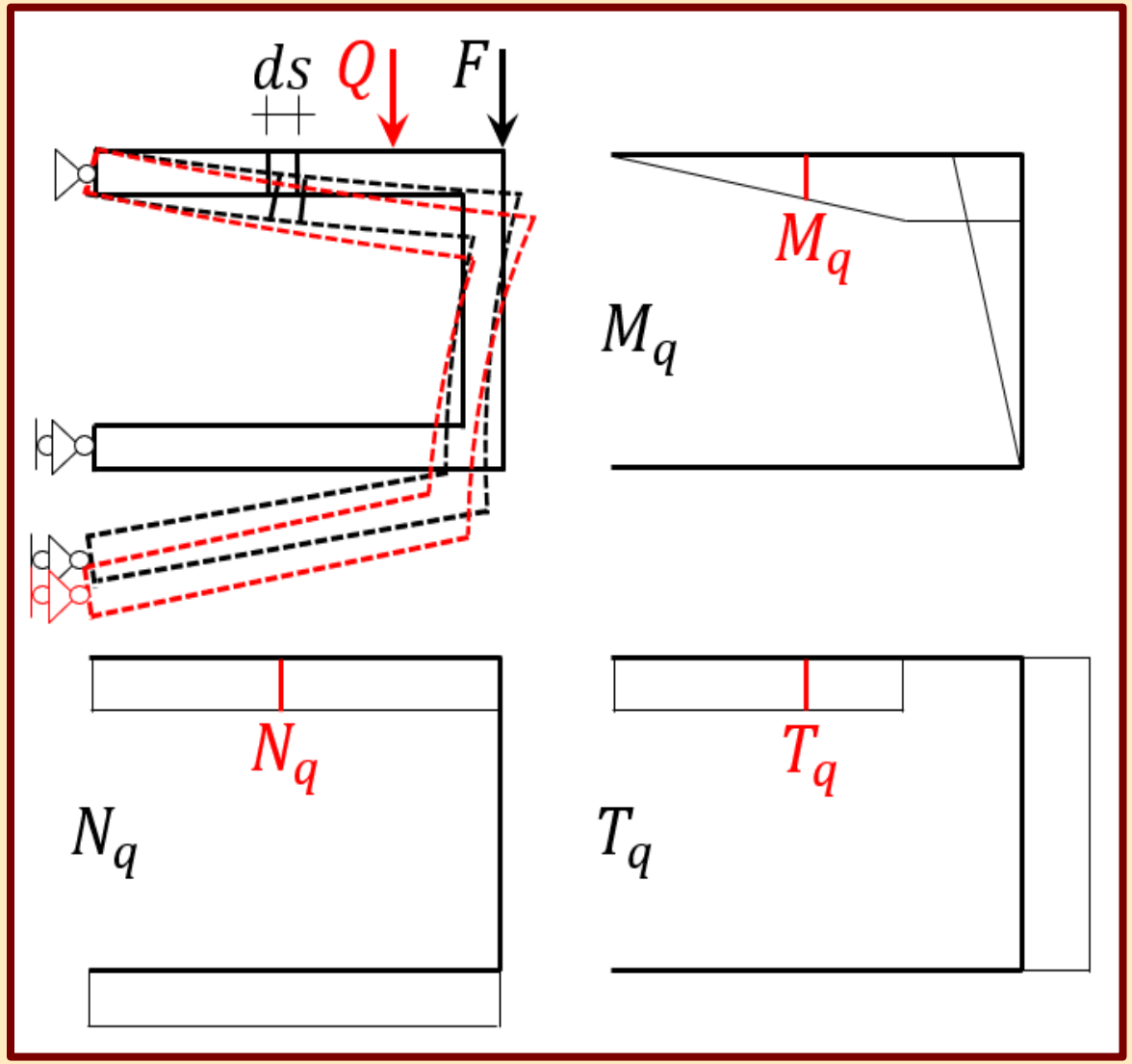
- A teljes tartón végzett alakváltozási saját munka:

$$W_a^{ff} = \int dW_a^{ff} = \frac{1}{2} \int N_f \cdot \frac{N_f}{E \cdot A} \cdot ds + \frac{1}{2} \int T_f \cdot \frac{T_f}{G \cdot A} \cdot \rho \cdot ds + \frac{1}{2} \int M_f \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

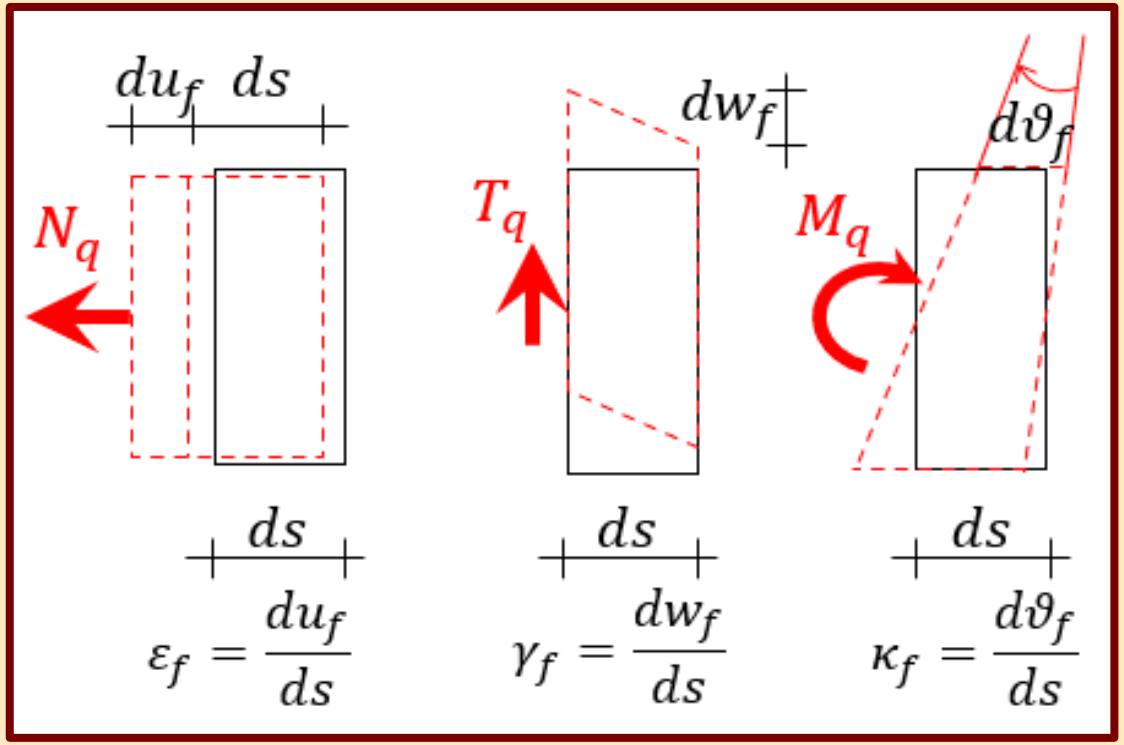
ALAKVÁLTOZÁSI (BELSŐ) IDEGEN MUNKA

- Az alakváltozási (belső) munkát a belső erők (igénybevételek) végzik a tartó elemi hosszúságú szakaszain kialakuló velük munkakompatibilis alakváltozásain.
- Ha munkát végző és az alakváltozást okozó igénybevétel nem azonos erőrendszer hatására alakult ki, akkor alakváltozási idegen munkáról beszélünk.





ALAKVÁLTOZÁSI (BELSŐ) IDEGEN MUNKA MEGHATÁROZÁSA



- Az elemi szakasz fajlagos alakváltozásai:

$$\varepsilon_f = \frac{du_f}{ds} \; ; \; \gamma_f = \frac{dw_f}{ds} \; ; \; \kappa_f = \frac{d\vartheta_f}{ds}$$

- Az elemi szakasz relatív elmozdulásai:

$$du_f = \varepsilon_f \cdot ds = \frac{N_f}{E \cdot A} \cdot ds$$

$$dw_f = \gamma_f \cdot ds = \frac{T_f}{G \cdot A} \cdot \rho \cdot ds$$

$$d\vartheta_f = \kappa_f \cdot ds = \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

- Az elemi szakaszon végzett idegen munka (A (Q) igénybevételelei végzik a munkát az (F) okozta alakváltozásokon.):

$$dW_a^{qf} = N_q \cdot \varepsilon_f \cdot ds + T_q \cdot \gamma_f \cdot ds + M_q \cdot \kappa_f \cdot ds$$

$$dW_a^{qf} = N_q \cdot \frac{N_f}{E \cdot A} \cdot ds + T_q \cdot \frac{T_f}{G \cdot A} \cdot \rho \cdot ds + M_q \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

- A teljes tartón végzett alakváltozási idegen munka:

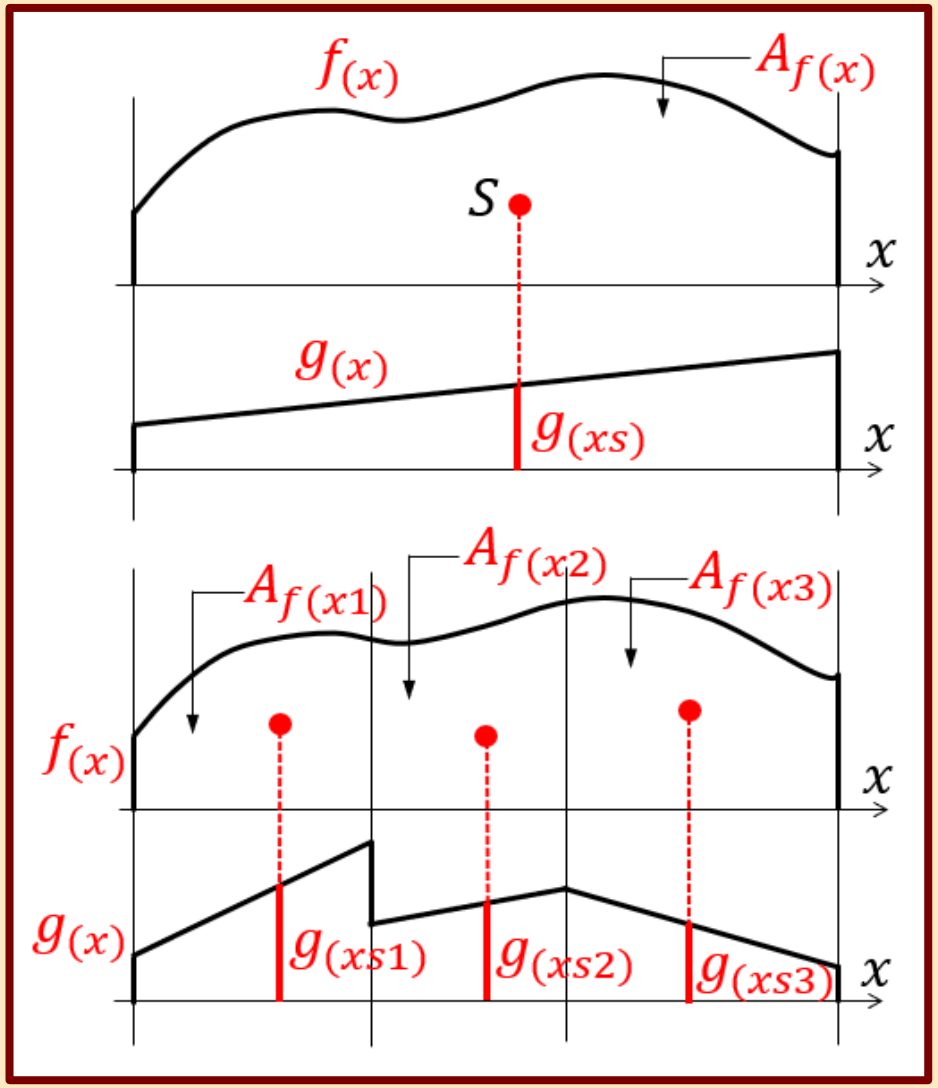
$$W_a^{qf} = \int dW_a^{qf} = \int N_q \cdot \frac{N_f}{E \cdot A} \cdot ds + \int T_q \cdot \frac{T_f}{G \cdot A} \cdot \rho \cdot ds + \int M_q \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

A SZORZATINTEGRÁLOK MEGHATÁROZÁSA

- A szorzatintegrált grafikusan hajtjuk végre: vesszük a nemlineáris ábra területét (függvény alatti terület), amelyet szorzunk a lineáris ábrának a nemlineáris ábra súlypontja alatti metszékével.

$$\int_a^b f_{(x)} \cdot g_{(x)} dx = A_{f(x)} \cdot g_{(xs)}$$

- Ha az integrálandó függvények egyike nem folytonos adott pontnál (ugrás, törés), akkor ott az ábrát elvágva, szakaszonként végezzük el az integrálást, majd az eredményeket összegezzük.

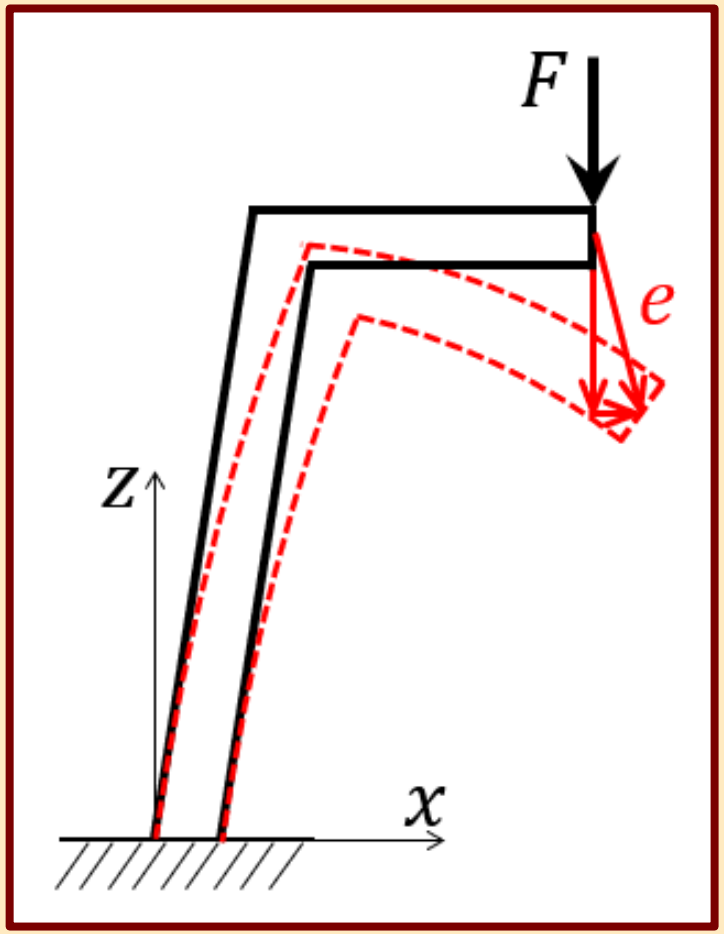


$$\int_a^b f_{(x)} \cdot g_{(x)} dx = A_{f(x1)} \cdot g_{(xs1)} + A_{f(x2)} \cdot g_{(xs2)} + A_{f(x3)} \cdot g_{(xs3)}$$

$$\int_a^b f_{(x)} \cdot g_{(x)} dx = \sum A_{f(xi)} \cdot g_{(xsi)}$$

A TARTÓK ELMOZDULÁSAINAK MEGHATÁROZÁSA MUNKATÉTELEKKEL

- A munka definíciója elmozdulás-összetevőket tartalmaz, amelyet felhasználhatunk a tartók elmozdulásainak meghatározására.
- Munkatételeket, vagyis munkával kapcsolatos törvényszerűségeket fogalmazunk meg egyenletekkel, amelyekből a vizsgált tartó kérdéses elmozdulásait kifejezhetjük.
- A terhelő erő munkát végez a hatásvonalában kialakuló elmozduláson és ezáltal a helyzeti energiája megváltozik. Ez a munkamennyiség (energiaváltozás) a tartó deformációiban rugalmas alakváltozási energia-növekményként tárolódik, amely a tehermentesítéssel visszanyerhető.



SAJÁT MUNKÁK TÉTELE

- Az energiamegmaradás alapján a külső saját munka és az alakváltozási saját munka egyenlő:

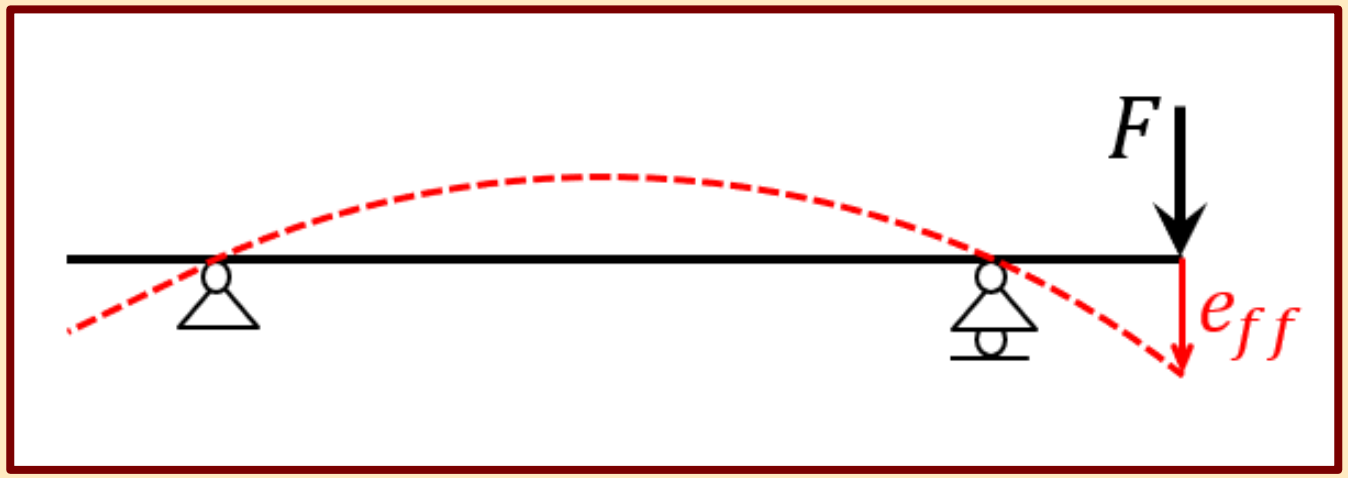
$$W_k^{ff} = W_a^{ff}$$

$$\frac{1}{2} \cdot F \cdot e_{ff} = \frac{1}{2} \int N_f \cdot \frac{N_f}{E \cdot A} \cdot ds + \frac{1}{2} \int T_f \cdot \frac{T_f}{G \cdot A} \cdot \rho \cdot ds + \frac{1}{2} \int M_f \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

- A nyíróerő okozta deformációk mindig, a normálerőből származó deformációk többnyire elhanyagolhatóak néhány eset kivételével (pl. egyes keretszerkezetek, rácsos tartók):

$$\frac{1}{2} \cdot F \cdot e_{ff} = \frac{1}{2} \int M_f \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

$$e_{ff} = \frac{1}{F} \cdot \int M_f \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$



SAJÁT MUNKÁK TÉTELÉNEK ALKALMAZÁSA

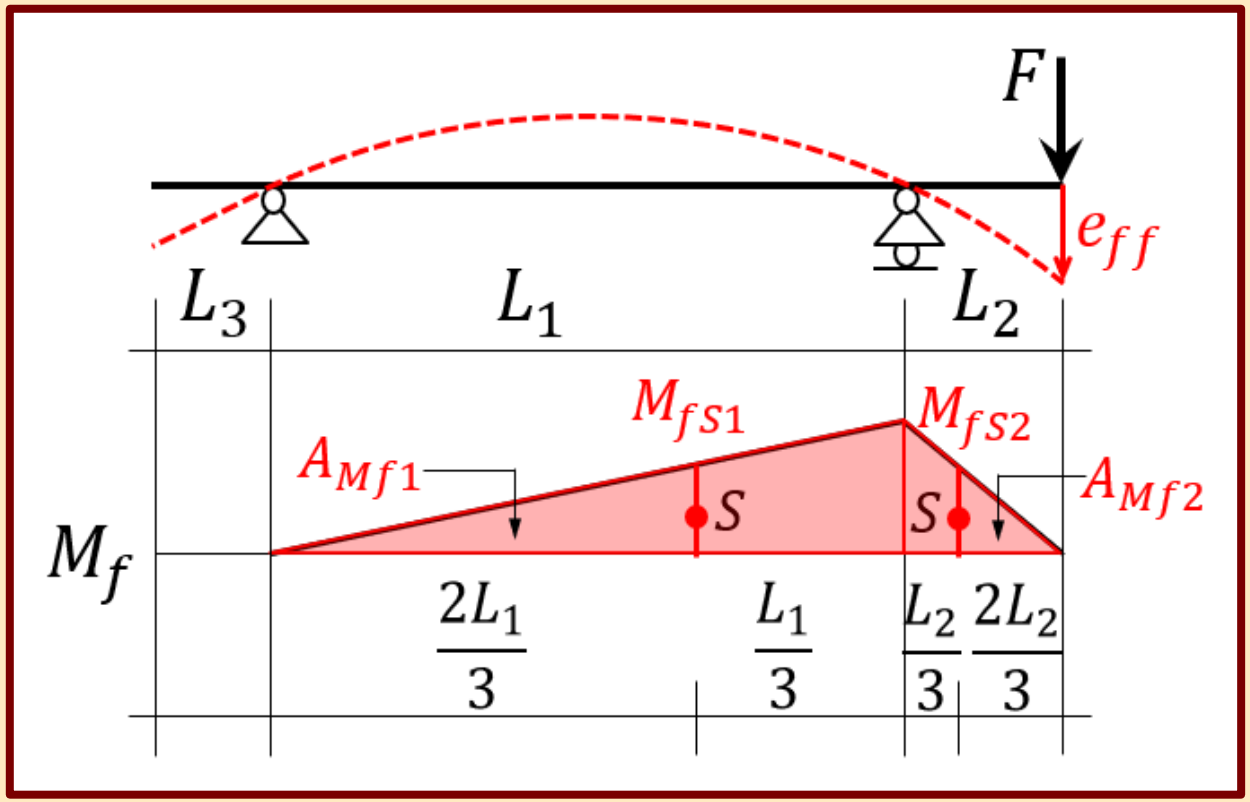
- A kérdéses elmozdulás meghatározása:
  - Az igénybevételi ábra megrajzolása a kezdeti teherből (M_f).
  - A saját munkák tételének felírása:

$$\frac{1}{2} \cdot F \cdot e_{ff} = \frac{1}{2} \int M_f \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

  - Az elmozdulás kifejezése az egyenletből és kiszámítása:

$$e_{ff} = \frac{1}{F} \cdot \int M_f \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

$$e_{ff} = \frac{1}{F} \cdot \sum \frac{A_{Mfi} \cdot M_{fSi}}{E \cdot I}$$



- A saját munkák tétele korlátozottan használható: abban az esetben, ha a tartóra egyetlen teher hat és az a kérdéses elmozdulással munkakompatibilis, vagyis megegyező km.-ben működik, azonos jellegű és irányú.

IDEGEN MUNKÁK TÉTELE

- Az energiamegmaradás alapján a külső idegen munka és az alakváltozási idegen munka egyenlő:

$$W_k^{qf} = W_a^{qf}$$

$$Q \cdot e_{qf} = \int N_q \cdot \frac{N_f}{E \cdot A} \cdot ds + \int T_q \cdot \frac{T_f}{G \cdot A} \cdot \rho \cdot ds + \int M_q \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

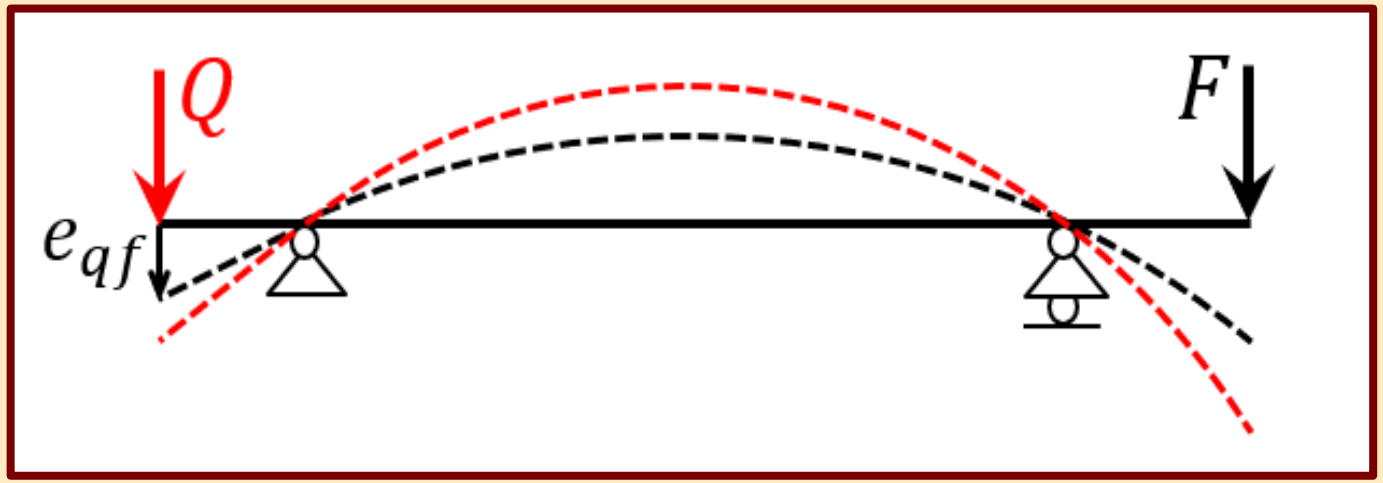
- A nyíróerő okozta deformációk mindig, a normálerőből származó deformációk többnyire elhanyagolhatóak néhány eset kivételével (pl. egyes keretszerkezetek, rácsos tartók):

$$Q \cdot e_{qf} = \int M_q \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

$$e_{qf} = \int M_q \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

- Ha a hajlító merevséggel (EI) nem osztunk az alakváltozási munka oldalán, akkor az elmozdulás nagyított értékét kapjuk:

$$(e_{qf}) = \int M_q \cdot M_f \cdot ds$$



IDEGEN MUNKÁK TÉTELÉNEK ALKALMAZÁSA

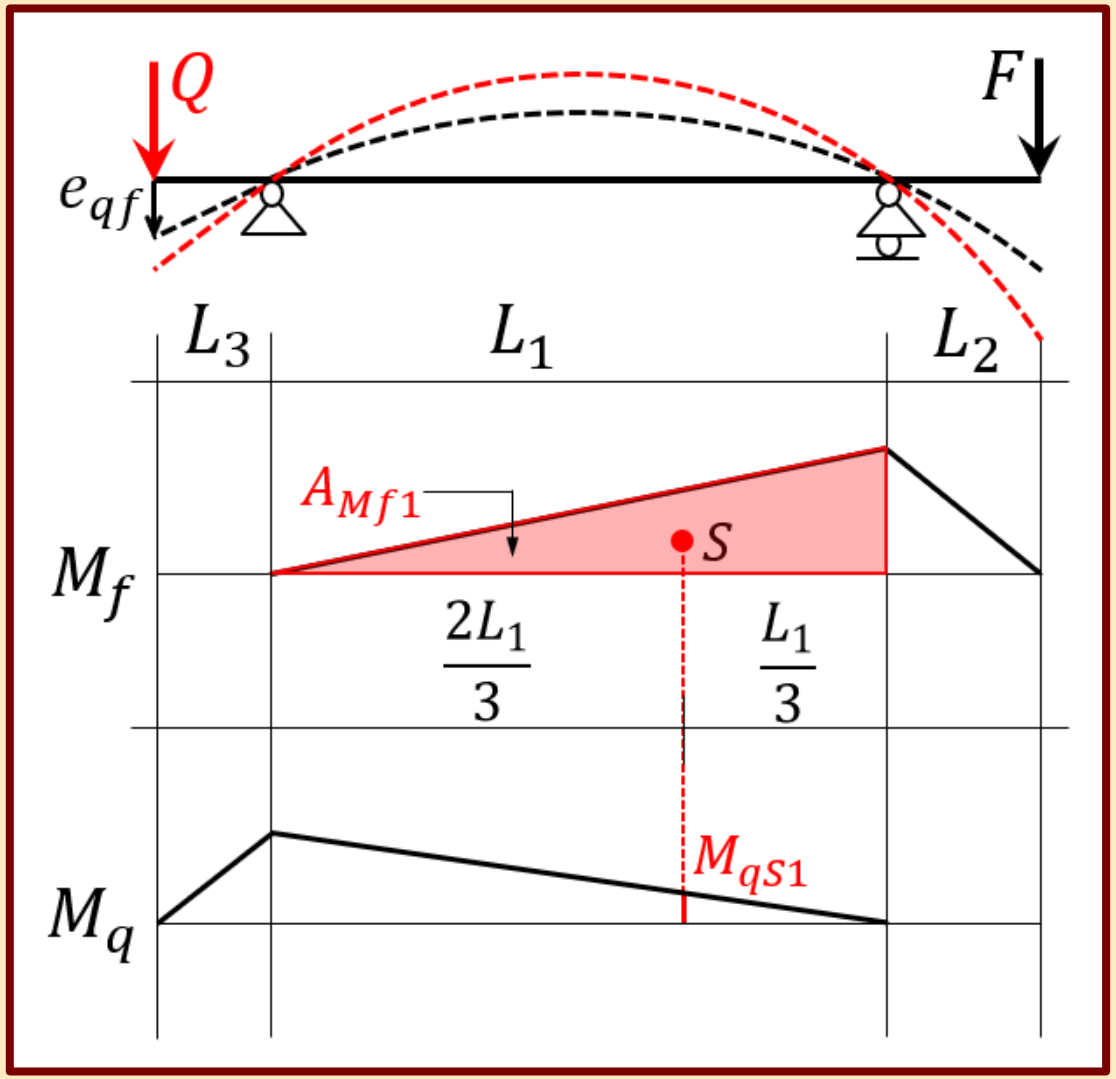
- A kérdéses elmozdulás meghatározása:
  - Az igénybevételi ábra megrajzolása a kezdeti teherből (M_f).
  - Az elmozdulással munkát végezni tudó virtuális dinám felvétele a tartóra. Nagyságát egységnyinek választjuk.
  - A virtuális dinám hatására kialakuló nyomatéki ábra megrajzolása (M_q).
  - Az idegen munkák tételének felírása:

$$Q \cdot e_{qf} = \int M_q \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

  - Az elmozdulás kifejezése az egyenletből és kiszámítása:

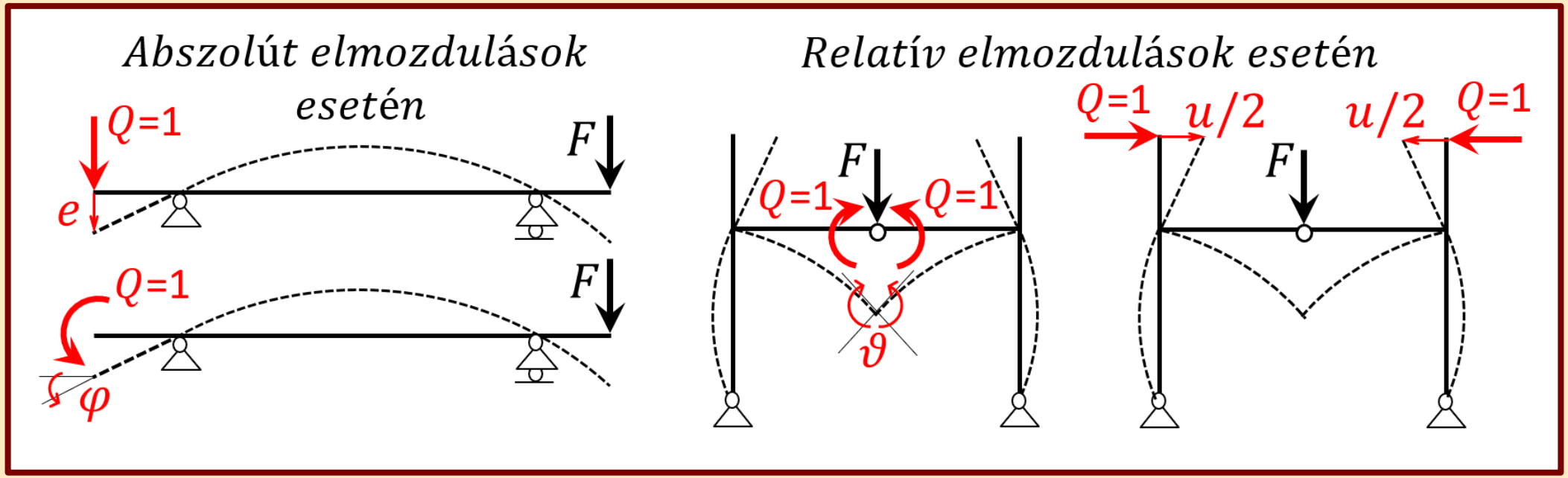
$$e_{qf} = \int M_q \cdot \frac{M_f}{E \cdot I} \cdot ds$$

$$e_{qf} = \sum \frac{A_{Mfi} \cdot M_{qSi}}{E \cdot I}$$



VIRTUÁLIS DINÁMOK FELVÉTELE

- A munka összefüggésének felírásához szükséges a kérdéses elmozdulással munkakompatibilis dinám megléte. Ezért a tartóra az eredeti teher mellett egy virtuális (általunk feltételezett, nem valós) dinámot veszünk fel, amely képes a kiszámolandó elmozdulással munkát végezni. Praktikusan nagyságát egységnyinek választjuk. Minden elmozdulás-összetevő számításához egy új, neki megfelelő virtuális dinámot kell felvennünk.
- Az elmozdulás-összetevőkhöz feltételezendő virtuális dinámok:

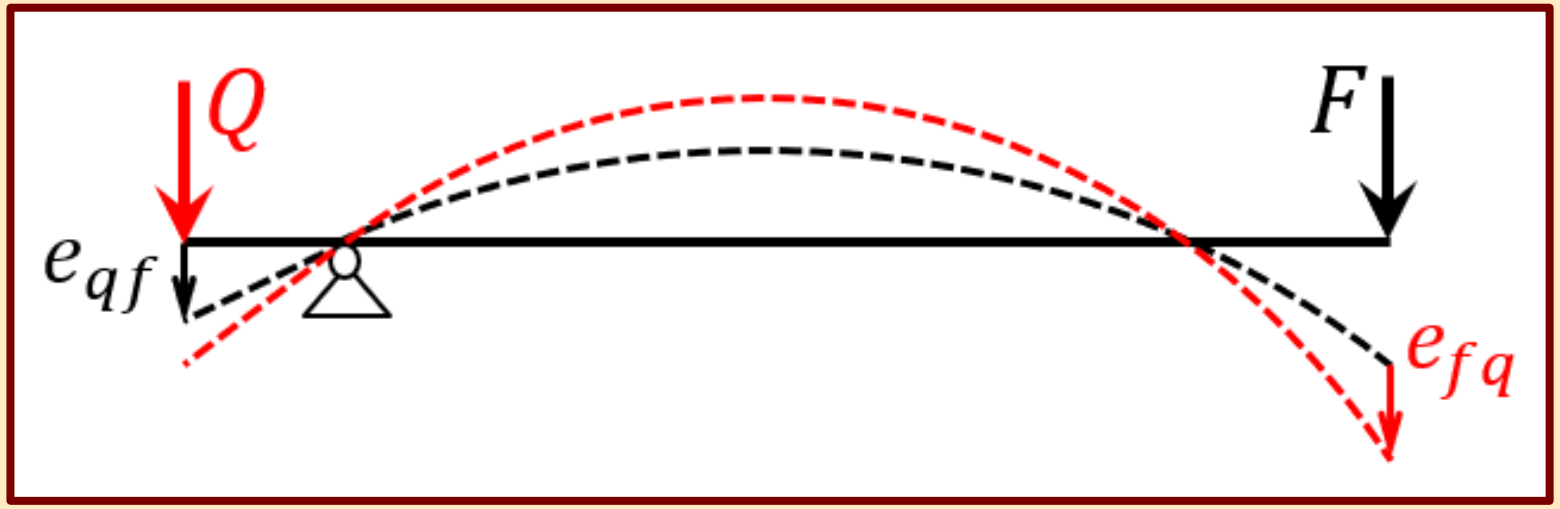


FELCSERÉLHETŐSÉGI TÉTEL

- A Q erőrendszer által az F erőrendszer okozta elmozdulásokon végzett külső munka megegyezik az F erőrendszer által a Q erőrendszer okozta elmozdulásokon végzett külső munkával:

$$W_k^{qf} = W_k^{fq}$$

$$Q \cdot e_{qf} = F \cdot e_{fq}$$



- A tétel megfogalmazható a külső és az alakváltozási munkák egyenlőségének segítségével is:

$$W_k^{qf} = W_a^{fq}$$

$$W_k^{fq} = W_a^{qf}$$

KÉTTÁMASZÚ TARTÓ ELMOZDULÁSAINAK MEGHATÁROZÁSA

- A kezdeti nyomatéki ábrát az egyszerűbb kezelhetőség érdekében könnyen számítható területű és súlypontú részekre bontjuk (terhenként).
- Az elmozdulások meghatározása munkatétellel:

$$Q \cdot e_{Cz} = \int M_q^{e_{Cz}} \cdot \frac{M_0}{E \cdot I} \cdot ds$$

$$e_{Cz} = \left(-M \cdot L_2 \cdot \frac{L_2}{2} - \frac{M \cdot L_1}{2} \cdot \frac{2 \cdot L_2}{3} + \frac{2 \cdot q \cdot L_1^2 \cdot L_1}{3 \cdot 8} \cdot \frac{L_2}{2}\right) \cdot \frac{1}{E \cdot I}$$

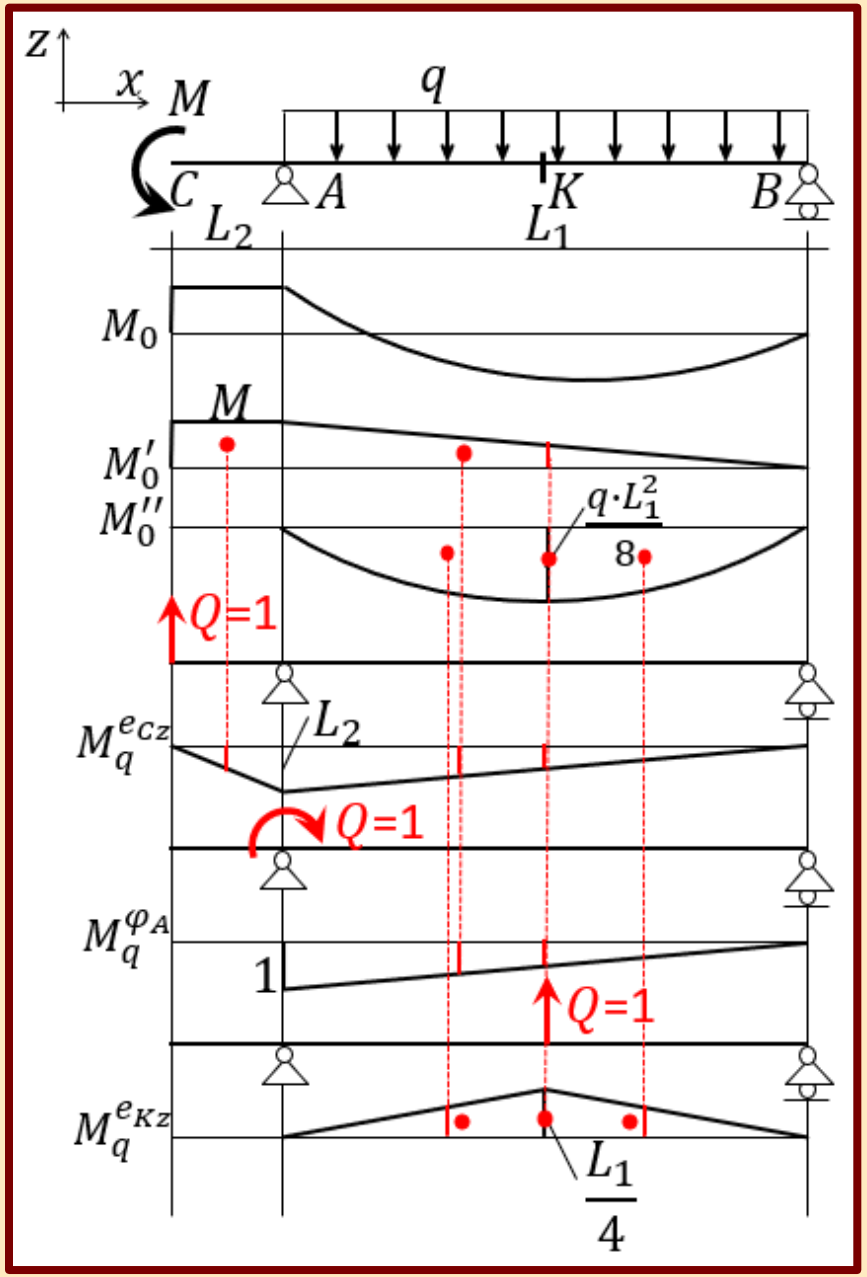
$$Q \cdot \varphi_A = \int M_q^{\varphi_A} \cdot \frac{M_0}{E \cdot I} \cdot ds$$

$$\varphi_A = \left(-\frac{M \cdot L_1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{3} + \frac{2 \cdot q \cdot L_1^2 \cdot L_1}{3 \cdot 8} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2}\right) \cdot \frac{1}{E \cdot I}$$

$$Q \cdot e_{Kz} = \int M_q^{e_{Kz}} \cdot \frac{M_0}{E \cdot I} \cdot ds$$

$$e_{Kz} = \left(\frac{L_1 \cdot L_1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{M \cdot 1}{2} - 2 \cdot \frac{2 \cdot q \cdot L_1^2 \cdot L_1}{3 \cdot 8 \cdot 2} \cdot \frac{L_1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right) \cdot \frac{1}{E \cdot I}$$

- E·I értékkel szorozva az eredményeket, az elmozdulások nagyított értéket kaphatjuk meg.



RÁCSOS TARTÓ ELMOZDULÁSAINAK MEGHATÁROZÁSA

- A rudak kizárólagos igénybevétele a normálerő, amelynek segítségével írhatjuk fel az idegen munkák tételét:

$$Q \cdot e_{qf} = \int N_q \cdot \frac{N_0}{E \cdot A} \cdot ds$$

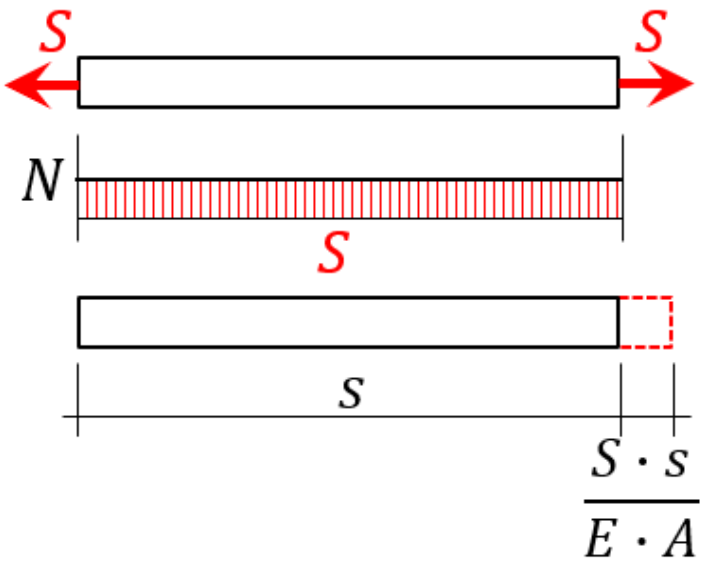
- Az összefüggés egyszerűsíthető, mivel a rúderők konstans eloszlásúak a rudakban.

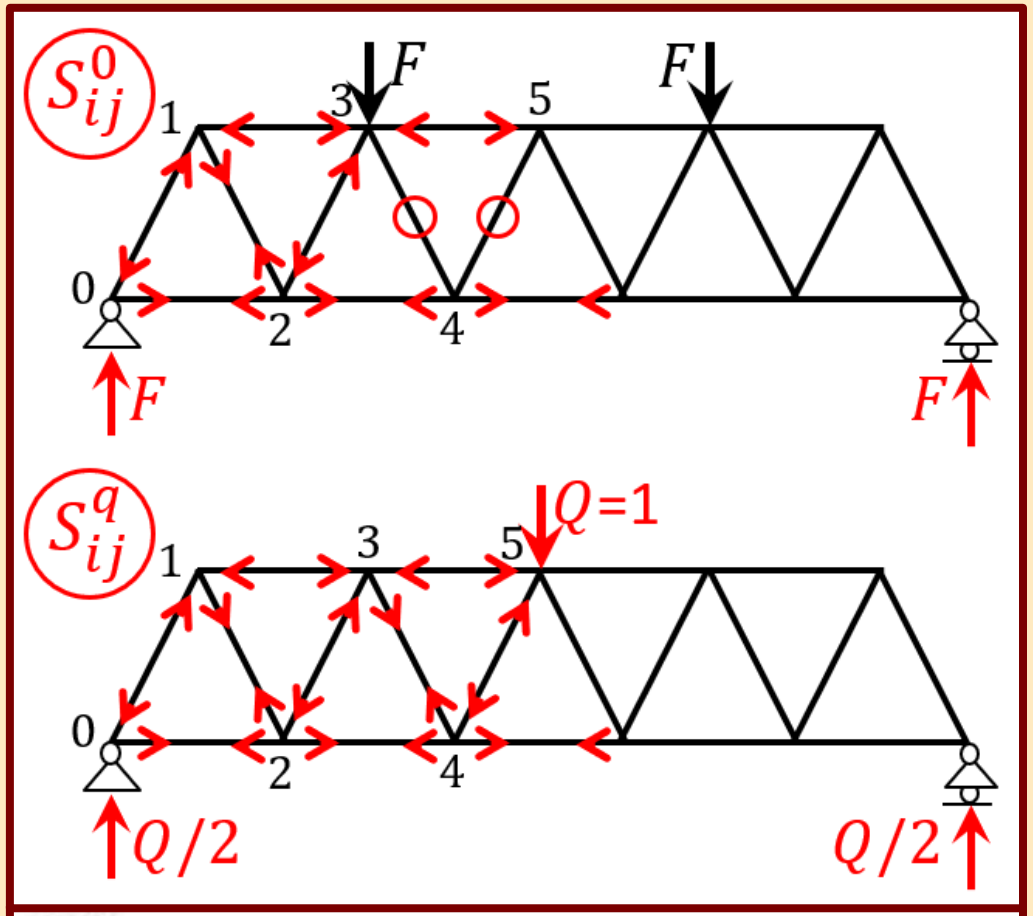
$$Q \cdot e_{qf} = \sum \frac{S_{ij}^0 \cdot S_{ij}^q \cdot s_{ij}}{E_{ij} \cdot A_{ij}}$$

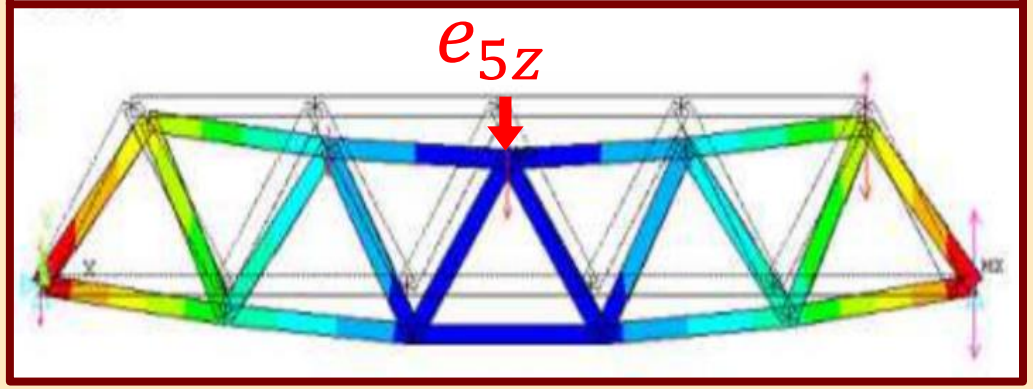
ij	$E_{ij} \cdot A_{ij}$	s_{ij}	S_{ij}^0	S_{ij}^q	$\frac{S_{ij}^0 \cdot S_{ij}^q \cdot s_{ij}}{E_{ij} \cdot A_{ij}}$

$$\sum \frac{S_{ij}^0 \cdot S_{ij}^q \cdot s_{ij}}{E_{ij} \cdot A_{ij}} = \boxed{}$$

$$1 \cdot e_{5z} = \sum \frac{S_{ij}^0 \cdot S_{ij}^q \cdot s_{ij}}{E_{ij} \cdot A_{ij}}$$

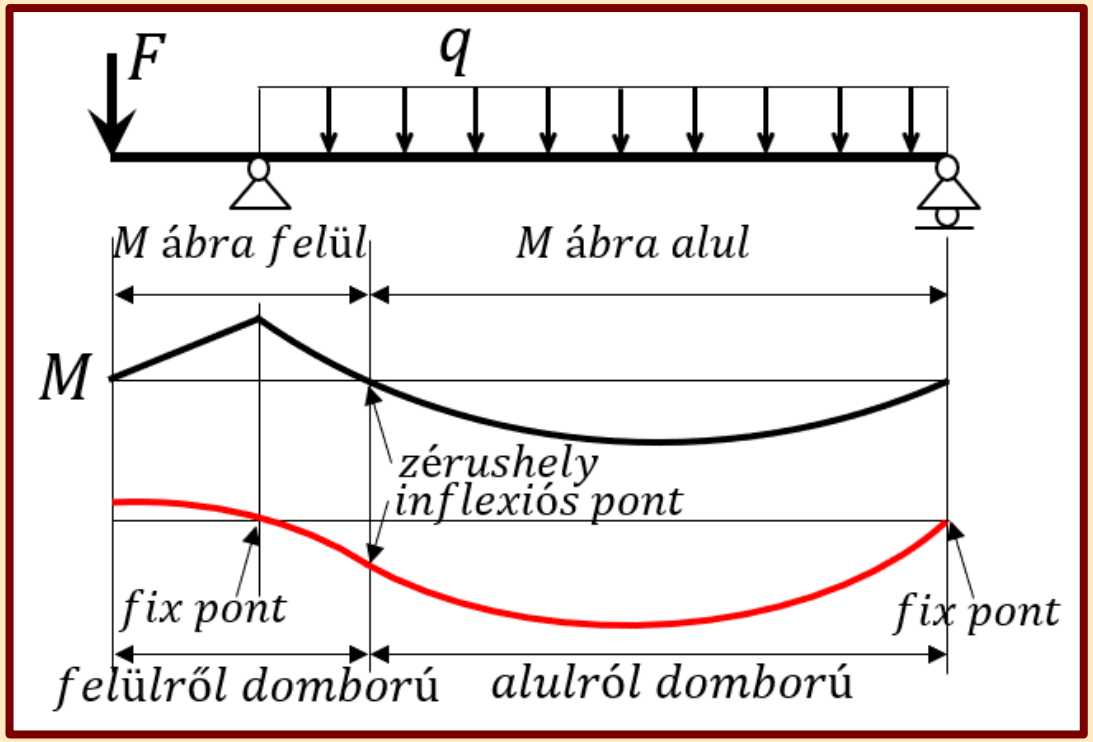


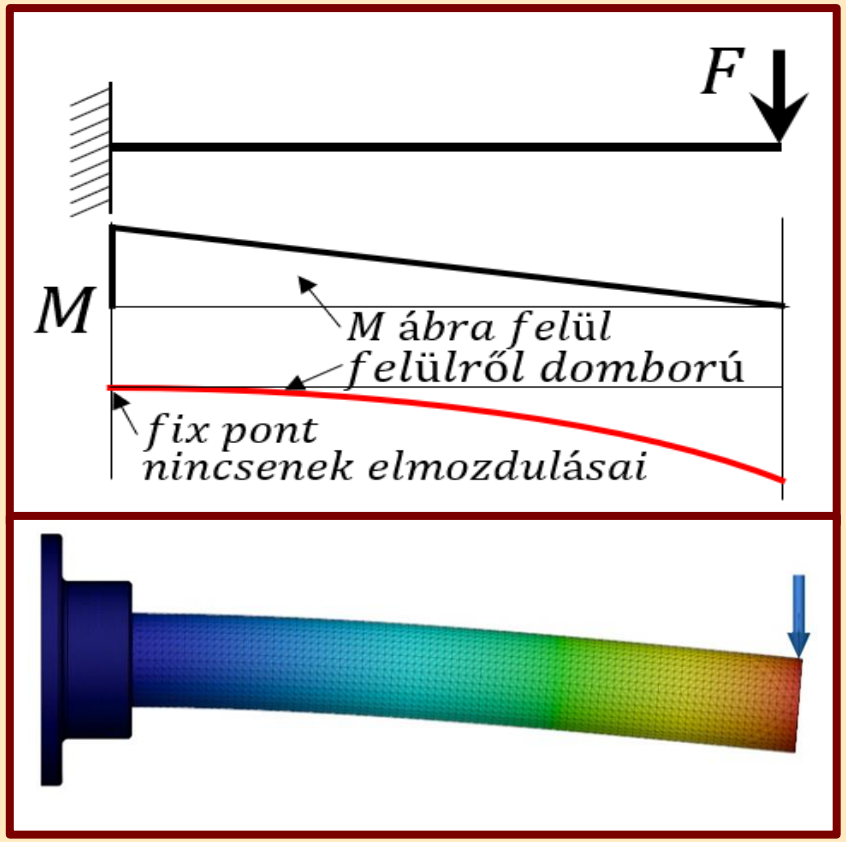




TARTÓK RUGALMAS VONALÁNAK MEGHATÁROZÁSA

- A elmozdulások és az igénybevételek között matematikai kapcsolat van:





$$\frac{de_{z(x)}}{dx} = -\varphi_{(x)}$$

$$\frac{d\varphi_{(x)}}{dx} = -\frac{M_{y(x)}}{EI}$$

$$\frac{dM_{y(x)}}{dx} = -T_{z(x)}$$

$$\frac{dT_{z(x)}}{dx} = -q_{z(x)}$$

- Ez alapján a rugalmas (deformációs) vonal diff.egyenlete: $e''_{z(x)} = -\frac{M_{y(x)}}{EI}$
- A vonal megrajzolásakor figyelembe kell venni, hogy az M ábra mindig a húzott oldalon van, amelynek megfelelően görbül a vonal. A megtámasztások mozgás lehetőségeire (egyenlet peremfeltételeire) is tekintettel kell lenni ábrázoláskor.

Tartószerkezetek mechanikája II.

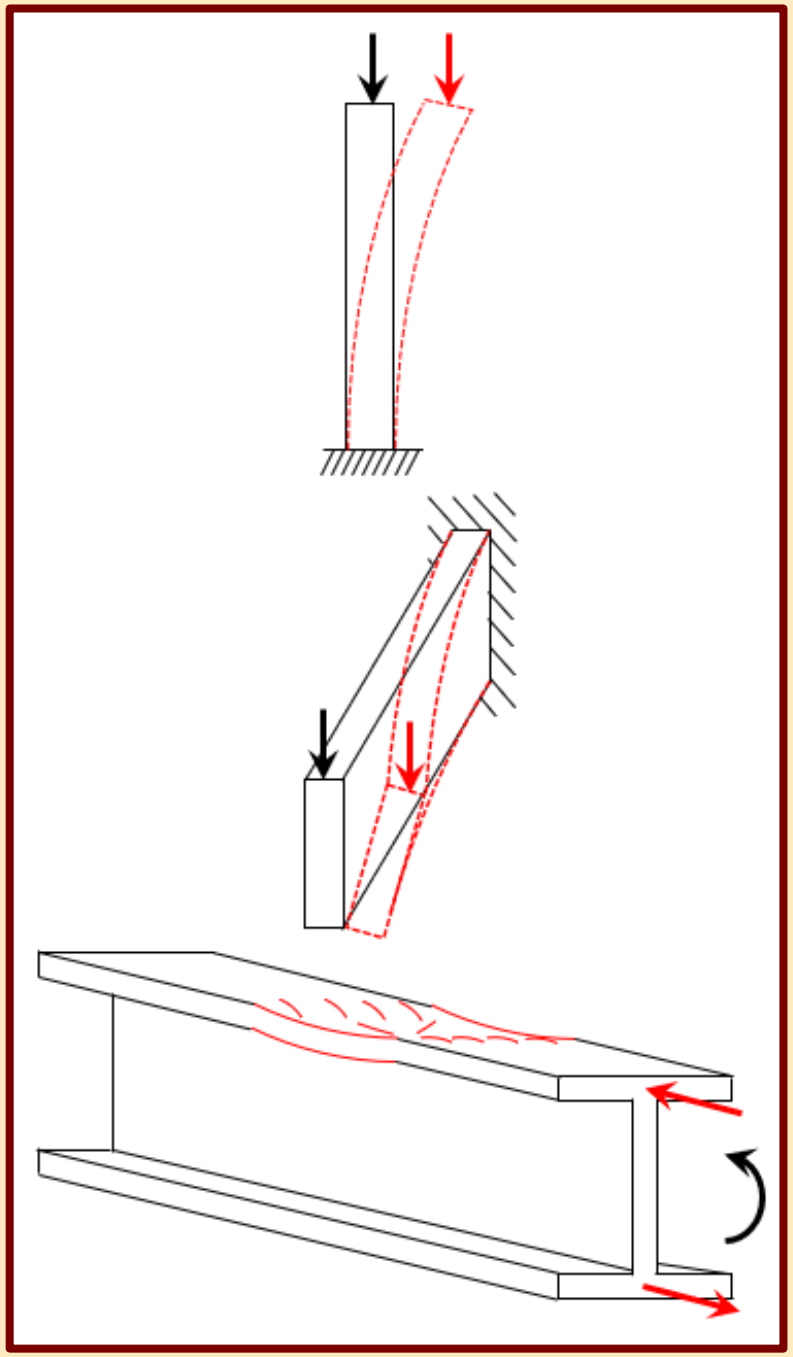
16.

Stabilitásvizsgálat: Nyomott rudak síkbeli kihajlása

Készítette: dr. Movahedi Rad Majid

TARTÓK STABILITÁSÁNAK ÉRTELMEZÉSE

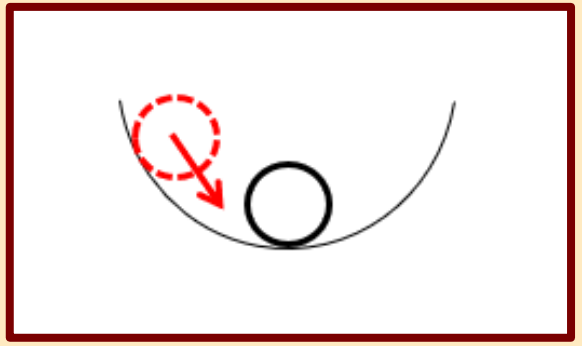
- Az egyik alapvető szilárdságtani követelmény a tartószerkezetek és azok elemeinek egyensúlyi stabilitásának biztosítása, amely az eddigi szilárdsági, merevségi megfelelőségi vizsgálatoktól független.
- Egyes erre érzékeny egyensúlyban lévő elemek esetén azt vizsgáljuk, hogy egy kis zavaró hatás következtében milyen viselkedést mutatnak, visszatérnek-e eredeti egyensúlyi alakjukhoz, vagy nem.
- A stabilitásvesztés hírtelen, előjel nélküli, katasztrofális következménnyel bíró tönkremenetelt okozhat. A stabilitásvizsgálat ezért kiemelt fontosságú feladat.
- Az egyensúlyt és a tartó igénybevételeit másodrendű elmélet alapján számoljuk az eddigiektől eltérően, vagyis a deformációk igénybevételekre visszahatását figyelembe vesszük.

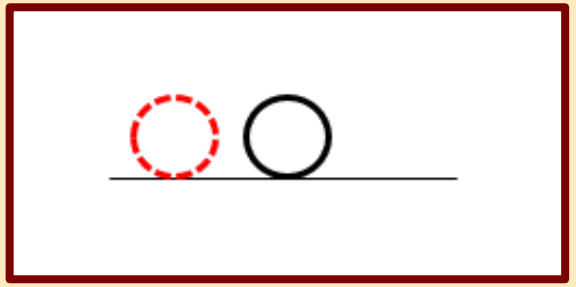


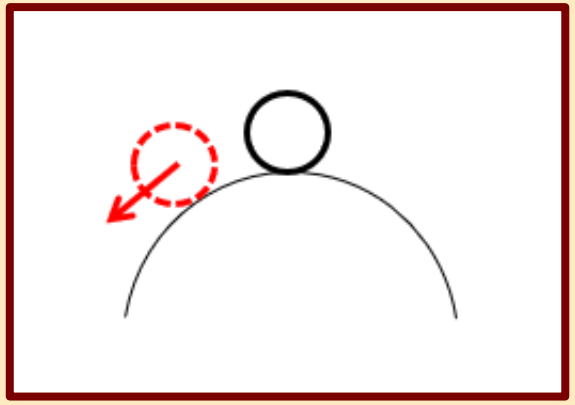
STABILITÁSI ÁLLAPOTOK SZEMLÉLTETÉSE

A szerkezeteknek stabilitási szempontból három jellemző egyensúlyi állapota van, amelyeket a homorú-egyenes-domború felületekre helyezett, majd ebből a helyzetéből kimozdított golyó viselkedésével szemléltethetünk.

- Stabilis egyensúlyi állapot: a nyugalmi helyzetből kissé kitérítve a golyót, a kitérítő hatás megszűnésével visszatér eredeti nyugalmi helyzetéhez.
- Indifferens egyensúlyi állapot: a nyugalmi helyzetből kissé kitérítve a golyót, a kitérítő hatás megszűnésével nem tér vissza eredeti helyzetébe és nem is távolodik tovább attól, hanem új helyzetében marad nyugalomban.
- Labilis egyensúlyi állapot: a nyugalmi helyzetből kissé kitérítve a golyót, a kitérítő hatás megszűnésével nem tér vissza eredeti nyugalmi helyzetéhez, hanem attól egyre távolodva elgurul.

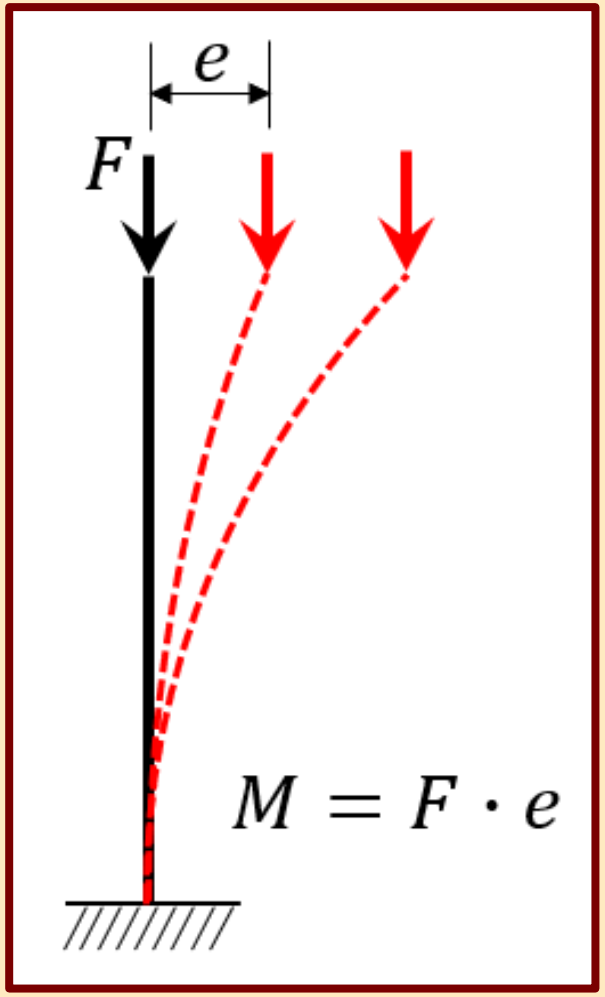






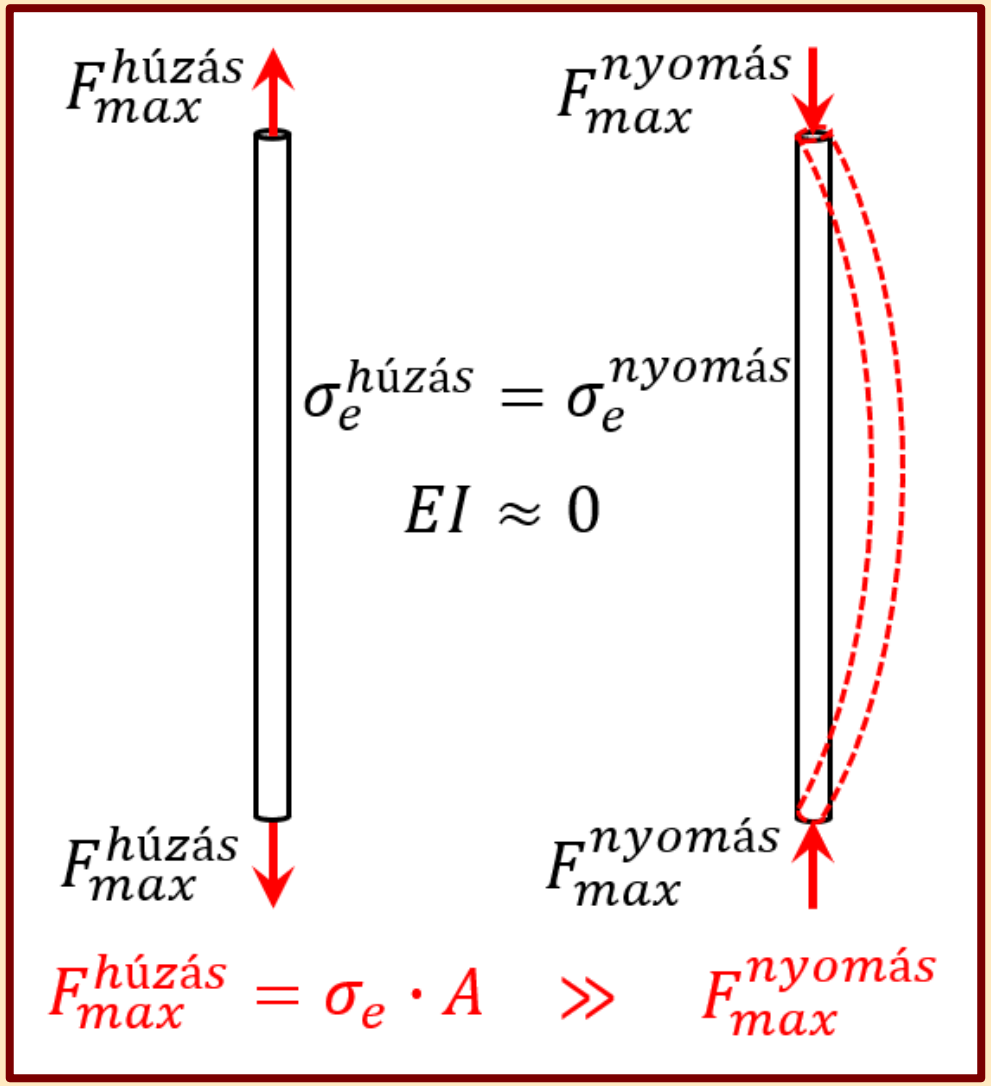
SÍKBELI KIHAJLÁS ÉRTELMEZÉSE

- A kihajlás jelensége nyomott elemek, elemrészek esetén fordul elő. Ezen belül mi a központosan nyomott egyenes tengelyű rudak esetével foglalkozunk, a rúd paramétereit, igénybevételeit és a kihajlás jelenségét közös síkban vizsgálva.
- Nyomott rudak esetén a terhelő erő hatására a nem tökéletes geometriájú rúdelem alakváltozik. A nyomóerő eltolódó hatásvonalából adódóan (másodrendű) nyomatéki igénybevétel alakul ki, amely hatására a rúd tovább görbül és az tovább növeli a nyomatékot, ezzel egy végtelen sort létrehozva. Ezt a jelenséget kihajlásnak hívjuk.
- A terhelő erő nagyságától függő végtelen sor határértéke (véges vagy végtelen nagyságú nyomaték-alakváltozás) mutatja meg a kezdeti egyensúly stabilitási állapotát.
- Célunk a kihajlás vizsgálatával kapcsolatban, a stabilitásvesztési jelenség kialakulásának a megakadályozása.



A KIHAJLÁS SZEMLÉLTETÉSE

- Vizsgáljuk meg egy egyenes tengelyű vékony acélhuzal húzó- és nyomóerővel szembeni viselkedését, ellenállását. Az acél húzó- és nyomószilárdsága azonos.
- Az acélhuzal húzási teherbírása a kis km. ellenére is jelentős.
- A nyomással szembeni ellenállása lényegesen kisebb, nullának vehető. Ennek oka, hogy a kialakuló másodrendű nyomatéknak és a deformációnak nem képes ellenállni, mivel a hajlító merevsége (EI) közelítőleg nulla.
- Megállapítható, hogy húzással és nyomással szemben, azonos tulajdonságú rúdelemek tönkremeneteli viselkedése és teherbírása között is jelentős különbségek lehetnek.

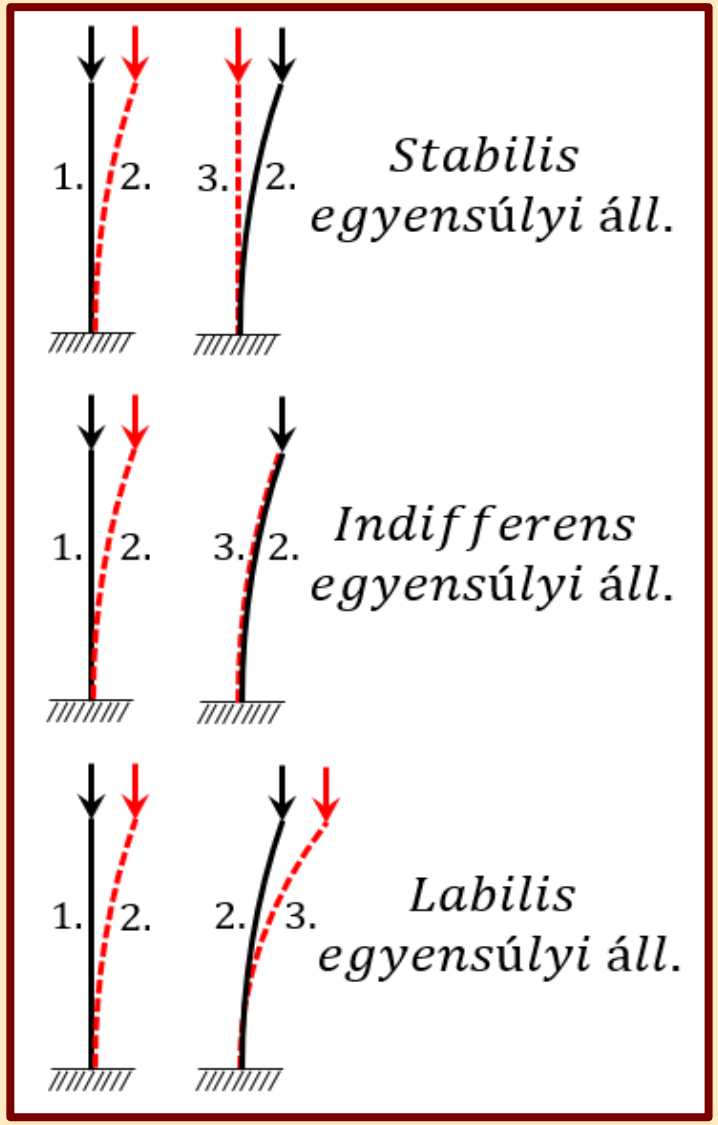


PÉLDÁK NYOMOTT ELEMEK KIHAJLÁSÁRA

NYOMOTT RUDAK EGYENSÚLYI ÁLLAPOTAI

Nyomott elemek esetén is három esetét különböztethetjük meg az egyensúly stabilitásának, melynek kapcsán a kezdeti nyugalmi helyzetből kissé kitérítve a szerkezetet, vizsgáljuk viselkedését.

- Stabilis egyensúlyi állapot: a kitérítő hatás megszűnésével visszatér eredeti nyugalmi helyzetéhez. A belső erők képesek az egyensúly fenntartására.
- Indifferens egyensúlyi állapot: a kitérítő hatás megszűnésével a szerkezet új helyzetében marad nyugalomban. A belső erők még éppen képesek az egyensúly fenntartására.
- Labilis egyensúlyi állapot: a kitérítő hatás megszűnésével eredeti nyugalmi helyzetéhez képest egyre távolodik, majd tönkremegy. A belső erők nem képesek az egyensúly fenttartására.

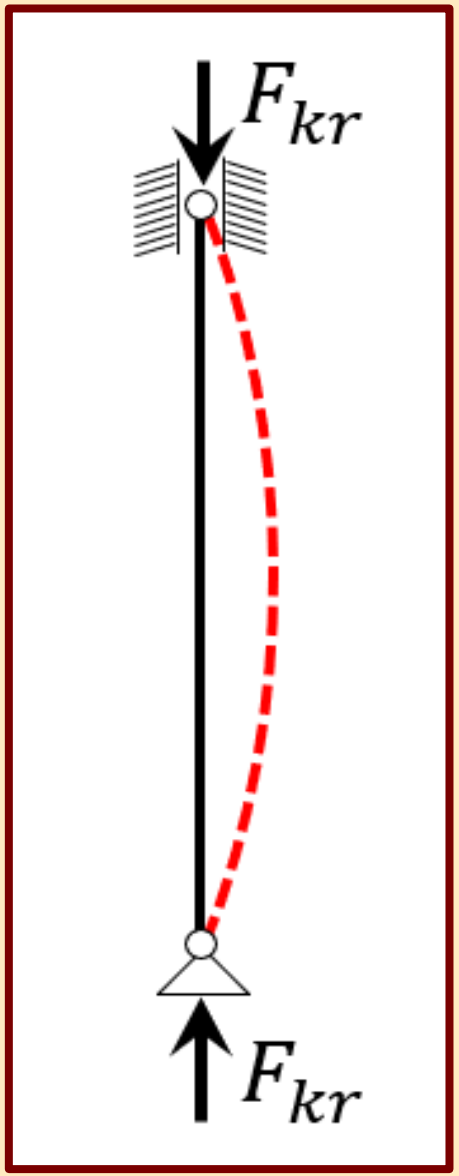


AZ INDIFFERENS ÁLLAPOT VIZSGÁLATA

- Az egyensúlyi állapotot a statikai módszer segítségével elemezzük, amely csak az indifferens egyensúlyi állapot vizsgálatára alkalmas. A terhelő erő növelése mellett ehhez az állapothoz tartozik az az utolsó egyensúlyi helyzet, amely esetén a rúdelem kimozdult állapotában még nyugalomban marad.
- Az indifferens állapothoz tartozó erőt kritikus erőnek, a km-i feszültségeket kritikus feszültségnek hívjuk.

$$\sigma_{krit.} = \frac{F_{krit.}}{A}$$

- Egy centrikusan nyomott egyenes tengelyű, állandó km-ű, mindkét végén térbeli csuklóval megtámasztott rúdelemet vizsgálunk.



RUGALMAS KIHAJLÁS

AZ EULER-FÉLE KRITIKUS ERŐ

- Az indifferens állapothoz tartozó deformált alak egy km.-ében ébredő nyomaték és a terhelő erő egyensúlyi egyenlete:

$$M - F_{kr} \cdot e = 0 \quad \rightarrow \quad M = F_{kr} \cdot e$$

- A nyomaték és az eltolódás összefüggése (rugalmas vonal diff. egyenlete):

$$-\frac{M}{E \cdot I} = e''$$

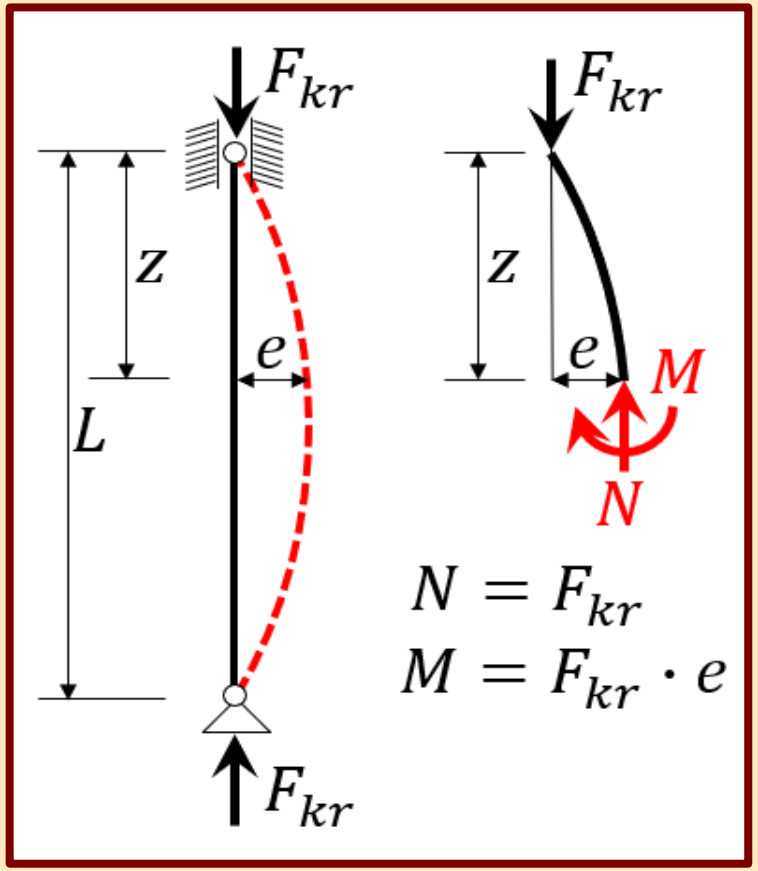
$$-\frac{F_{kr} \cdot e}{E \cdot I} = e''$$

- A rúd adatait összefoglaló konstans:

$$\alpha^2 = \frac{F_{kr}}{E \cdot I}$$

- A központosan nyomott rugalmas rúd kihajlásának differenciálegyenlete:

$$e'' + \alpha^2 \cdot e = 0$$



- A másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$e = A \cdot \sin\alpha \cdot z + B \cdot \cos\alpha \cdot z$$

- Ha z=0; e=0:

$$e = A \cdot \sin\alpha \cdot 0 + B \cdot \cos\alpha \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$$ (A második tag kiesik.)

- Ha z=L; e=0:

$$e = A \cdot \sin\alpha \cdot l = 0$$ (Szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.)

  - $1. megoldás$:

    $A = 0$

    Triviális megoldás, mivel ha a függvénygörbe amplitúdójaként A nulla értékű, akkor ez a deformálatlan alak egyensúlyát állapítja meg.

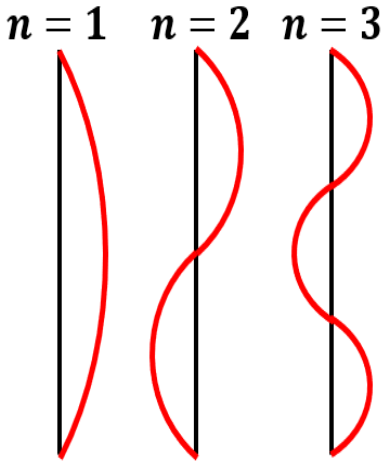
  - $2. megoldás$:

    $\sin\alpha \cdot l = 0$

    $\alpha \cdot l = 0 + n \cdot \pi \qquad n = 1; 2; 3...$

$$\alpha^2 = \frac{F_{kr}}{E \cdot I} = \frac{0 + n^2 \cdot \pi^2}{l^2}$$

$$F_{kr} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} \rightarrow n = 1 \rightarrow F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$



Az n a rúdhosszba beillesztendő szinusz félhullámok száma.

AZ INERCIANYOMATÉK ÉS A MEGTÁMASZTÁSI VISZONYOK SZEREPE

- Ha nem egy kitüntetett irányban vizsgálódunk és a megtámasztások minden síkban azonosak, akkor a kihajlás síkja a km. legkisebb főinerciájának (I_2) tengelyére merőleges sík lesz, ahol a legkisebb az ellenállás.

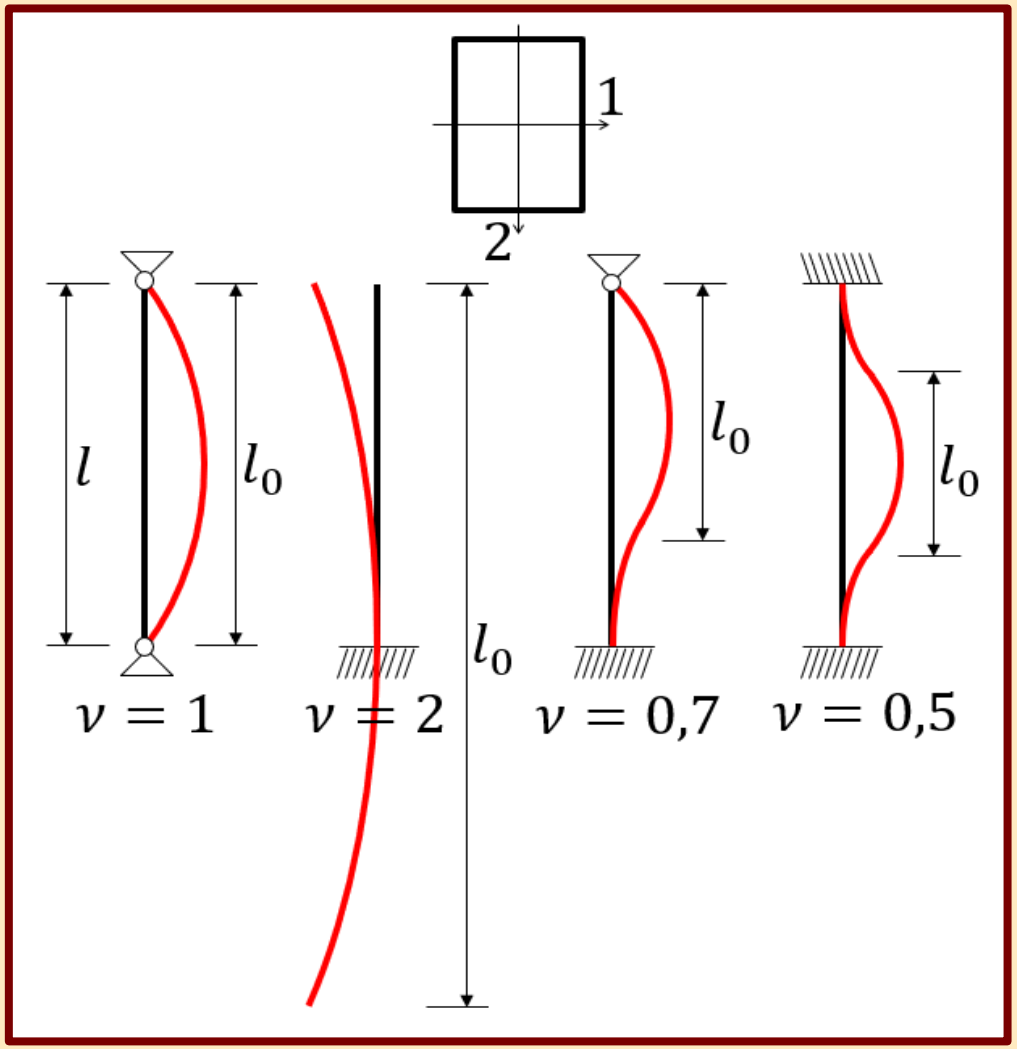
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_2}{l^2}$$

- A mindkét végén csuklós megtámasztástól eltérő esetekben is a kritikus erő a deformált alakba illeszthető szinusz félhullám hosszától függ, amelyet kihajlási (félhullám) hossznak hívunk, l_0-ként jelöljük.

$$l_0 = \nu \cdot l$$

A ν a megtámasztási viszonyoktól függő tényező.

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_2}{l_0^2}$$



A RUGALMAS KIHAJLÁS KRITIKUS FESZÜLTSÉGE

- A központosan ható kritikus erő egyenletes feszültségeloszlást okoz a km.-ekben. A keletkező kritikus feszültség:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_2}{l_0^2 \cdot A}$$

- A keresztmetszeti jellemzők az inerciasugárral is megfogalmazhatóak:

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} \quad \rightarrow \quad i_2^2 = \frac{I_2}{A}$$

- A kritikus feszültség a rúd hossz- és keresztirányú méreteitől is függ. Ezek együttes viszonyát a karcsúsági tényezővel fejezhetjük ki:

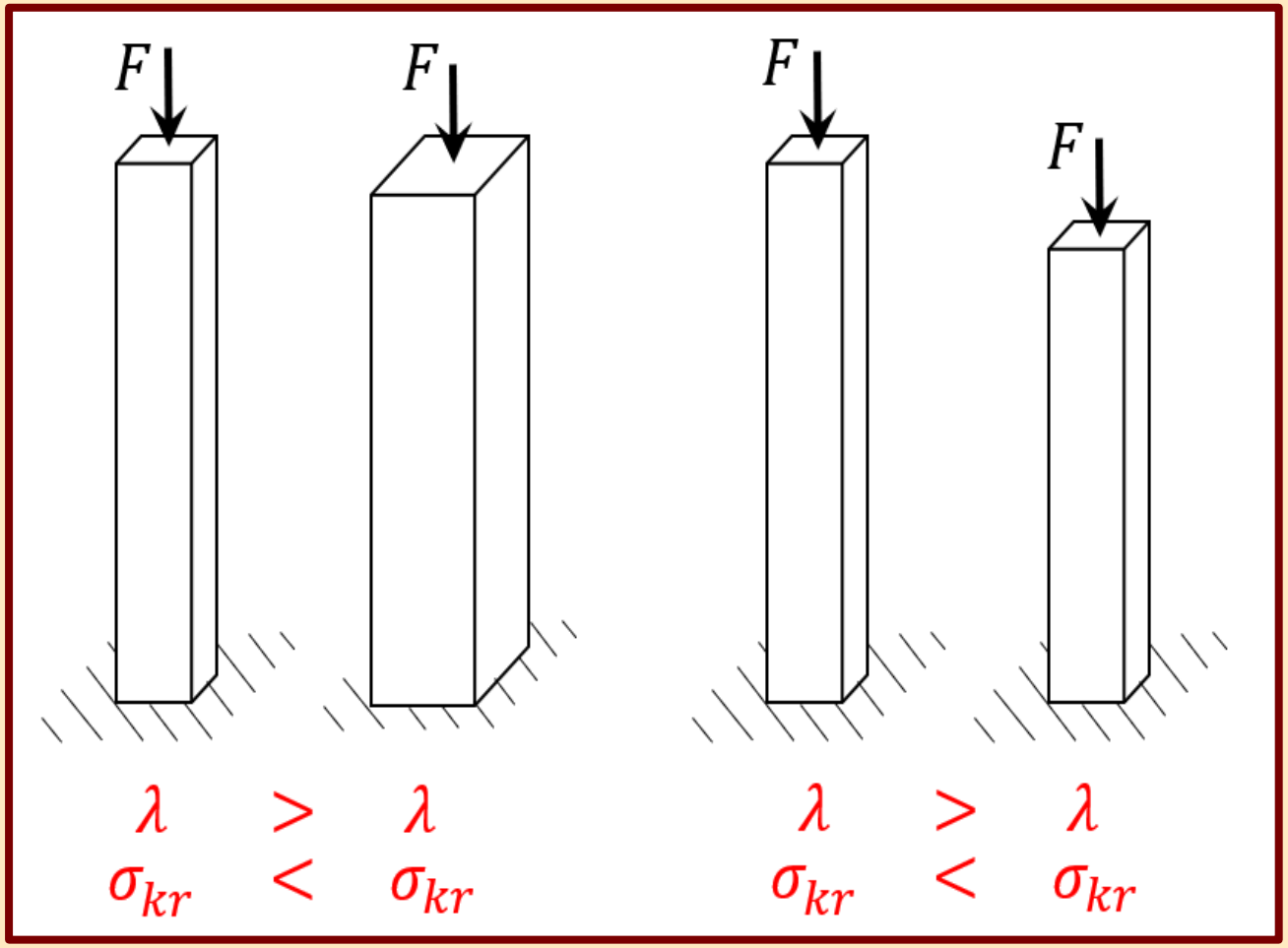
$$\lambda = \frac{l_0}{i_2}$$

- A kritikus feszültség a karcsúság segítségével:

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_2}{l_0^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_2^2}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

A KRITIKUS FESZÜLTSÉG ÉS A KARCSÚSÁGI TÉNYEZŐ ÉRTELMEZÉSE

- A szilárdsági feladatoknál a megfelelőséget a kizárólag az anyagminőségtől függő megengedett feszültség segítségével igazoljuk.
- A kihajlási vizsgálatnál a σ_{kr} értéke az anyagminőségen kívül a rúdelem geometriai adataitól is függ.
- A rúdhossz vagy a km. méreteinek megváltoztatása, a karcsúság és a kritikus feszültség értékében is változást okoz. A km-i méretek megfelelő növelése, ill. a rúdhossz csökkenése a karcsúság csökkenését, valamint a kritikus feszültség növekedését eredményezi.



KÉPLÉKENY KIHAJLÁS

- A karcsúság csökkenésével növekvő σ_{kr} egy bizonyos értéknél eléri az anyag folyási határát. Vagyis ennél kisebb karcsúság esetén a rúd egyes pontjai képlékeny állapotba kerülnek, az σ_{kr} számítására nem alkalmazható az Euler-féle rugalmas megoldás.
- A képlékeny kihajlás kritikus feszültségére a Tetmajer-féle lineáris függvényt alkalmazzuk:

  $\sigma_{kr} = a - b \cdot \lambda$, ahol a és b, két anyagra jellemző paraméter.
- Azt a λ értéket, amelynél kisebb karcsúságok esetén képlékeny, nagyobb karcsúságok esetén rugalmas kihajlás valósul meg, határkarcsúsági tényezőnek hívjuk, λ_0-nak jelöljük.

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_0^2} = \sigma_f$$

$$\lambda_0 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_f}}$$

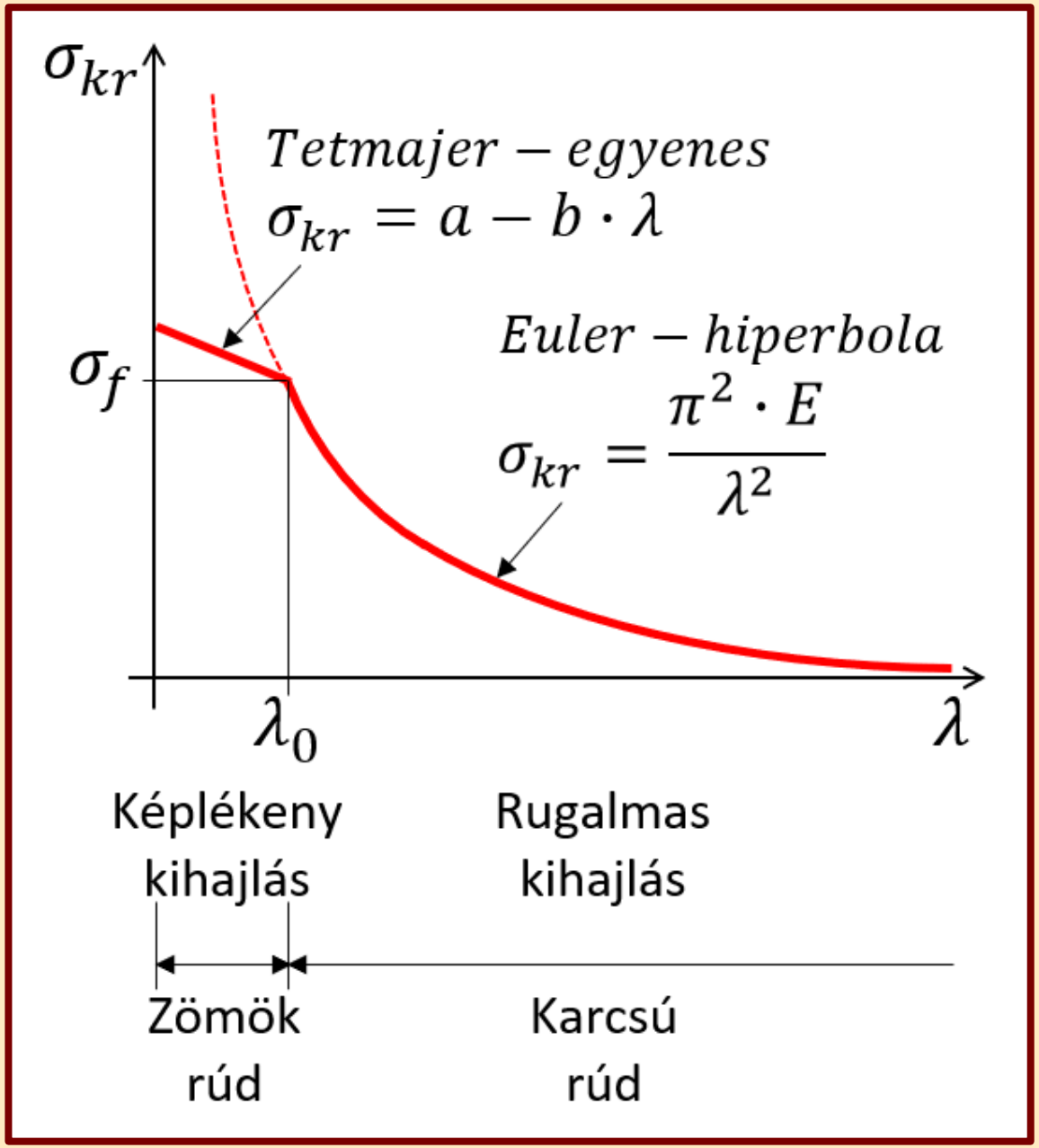
A KARCSÚSÁG ÉS A KRITIKUS FESZÜLTSÉG ÖSSZEFÜGGÉSE

- Ha a λ_0-nál kisebb a vizsgált rúd λ karcsúsági tényezője, akkor zömök rúdról beszélünk és képlékeny kihajlás fog érvényesülni, a kritikus feszültséget a Tetmajer-egyenes segítségével számítjuk.

$$\sigma_{kr} = a - b \cdot \lambda$$

- Ha a λ_0-nál nagyobb a vizsgált rúd λ karcsúsági tényezője, akkor karcsú rúdról beszélünk és rugalmas kihajlás fog érvényesülni, a kritikus feszültséget az Euler-hiperbola segítségével számítjuk.

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$



MÉRETEZÉS ÉS ELLENŐRZÉS KIHAJLÁSRA

- A kihajlással kapcsolatos megfelelőség igazolását a szilárdsági vizsgálatokhoz hasonló reláció teljessülése alapján végezhetjük.

$$\sigma \leq \sigma_{kr,e}$$

$$\frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_{kr}}{n}$$

Az n biztonsági tényező, értéke 2-3 körül vehető fel.

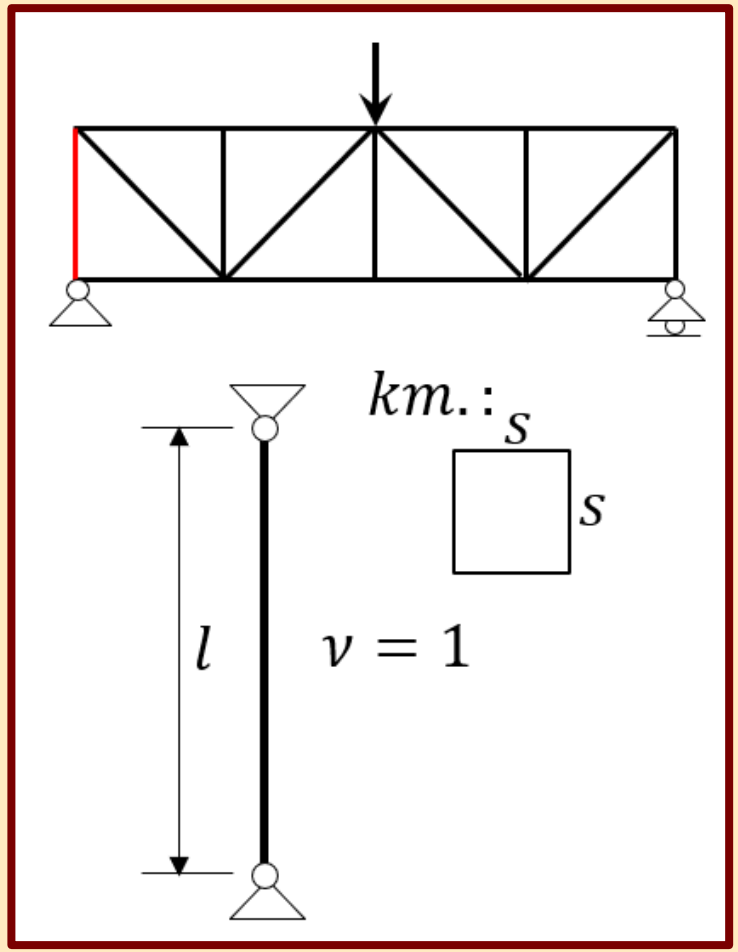
- Méretezés során a karcsúság paraméteresen írható fel, ezért nem tudjuk eldönteni, hogy képlékeny vagy rugalmas kihajlás valósul meg. Emiatt az egyik eset feltételezésével kell élnünk és ebből kiindulva a fenti reláció alapján határozzuk meg a kérdéses geometriai értéket. Ha a kapott eredményt a karcsúságba visszahelyettesítve, visszaigazolást nyer a kezdeti feltételezésünk, akkor a helyes végeredményt kaptuk meg. Ellenkező esetben a számítást a másik eset alapján újra el kell végeznünk.
- Ellenőrzés során nincs ismeretlen a reláció felírásakor. A karcsúság értéke meghatározható, a vizsgálat egyszerűen elvégezhető.

KIHAJLÁSVIZSGÁLAT ALKALMAZÁSA

- A kérdéses rúd km.-ének méretezése során az első lépés a karcsúsági tényező meghatározása:

$$l_0 = \nu \cdot l \;\; ; i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$ - i_2 paraméteres lesz.

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2}$$ - a λ is paraméteres.



- A rugalmas vagy a képlékeny állapot feltételezése:

$\lambda > \lambda_0$ (rugalmas) vagy $\lambda < \lambda_0$(képlékeny)

- A megfelelőségi reláció felírása, ismeretlen kifejezése:

$$\sigma \leq \sigma_{kr,e}$$

$$\frac{F}{A} \leq \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2 \cdot n} \quad vagy \quad \frac{F}{A} \leq \frac{a - b \cdot \lambda}{n}$$

$$\Downarrow$$

s

- A kapott méretet a λ-ba visszahelyettesítve, azt a λ_0-lal összehasonlítva a kezdeti feltétel ellenőrzése. Ha nem felel meg, újra kell számolni a másikkal.